

LEGGI MATEMATICHE

NELLA CARICA E SCARICA DI UN INDUTTORE

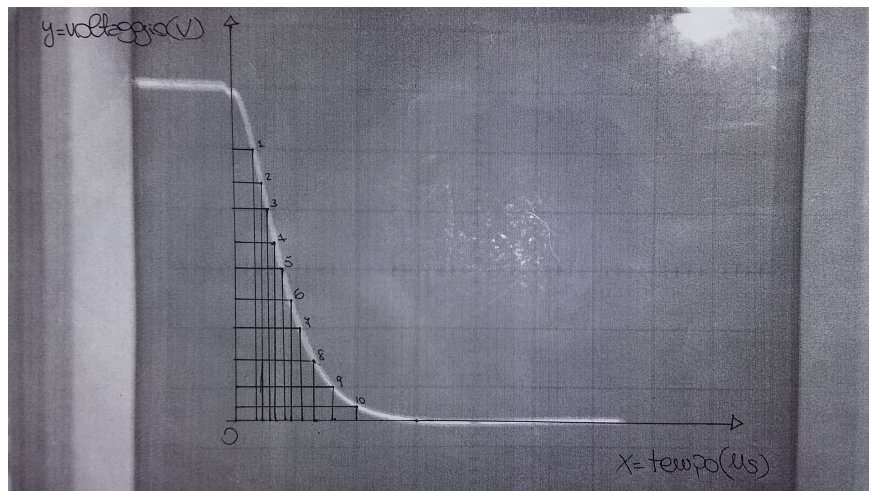
a cura di Chiara Carniel, Andrea D'Agostino, Gioella Lorenzon, Mattia Pavan,
Luca Spadetto, Jing Jing Xu, Francesca Zaffalon
Realizzato nell'ambito del *progetto Archimede*
con la supervisione dei
Proff. Fabio Breda, Francesco Zampieri
I.S.I.S.S. M.Casagrande, Pieve di Soligo, a.s. 2015/16

Abstract. *Lo scopo di questo articolo è individuare e analizzare la legge matematica che regola la carica di un induttore in un circuito RL.*

Introduzione. Il nostro lavoro è consistito nello studio del grafico della curva fornitaci dal gruppo dei fisici, corrispondente alla carica di un induttore e ricavata tramite l'uso di un oscilloscopio.

1 Ricerca del modello matematico

Ricevuto il grafico seguente



abbiamo, innanzitutto, fissato un sistema di riferimento cartesiano con origine nel punto più basso a sinistra della curva, e abbiamo ipotizzato che il grafico avesse un asintoto orizzontale di equazione $y = V_0$, dove V_0 è la differenza di potenziale misurata ai capi dell'induttore al termine del processo di carica. Le

funzioni più semplici da noi studiate che presentano tali caratteristiche sono l'omografica, l'arcotangente e l'esponenziale. Inizialmente abbiamo supposto che fosse un'omografica del tipo:

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}$$

con $c \neq 0$, dividendo poi ciascun termine per c , abbiamo ottenuto una funzione con tre parametri k, λ, ε :

$$y = \frac{kx + \lambda}{x + \varepsilon}$$

Imponendo il passaggio per $O(0;0)$, possiamo ricavare la seguente uguaglianza:

$$0 = \frac{\lambda}{\varepsilon}$$

Da questa uguaglianza risulta che:

$$\lambda = 0$$

Perciò ora sappiamo che la nuova equazione sarà del tipo:

$$y = \frac{kx}{x + \varepsilon}$$

Inoltre, poiché abbiamo considerato l'asintoto orizzontale come una generica retta del tipo $y = V_0$, $k = V_0$. La funzione finale ottenuta possiede le caratteristiche richieste e sarà quindi:

