La ricerca operativa
IL PROBLEMA DEL TRASPORTO

a cura di ANDREA PIZZARDO e RAZVAN GALATANU

Realizzato nell'ambito del ***progetto Archimede***
con la supervisione dei Proff. Fabio Breda, Francesco Cardano, Alessandro Carraro, Valentina Fabbro, Francesco Zampieri

I.S.I.S.S. M.Casagrande, Pieve di Soligo, a.s. 2013/14

Per ***ricerca operativa*** intendiamo quel settore della matematica che si occupa della risoluzione di problemi decisionali, prevalentemente nel campo dell'economia, attraverso l'utilizzo degli strumenti tipici della disciplina e con lo scopo di ricavare una soluzione ottimale.

Il ***problema del trasporto***, in particolare, si interroga su quale sia la soluzione più economica per trasportare una data quantità di merce da un dato numero di stabilimenti ad un dato numero di magazzini. Per raggiungere questo scopo è necessaria l'applicazione di due particolari metodi risolutivi, il *metodo di Houthakker* (economista olandese che fu professore di economia presso le università di Stanford e di Harvard e pioniere delle teorie della dualità e dell'aggregazione, per le quali vi invitiamo a consultare un manuale d'economia) per trovare la prima soluzione ammissibile, ed il *metodo dello stepping-stone*, per ricavare quindi la soluzione ottimale.

Analizziamo il seguente problema:

La FIAT, azienda leader del settore automobilistico italiano, possiede all'interno dei confini del Belpaese quattro stabilimenti: Mirafiori, Pomigliano, Cassino e Melfi, i quali registrano una produzione globale, rispettivamente, di 120.000, 44.000, 112.000 e 157.000 unità (dati previsti per il 2012).
Ipotizziamo che queste unità vadano inviate a 5 diversi magazzini situati in diverse zone d'Italia: Milano, Roma, Napoli, Firenze e Bologna, con rispettive capienze di 100.000, 120.000, 50.000, 80.000 e 110.000 unità. I costi di trasporto delle singole unità sono indicati nella seguente tabella:

	Milano	**Roma**	**Napoli**	**Firenze**	**Bologna**
Mirafiori	80 €	140 €	170 €	110 €	120 €
Pomigliano	180 €	70 €	20 €	110 €	120 €
Cassino	160 €	50 €	30 €	100 €	110 €
Melfi	210 €	100 €	60 €	120 €	140 €

Le variabili del problema sono dunque la quantità di automobili da trasportare da ogni stabilimento ad ogni magazzino. Per brevità assegneremo i numeri 1, 2, 3, 4 agli stabilimenti di Mirafiori, Pomigliano, Cassino e Melfi e le lettere M, R, N, F, B ai 5 magazzini (in base all'iniziale delle realtive città). Chiameremo queste variabili

$$x_{1M},\ x_{1R},\ x_{1N},\ x_{1F},\ x_{1B},\ x_{2M},\ x_{2R},\ x_{2N},\ x_{2F},\ x_{2B},\ x_{3M},\ x_{3R},\ x_{3N},\ x_{3F},\ x_{3B},\ x_{4M},\ x_{4R},\ x_{4N},\ x_{4F},\ x_{4B}.$$

Il costo totale del trasferimento di tutte le auto sarà dato dalla seguente funzione:

$$z = 80x_{1M} + 140x_{1R} + 170x_{1N} + 110x_{1F} + 120x_{1B} + 180x_{2M} + 70x_{2R} + 20x_{2N} + 110x_{2F} + 120x_{2B} + 160x_{3M} + 50x_{3R} + 30x_{3N} + 100x_{3F},\ 110x_{3B} + 210x_{4M} + 100x_{4R} + 60x_{4N} + 120x_{4F} + 140x_{4B}.$$

