TEOREMA DI ROUCHÉ -CAPELLI

Non generalizziamo, neppure i testi matematici sono perfetti

a cura di Andrea Della Libera, Anna Barisan, Andrea De Faveri, Gioella Lorenzon
Mattia Pavan, Edoardo Sech, Lorenzo Spina, Jing Jing Xu, Giacomo Zelbi
Realizzato nell'ambito del ***progetto Archimede***
con la supervisione del Prof. Fabio Breda
I.S.I.S.S. M.Casagrande, Pieve di Soligo, a.s. 2014/15

Abstract. *In questo articolo vogliamo dimostrare come sia errato generalizzare la regola per discriminare se un sistema lineare di due equazioni di due incognite sia determinato, indeterminato o impossibile ai sistemi lineari di tre equazioni e tre incognite.*

Consideriamo il seguente sistema lineare di due equazioni e due incognite:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

le matrici relative a tale sistema sono:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad A_{x1} = \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{bmatrix} \qquad A_{x2} = \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{bmatrix}$$

e i relativi determinanti:
$|A| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$
$|A_{x1}| = b_1 \cdot a_{22} - b_2 \cdot a_{12}$
$|A_{x2}| = a_{11} \cdot b_2 - a_{12} \cdot b_2$

Possiamo dimostrare i seguenti risultati:
se $|A| \neq 0$ allora il sistema è determinato;
se $|A| = 0 \wedge |A_{x1}| = 0 \wedge |A_{x2}| = 0$ allora il sistema è indeterminato;
se $|A| = 0 \wedge |A_{x1}| \neq 0 \vee |A_{x2}| \neq 0$ allora il sistema è impossibile.

Dimostrazione :
Prendiamo un sistema generico di due equazioni:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

con $a_{11} \neq 0$, $a_{12} \neq 0$, $a_{21} \neq 0$ e $a_{22} \neq 0$.
Possiamo applicare il secondo principio di equivalenza delle equazioni:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 \cdot a_{21} + a_{12}x_2 \cdot a_{21} = b_1 \cdot a_{21} \\ a_{21}x_1 \cdot (-a_{11}) + a_{22}x_2 \cdot (-a_{11}) = b_2 \cdot (-a_{11}) \end{cases}$$

e quindi:

$$\begin{cases} a_{11}a_{21}x_1 + a_{12}a_{21}x_2 = a_{21}b_1 \\ -a_{11}a_{21}x_1 - a_{11}a_{22}x_2 = -a_{11}b_2 \end{cases}$$

applichiamo il metodo dell'eliminazione per ottenere la seguente equazione:

$$a_{12}a_{21}x_2 - a_{11}a_{22}x_2 = a_{21}b_1 - a_{11}b_2$$

raccogliamo la x_2 al primo membro:

$$(a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22})x_2 = a_{21}b_1 - a_{11}b_2.$$

In modo analogo, riapplichiamo il secondo principio di equivalenza:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 \cdot (-a_{22}) + a_{12}x_2 \cdot (-a_{22}) = b_1 \cdot (-a_{22}) \\ a_{21}x_1 \cdot a_{12} + a_{22}x_2 \cdot a_{12} = b_2 \cdot a_{12} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -a_{11}a_{22}x_1 - a_{12}a_{22}x_2 = -a_{22}b_1 \\ a_{12}a_{21}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = a_{12}b_2 \end{cases}$$

$$(a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22})x_1 = a_{12}b_2 - a_{22}b_1.$$

Dunque otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} (a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22})x_2 = a_{21}b_1 - a_{11}b_2 \\ (a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22})x_1 = a_{12}b_2 - a_{22}b_1 \end{cases}$$

Ora se $a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}$ è diverso da zero, cioè $|A| \neq 0$ allora il sistema è determinato e le soluzioni sono

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

e

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

Se invece $|A| = 0$ allora il sistema diventa

$$\begin{cases} 0x_2 = a_{21}b_1 - a_{11}b_2 \\ 0x_1 = a_{12}b_2 - a_{22}b_1 \end{cases}$$

quindi se $a_{21}b_1 - a_{11}b_2 = 0$ e $a_{12}b_2 - a_{22}b_1 = 0$ allora il sistema è indeterminato, mentre se $a_{21}b_1 - a_{11}b_2 \neq 0$ o $a_{12}b_2 - a_{22}b_1 \neq 0$ il sistema risulta impossibile. ■

Alcuni libri di testo generalizzano la regola sopra, sbagliando, anche per sistemi di 3 incognite e 3 equazioni. Cioè dato il sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

con $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

$A_x1 = \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ $A_x2 = \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{13} & b_3 & a_{33} \end{bmatrix}$ $A_x3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{bmatrix}$

La seguente regola:
se $|A| \neq 0$ allora il sistema è determinato;
se $|A| = 0 \wedge |A_{x1}| = 0 \wedge |A_{x2}| = 0 \wedge |A_{x3}| = 0$ allora il sistema è indeterminato;
se $|A| = 0 \wedge |A_{x1}| \neq 0 \vee |A_{x2}| \neq 0 \vee |A_{x3}| \neq 0$ allora il sistema è impossibile

non è corretta.