$$y = \frac{V_0 x}{x + \varepsilon}$$

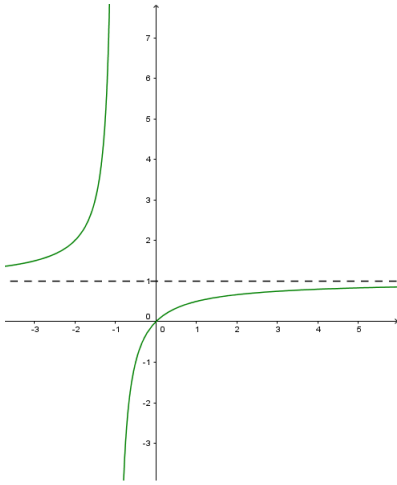


Figura 1: omografica con $V_0 = 1$

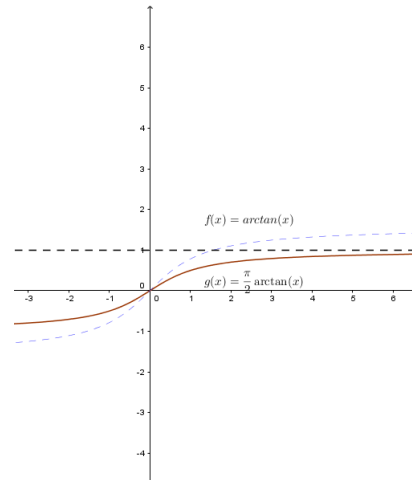


Figura 2: arcotangente con $V_0 = 1$

La seconda possibilità era che fosse un'arcotangente, con la seguente equazione:

$$y = v \arctan(\eta)$$

La funzione arcotangente ha due asintoti orizzontali di equazioni $y = \pm \frac{\pi}{2}$. Per ottenere i due asintoti che ci interessano, ossia di equazioni $y = \pm V_0$, effettuiamo una dilatazione verticale di $\frac{2V_0}{\pi}$ in y . La funzione arcotangente ottenuta sarà quindi:

$$y = \frac{2V_0}{\pi} \arctan(\eta x)$$

Infine abbiamo ipotizzato che si trattasse di una funzione esponenziale del tipo:

$$y = \alpha e^{\beta x}$$

Abbiamo dovuto applicare alcune trasformazioni geometriche per ricondurla alla forma che abbiamo considerato: partendo dalla funzione di base $y = e^x$ abbiamo effettuato una simmetria rispetto all'asse y e successivamente un'altra simmetria, questa volta rispetto all'asse x , ottenendo l'equazione:

$$y = -e^{-x}$$

Poichè questa funzione non passa per l'origine, abbiamo eseguito una traslazione di 1 ottenendo:

$$y = 1 - e^{-x}$$

Infine per fare in modo che l'asintoto orizzontale fosse V_0 , abbiamo applicato una dilatazione moltiplicando la funzione per il valore V_0 .

$$y = V_0(1 - e^{-x})$$

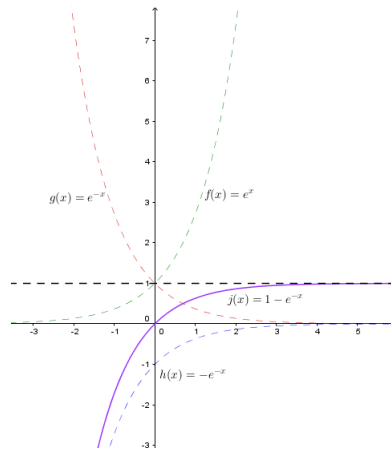


Figura 3: esponenziale con $V_0 = 1$

Per selezionare un modello adatto a descrivere l'andamento del fenomeno fisico è necessario verificare che soddisfi la legge che regola il processo di carica di un'induttanza di cui di seguito forniamo una breve dimostrazione.

La differenza di potenziale che alimenta il circuito, è data dalla somma della differenza di potenziale ai capi dell'induttanza e ai capi della resistenza:

$$V = V_L + V_R$$

Sappiamo che ai capi della resistenza $V = IR$, dove R è la resistenza e I la corrente.