La soluzione che andiamo a cercare è però il minor costo possibile, dobbiamo quindi determinare il minimo valore di z, ossia il minimo della funzione, la quale è soggetta ai vincoli:

di evasione (ogni stabilimento non può inviare più unità di quante ne produce):

$$\begin{cases} x_{1M} + x_{1R} + x_{1N} + x_{1F} + x_{1B} \leq 120.000 \\ x_{2M} + x_{2R} + x_{2N} + x_{2F} + x_{2B} \leq 44.000 \\ x_{3M} + x_{3R} + x_{3N} + x_{3F} + x_{3B} \leq 112.000 \\ x_{4M} + x_{4R} + x_{4N} + x_{4F} + x_{4B} \leq 157.000 \end{cases}$$

di ricezione (ogni magazzino non può ricevere più unità di quante ne può contenere):

$$\begin{cases} x_{1M} + x_{2M} + x_{3M} + x_{4M} \leq 100.000 \\ x_{1R} + x_{2R} + x_{3R} + x_{4R} \leq 120.000 \\ x_{1N} + x_{2N} + x_{3N} + x_{4N} \leq 50.000 \\ x_{1F} + x_{2F} + x_{3F} + x_{4F} \leq 80.000 \\ x_{1B} + x_{2B} + x_{3B} + x_{4B} \leq 110.000 \end{cases}$$

e di segno (il numero di unità trasportate non può essere negativo):

$$x_{ik} \geq 0 \text{ con } i = 1,2,3,4 \text{ e } k = \text{M, R, N, F, B.}$$

Procediamo dunque con il *metodo di Houthakker*, che consiste nella costruzione di una nuova tabella che consenta l'inserimento dei vari valori di $x_{i,k}$, e quindi del numero di automobili da trasportare, partendo dalle caselle che prevedono i costi più bassi e tenendo conto dei vincoli di evasione e di ricezione:

	Milano	**Roma**	**Napoli**	**Firenze**	**Bologna**	
S_1	$c_{1M} = 80$	$c_{1R} = 140$	$c_{1N} = 170$	$c_{1F} = 110$	$c_{1B} = 120$	120.000
Mirafiori	100.000			20.000		unità
S_2	$c_{2M} = 180$	$c_{2R} = 70$	$c_{2N} = 20$	$c_{2F} = 110$	$c_{2B} = 120$	44.000
Pomigliano			44.000			unità
S_3	$c_{3M} = 160$	$c_{3R} = 50$	$c_{3N} = 30$	$c_{3F} = 100$	$c_{3B} = 110$	112.000
Cassino		106.000	6.000			unità
S_4	$c_{4M} = 210$	$c_{4R} = 100$	$c_{4N} = 60$	$c_{4F} = 120$	$c_{4B} = 140$	157.000
Melfi		14.000		60.000	83.000	unità
	100.000 unità	120.000 unità	50.000 unità	80.000 unità	110.000 unità	

La soluzione così ottenuta è la seguente:

$$z = 80 \times 100.000 + 110 \times 20.000 + 20 \times 44.000 + 50 \times 106.000 + 30 \times 6.000 + 100 \times 14.000 + 120 \times 60.000 + 140 \times 83.000 = 36.780.000 \text{ €}$$

Abbiamo ottenuto in questo modo la prima ***soluzione ammissibile di base***, che tuttavia non è detto sia ottima. Per verificarlo, è necessario utilizzare il *metodo dello stepping stone*, che consiste nel calcolare i *costi marginali unitari* $\Delta_{i,k}$, ossia le variazioni di costo che avremo incrementando di un'unità una casella e conseguentemente variando anche le altre per rispettare i vincoli, per tutte le caselle rimaste vuote (dette *caselle acqua*, mentre quelle non nulle sono dette *caselle sasso*, da cui il nome del metodo).

I costi marginali unitari sono i seguenti:

Δ_{1R} = 140 - 110 - 100 + 210 = 140 €

dove Δ_{1R} corrisponde alla variazione sul costo finale che avremo inviando un'auto da Mirafiori a Bologna invece che a Firenze, e di conseguenza inviando, da Melfi, un'auto a Firenze invece che a Bologna per il rispetto dei vincoli (e così sarà anche per i Δ seguenti).