Il primo dei tre casi è giusto, mentre gli altri due risultano sbagliati come dimostriamo nel seguente esempio.

Esempio. Il seguente sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

risulta essere un controesempio della regola messa in discussione.
Infatti $|A| = 0 \wedge |A_{x1}| = 0 \wedge |A_{x2}| = 0 \wedge |A_{x3}| = 0$ ma il sistema non è indeterminato ma impossibile vista l'impossibilità di trovare tre numeri la cui somma sia contemporaneamente 1 e 2.■

Per determinare se il sistema risulta impossibile o indeterminato si deve neccessariamente utilizzare il teorema di Rouchè-Capelli e non la regola precedente.

La dimostrazione presentata all'inizio dell'articolo per i sistemi 2×2 non si può generalizzare anche per i 3×3. Vediamolo:
Consideriamo un sistema generico a tre equazioni:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Ponendo $a_{11} \neq 0$ e $a_{21} \neq 0$, possiamo scrivere:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 \cdot (-a_{21}) + a_{12}x_2 \cdot (-a_{21}) + a_{13}x_3 \cdot (-a_{21}) = b_1 \cdot (-a_{21}) \\ a_{21}x_1 \cdot a_{11} + a_{22}x_2 \cdot a_{11} + a_{23}x_3 \cdot a_{11} = b_2 \cdot a_{11} \\ // \end{cases}$$

e quindi:

$$\begin{cases} -a_{11}a_{21}x_1 - a_{12}a_{21}x_2 - a_{13}a_{21}x_3 = -a_{21}b_1 \\ a_{11}a_{21}x_1 + a_{11}a_{22}x_2 + a_{11}a_{23}x_3 = a_{11}b_2 \\ // \end{cases}$$

e sommando le due equazioni otteniamo:

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 + (a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21})x_3 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1$$

Analogamente, ponendo $a_{21} \neq 0$ e $a_{31} \neq 0$, scriviamo:

$$\begin{cases} // \\ a_{21}x_1 \cdot (-a_{31}) + a_{22}x_2 \cdot (-a_{31}) + a_{23}x_3 \cdot (-a_{31}) = b_2 \cdot (-a_{31}) \\ a_{31}x_1 \cdot a_{21} + a_{32}x_2 \cdot a_{21} + a_{33}x_3 \cdot a_{21} = b_3 \cdot a_{21} \end{cases}$$

e dunque:

$$(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})x_2 + (a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31})x_3 = a_{21}b_3 - a_{31}b_2$$

Con queste due equazioni costruiamo il sistema:

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 + (a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21})x_3 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \\ (a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})x_2 + (a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31})x_3 = a_{21}b_3 - a_{31}b_2 \end{cases}$$

Per continuare dobbiamo porre $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ e $a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} \neq 0$ e quindi moliplicare:

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 \cdot (a_{22}a_{31} - a_{21}a_{32}) + (a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21})x_3 \cdot (a_{22}a_{31} - a_{21}a_{32}) = \\ (a_{11}b_2 - a_{21}b_1) \cdot (a_{22}a_{31} - a_{21}a_{32}) \\ (a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})x_2 \cdot (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) + (a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31})x_3 \cdot (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = \\ (a_{21}b_3 - a_{31}b_2) \cdot (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(a_{22}a_{31} - a_{21}a_{32})x_2 + (a_{23}a_{11} - a_{13}a_{21})(a_{22}a_{31} - a_{21}a_{32})x_3 \\ = (a_{11}b_2 - a_{21}b_1)(a_{22}a_{31} - a_{21}a_{32}) \\ (a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 + (a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31})(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_3 \\ = (a_{21}b_3 - a_{31}b_2)(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &[(a_{23}a_{11} - a_{13}a_{21})(a_{22}a_{31} - a_{21}a_{32}) + (a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31})(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})]x_3 \\ &= (a_{11}b_2 - a_{21}b_1)(a_{22}a_{31} - a_{21}a_{32}) + (a_{21}b_3 - a_{31}b_2)(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \end{aligned}$$

infine:

$$x_3 = \frac{(a_{11}b_2 - a_{21}b_1)(a_{22}a_{31} - a_{21}a_{32}) + (a_{21}b_3 - a_{31}b_2)(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}{(a_{23}a_{11} - a_{13}a_{21})(a_{22}a_{31} - a_{21}a_{32}) + (a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31})(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}$$

In modo analogo possono essere calcolati anche x_1 e x_2

Ricordiamo però che abbiamo dovuto porre $a_{11} \neq 0$, $a_{21} \neq 0$, $a_{31} \neq 0$, $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ e $a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} \neq 0$

Le prime tre condizioni riguardano i coefficienti della matrice di partenza A, mentre le altre due non sono inerenti alla stessa ma a delle sue sottomatrici e quindi legate al rango di A. Questo ci porta alla neccessità di utilizzare il teorema di Rouchè-Capelli.