Passiamo ora al calcolo di V_L . Sapendo che l'induttanza L è definita dal rapporto tra il flusso di campo magnetico attraverso la superficie interna all'induttore e la corrente:

$$L = \frac{\phi}{I}$$

ricaviamo:

$$\phi = LI$$

Deriviamo entrambi i membri rispetto al tempo e otteniamo:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{dL}{dt} I + L \frac{dI}{dt}$$

Essendo L costante, la sua derivata è nulla, quindi l'equazione risulta:

$$\frac{d\phi}{dt} = L \frac{dI}{dt}$$

Per la legge di Faraday-Lenz, sappiamo che il rapporto $\frac{d\phi}{dt} = -V_L$, pertanto otteniamo l'equazione differenziale:

$$V_L = -L \frac{dI}{dt}$$

Infine sommando il valore di V_R al valore di V_L così trovato, per ottenere V arriviamo alla seguente equazione differenziale:

$$V(t) = -L \frac{dI(t)}{dt} + RI(t)$$

Considerando che nell'istante iniziale la corrente è nulla, il modello da noi cercato deve descrivere l'andamento della corrente nel tempo e soddisfare alla suddetta equazione differenziale.

In particolare la funzione deve essere proporzionale alla sua derivata, consideriamo ora le derivate delle funzioni possibili:

$$D \frac{V_0 x}{x + \varepsilon} = \frac{V_0 \varepsilon}{(x + \varepsilon)^2}, \quad D \frac{2V_0 \eta}{\pi} \arctan(\eta x) = \frac{2V_0 \eta}{\pi(1 + \eta^2 x^2)}, \quad DV_0(1 - e^{-\eta x}) = V_0 \eta e^{-\eta x}$$

Di conseguenza, l'unico possibile tra i modelli da noi proposti, è la funzione esponenziale:

$$y = V_0(1 - e^{-\eta x})$$

Sapendo ora che la curva di carica è approssimabile ad un'esponenziale, possiamo dedurre un modello che descriva il processo di scarica. Innanzi tutto la curva ha un asintoto orizzontale in $y = 0$, inoltre interseca l'asse delle ordinate in $y = V_0$; applicando quindi alla forma canonica dell'esponenziale una simmetria rispetto all'asse y , otteniamo una funzione del tipo:

$$y = \chi e^{-\sigma x}$$

Quindi eseguiamo una dilatazione moltiplicando la funzione per il valore V_0 e la curva di scarica risulta essere così definita:

$$y = V_0 e^{-\sigma x}$$

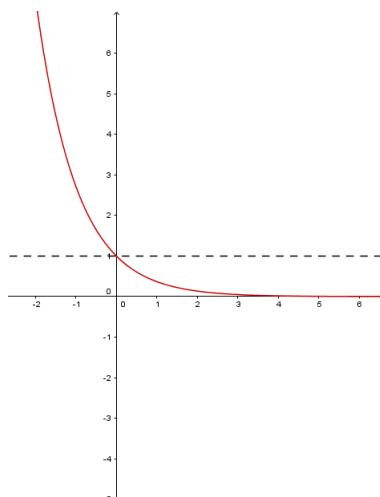


Figura 4: scarica del circuito

Nel monitor dell'oscilloscopio si poteva osservare il grafico della carica e della successiva scarica dell'induttanza, il secondo nostro obiettivo è stato quello di determinare l'equazione della funzione di tale grafico.