Δ_{1N} = 170 - 110 - 30 + 100 = 130 €
Δ_{1B} = 120 - 110 - 140 + 120 = -10 €
Δ_{2M} = 180 - 80 - 20 + 170 = 250 €
Δ_{2R} = 70 - 100 - 20 + 60 = 10 €
Δ_{2F} = 110 - 50 - 140 + 100 = 20 €
Δ_{2B} = 120 - 20 - 140 + 60 = 20 €
Δ_{3M} = 160 - 80 - 50 + 140 = 170 €
Δ_{3F} = 100 - 50 - 120 + 100 = 30 €
Δ_{3B} = 110 - 50 - 140 + 100 = 20 €
Δ_{4M} = 210 - 80 - 140 + 120 = 110 €
Δ_{4N} = 60 - 140 - 20 + 120 = 20 €

Δ_{1B} risulta essere negativo, il che significa che la *soluzione ammissibile di base* è migliorabile. Procediamo dunque a compilare nuovamente la tabella attribuendo alla casella corrispondente (quella sottostante a c_{1B}) la massima disponibilità possibile modificando le quattro caselle prese in considerazione da Δ_{1B} e sempre nel rispetto dei vincoli:

	Milano	**Roma**	**Napoli**	**Firenze**	**Bologna**	
S_1	$c_{1M} = 80$	$c_{1R} = 140$	$c_{1N} = 170$	$c_{1F} = 110$	$c_{1B} = 120$	120.000
Mirafiori	100.000				20.000	unità
S_2	$c_{2M} = 180$	$c_{2R} = 70$	$c_{2N} = 20$	$c_{2F} = 110$	$c_{2B} = 120$	44.000
Pomigliano			44.000			unità
S_3	$c_{3M} = 160$	$c_{3R} = 50$	$c_{3N} = 30$	$c_{3F} = 100$	$c_{3B} = 110$	112.000
Cassino		106.000	6.000			unità
S_4	$c_{4M} = 210$	$c_{4R} = 100$	$c_{4N} = 60$	$c_{4F} = 120$	$c_{4B} = 140$	157.000
Melfi		14.000		80.000	63.000	unità
	100.000 unità	120.000 unità	50.000 unità	80.000 unità	110.000 unità	

La nuova soluzione è quindi la seguente:

$$z = 80 \times 100.000 + 120 \times 20.000 + 20 \times 44.000 + 50 \times 106.000 + 30 \times 6.000 + 100 \times 14.000 + 120 \times 60.000 + 140 \times 83.000 = 36.580.000 \text{ €}$$

Per verificare che sia effettivamente la soluzione ottimale, calcoliamo i nuovi costi marginali unitari:

Δ_{1R} = 140 - 110 - 100 + 210 = 140 €
Δ_{1N} = 170 - 110 - 30 + 100 = 130 €
Δ_{1F} = 110 - 120 - 120 + 140 = 10 €
Δ_{2M} = 180 - 80 - 20 + 170 = 250 €
Δ_{2R} = 70 - 100 - 20 + 60 = 10 €
Δ_{2F} = 110 - 50 - 140 + 100 = 20 €
Δ_{2B} = 120 - 20 - 140 + 60 = 20 €
Δ_{3M} = 160 - 80 - 50 + 140 = 170 €
Δ_{3F} = 100 - 50 - 120 + 100 = 30 €
Δ_{3B} = 110 - 50 - 140 + 100 = 20 €
Δ_{4M} = 210 - 80 - 140 + 120 = 110 €
Δ_{4N} = 60 - 140 - 20 + 120 = 20 €

Tutte le variazioni calcolate risultano positive, la soluzione trovata risulta dunque essere la ***soluzione ottimale***. Mirafiori invierà 100.000 auto a Milano e 20.000 a Bologna, Pomigliano invierà le sue 44.000 auto a Napoli, Cassino 106.000 a Roma e 6.000 a Napoli, ed infine Melfi ne invierà 14.000 a Roma, 80.000 a Firenze e 63.000 a Bologna, per un costo complessivo di 36.580.000 €.