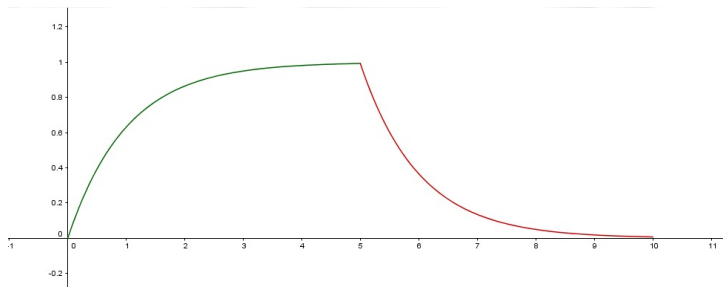


Figura 5: oscillazioni circuito, $\tau = 1$, $V_0 = 1$

Primo aspetto da osservare è che la funzione sembra continua e periodica. Le due funzioni di carica e scarica sono $y = V_0(1 - e^{-\frac{x}{\tau}})$ e $y = V_0e^{-\frac{x}{\tau}}$ dove la quantità $\tau = L/R$, con R resistenza ed L induttanza, che ha le dimensioni di un tempo, viene detta costante di tempo o tempo caratteristico del circuito. Dal punto di vista fisico la funzione cresce fino a 5τ arrivando al valore di $V_0(1 - e^{-5})$ dopo di che la funzione continua costante. Cioè l'induttanza non si carica mai al 100% di V_0 ma solo fino al $1 - e^{-5} = 99,3262\%$ di V_0 . Quindi l'impulso deve avere per frequenza un valore qualsiasi maggiore o uguale di 5τ perché il processo si esaurisca.

Supponiamo che la frequenza dell'impulso sia esattamente 5τ . Di conseguenza una carica e una scarica avvengono in 10τ . La funzione

$$y = V_0(1 - e^{-\frac{x}{\tau}})$$

parte dall'origine del sistema di riferimento e in 5τ arriva al punto $M(5\tau; V_0(1 - e^{-5}))$. Per rendere la funzione continua la scarica deve partire dal punto M . L'induttanza per quanto ci hanno detto i fisici, come la carica, non si scarica mai del 100% ma solo fino al $1 - e^{-5} = 99,3262\%$ dal valore di partenza. Quindi se la scarica parte dal valore $V_0(1 - e^{-5})$ arriva a $V_0(1 - e^{-5})e^{-5}$. La funzione che descrive questa scarica è quindi:

$$y = V_0e^{-\frac{x}{\tau} + \ln(1 - e^{-5}) + 5}$$

Si può quindi descrivere l'andamento della prima carica e della successiva scarica con la funzione:

$$y = \begin{cases} V_0(1 - e^{-\frac{x}{\tau}}) & \text{se } 0 < x < 5\tau \\ V_0e^{-\frac{x}{\tau} + \ln(1 - e^{-5}) + 5} & \text{se } 5\tau \leq x < 10\tau \end{cases}$$

2 Metodo dei minimi quadrati

Il grafico della scarica dell'induttore rappresenta una funzione esponenziale della quale conosciamo l'equazione:

$$y = qe^{mx}$$

Il nostro compito è quello di determinare il valore di m e di q di tale equazione dalla foto dell'oscilloscopio.

Per fare ciò utilizziamo il metodo dei minimi quadrati, il quale permette di determinare una funzione lineare che meglio approssimi dei dati sperimentali.

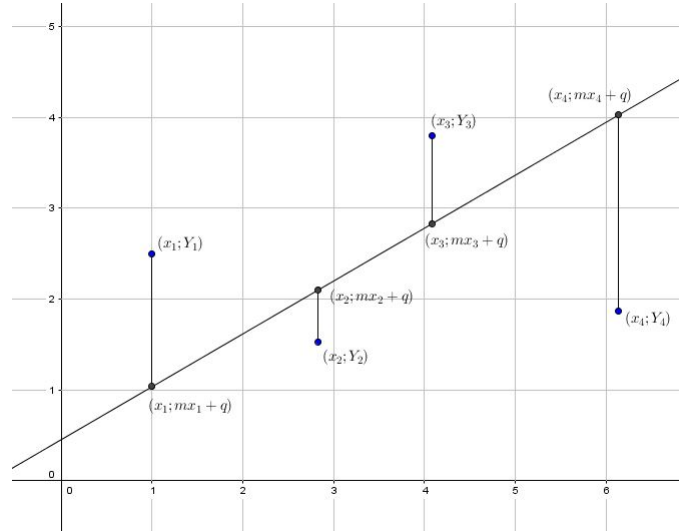
Il metodo di regressione lineare dei minimi quadrati si basa sulla minimizzazione della somma dei quadrati delle distanze i tra i punti di coordinate $(x_i; y_i)$ e i punti che hanno per ascissa x_i e per ordinata l'immagine della funzione lineare stessa.

Essendoci stata fornita una curva di funzione esponenziale, dobbiamo prima ridurla a una funzione lineare per poter utilizzare il metodo dei minimi quadrati, in questo modo:

$$\begin{aligned}
 y &= qe^{mx} \\
 \ln(y) &= \ln(q \cdot e^{mx}) \\
 \ln(y) &= \ln(q) + \ln(e^{mx}) \\
 \ln(y) &= \ln(q) + mx \cdot \ln(e) \\
 \ln(y) &= mx + \ln(q)
 \end{aligned}$$

Ponendo $\ln(y) = Y$ e $\ln(q) = Q$ otteniamo $Y = mx + Q$.

Disponendo di un certo numero di punti della funzione esponenziale $(x_i; y_i)$, consideriamo allora i punti $(x_i; Y_i)$. Con il metodo dei minimi quadrati vogliamo trovare la retta che meglio li approssimi. Sia $f(x) = mx + q$, i punti $(x_i; Y_i)$ appartengono alla retta se e solo se è vera l'equazione $Y_i = mx_i + q$. La retta che cerchiamo è quella per cui è minima la somma dei quadrati delle distanze tra i punti rappresentati dalle coordinate $(x_i; Y_i)$ e i punti $(x_i; mx_i + q)$ che hanno per ascissa x_i e per ordinata l'immagine della funzione lineare.



Essendo i quadrati delle distanze pari a $d = (mx_i + q - Y_i)^2$, la funzione che dobbiamo minimizzare è:

$$f(m, q) = \sum_{i=1}^n (mx_i + q - Y_i)^2$$

La funzione è nelle due variabili m e q . Per minimizzarla dobbiamo trovare dove si annullano entrambe le derivate prime parziali rispetto a m e q , cioè risolvere il sistema:

$$\begin{cases}
 2 \sum_{i=1}^n [(x_i(mx_i + q - Y_i))] = 0 \\
 2 \sum_{i=1}^n (mx_i + q - Y_i) = 0
 \end{cases}$$

Semplifichiamo la prima equazione:

$$\sum_{i=1}^n [(x_i(mx_i + q - Y_i))] = 0$$

$$\sum_{i=1}^n mx_i^2 + \sum_{i=1}^n x_i q - \sum_{i=1}^n x_i Y_i = 0$$

$$m \sum_{i=1}^n x_i^2 + q \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n x_i Y_i = 0$$

Ora semplifichiamo la seconda:

$$\sum_{i=1}^n (mx_i + q - Y_i) = 0$$

$$\sum_{i=1}^n mx_i + \sum_{i=1}^n q - \sum_{i=1}^n Y_i = 0$$

Chiamando n il numero di punti $(x_i; Y_i)$:

$$m \sum_{i=1}^n x_i + nq - \sum_{i=1}^n Y_i = 0$$

Abbiamo quindi ottenuto un sistema di due equazioni nelle variabili m e q :

$$\begin{cases} m \sum_{i=1}^n x_i^2 + q \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n x_i Y_i = 0 \\ m \sum_{i=1}^n x_i + nq - \sum_{i=1}^n Y_i = 0 \end{cases}$$

3 Applicazione del metodo al grafico

Riportiamo in tabella le coordinate dei punti a cui vogliamo applicare il metodo

Punti della funzione esponenziale:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	L
x	0,4	0,5	0,6	0,8	0,9	1,0	1,2	1,4	1,8	2,2
y	0,22	0,19	0,17	0,14	0,12	0,10	0,08	0,05	0,03	0,01

Punti a cui applichiamo il metodo dei minimi quadrati:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	L
x	0,4	0,5	0,6	0,8	0,9	1,0	1,2	1,4	1,8	2,2
ln(y)=Y	-0,66	-0,72	-0,77	-0,85	-0,92	-1,00	-1,10	-1,30	-1,52	-2,00

Procediamo quindi a risolvere il sistema per ottenere i parametri della funzione della retta.

$$\begin{cases} 14,7m + 10,8q + 13,87 = 0 \\ 10,8m + 10q + 10,84 = 0 \end{cases}$$

Passiamo alla risoluzione del sistema con il metodo di sostituzione, ricavando q dalla seconda equazione e sostituendolo nella prima.

$$\begin{cases} 14,7m + 10,8 \cdot \frac{-10,8m - 10,84}{10} + 13,87 = 0 \\ q = \frac{-10,8m - 10,84}{10} \end{cases}$$

Riduciamo la prima equazione in forma normale:

$$\begin{cases} 3,04m = -2,17 \\ q = \frac{-10,8m - 10,84}{10} \end{cases}$$

Calcoliamo poi il valore di m sostituendolo nella prima equazione:

$$\begin{cases} m = -0,714 \\ q = 0,771 - 1,084 \end{cases}$$

Risolviemo infine la seconda equazione determinando la variabile q

$$\begin{cases} m = -0,714 \\ q = -0,313 \end{cases}$$

L'equazione della retta interpolante è pertanto $y = mx + q$, in particolare $y = -0,714x - 0,313$. Procediamo a determinare la funzione esponenziale ponendo $q' = -\ln(|q|) = -(-0,50) = 0,50$. pertanto la funzione risulta essere $y = 0,50e^{-0,714x}$. Passiamo ora a calcolare il tempo caratteristico del fenomeno, indicato con τ . L'equazione canonica della scarica è

$$y = V_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

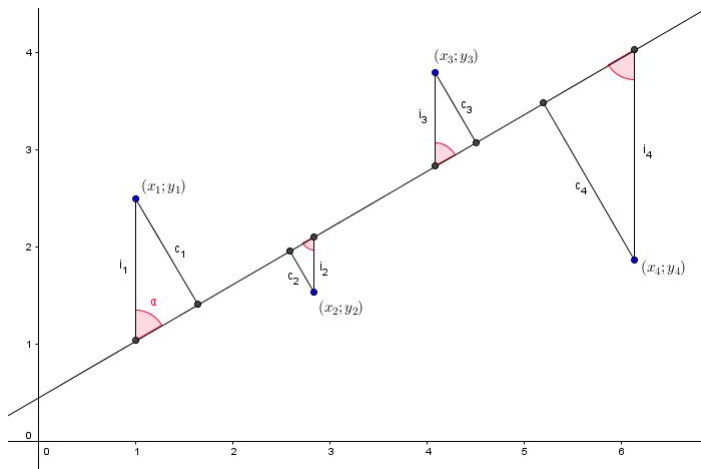
Poiché $0,714 = \frac{1}{\tau}$ risulta che:

$$\tau = \frac{1}{0,714} = 1,4\mu s$$

Appendice. Vogliamo dimostrare che la retta ottenuta con il metodo dei minimi quadrati è la stessa che si ottiene minimizzando i quadrati delle distanze c tra i punti $(x_i; y_i)$ e la retta stessa.

Per il metodo dei minimi quadrati, la retta che meglio approssima i punti è quella che minimizza la somma $\sum_{i=1}^n i_i^2$, quindi dimostriamo che tale retta è la stessa che si ottiene dalla minimizzazione della somma $\sum_{i=1}^n c_i^2$.

La retta e i segmenti che congiungono perpendicolarmente e verticalmente i punti $(x_i; y_i)$ e la retta stessa formano dei triangoli di ipotenusa i_i e cateto c_i , come illustrato nella figura.



Tali triangoli sono rettangoli e simili fra loro in quanto aventi un lato sulla stessa retta e gli altri lati corrispondenti paralleli tra loro. Pertanto è sempre vero che $c_i = i_i \sin \alpha$, dove α è l'angolo opposto al cateto c_i . Quindi possiamo considerare $\sum_{i=1}^n c_i^2$ come $\sin^2 \alpha \sum_{i=1}^n i_i^2$.

Le somme $\sum_{i=1}^n i_i^2$ e $\sin^2 \alpha \sum_{i=1}^n i_i^2$ sono allora minimizzate dalla stessa retta perché sono una multipla dell'altra.

Pertanto, il metodo dei minimi quadrati classico che minimizza le distanze punto-punto i_i e quello che minimizza le distanze punto-retta c_i portano alla stessa retta. Ma il primo metodo è molto più semplice dal punto di vista dei calcoli e quindi da preferirsi.