METODO DEL SIMPLESSO

a cura di Collodet Alberto e Dalto Nicola
Realizzato nell'ambito del ***progetto Archimede***
con la supervisione dei
Proff. Fabio Breda, Francesco Cardano, Alessandro Carraro, Valentina Fabbro, Francesco Zampieri
I.S.I.S.S. M.Casagrande, Pieve di Soligo, a.s. 2013/14

ABSTRACT

In questo articolo tratteremo del Metodo del Simplesso, ovvero una modalità con la quale risolvere i problemi di programmazione lineare in n variabili.

§1. INTRODUZIONE

Il problema di programmazione lineare in n variabili, consiste nel determinare l'ottimo (massimo o minimo) di una funzione lineare di n variabili, soggetto a vincoli espressi da equazioni o da disequazioni lineari, oltre ai vincoli di segno. Esistono diverse modalità per risolvere un problema di questo tipo, ma noi ci occuperemo del Metodo del Simplesso.

Prima di introdurlo, è necessario riprendere alcuni concetti sulle matrici e sul metodo algebrico dal quale deriva.

§2. MATRICI

Definizione: *detti m e n due numeri naturali e considerati $m \cdot n$ numeri reali, si chiama* ***matrice*** *(rettangolare) di tipo (m, n) l'insieme degli $m \cdot n$ numeri considerati, disposti ordinatamente su m righe orizzontali e su n colonne verticali.*

Un sistema di equazioni può essere rappresentato sotto forma di matrice (esiste quindi, un legame fra i sistemi e le matrici espresso dal teorema di Rouche' - Capelli). Questo permette di caratterizzare l'insieme delle soluzioni di un sistema di equazioni lineari mediante il rango delle matrici.

Definizione: *Da una matrice qualsiasi può essere estratta una sottomatrice, ovvero una matrice con il numero di righe e di colonne minore rispetto alla matrice di partenza.*

Definizione: *Il* ***rango*** *di una matrice A è l'ordine della massima sottomatrice con determinante non nulla estratta da A.*

Ora enunciamo il teorema:

Teorema di Rouche' - Capelli : *un sistema lineare ammette soluzioni se e solo se il rango della matrice completa è uguale al rango della matrice incompleta.*

§3. METODO ALGEBRICO

Il metodo algebrico è la modalità prima per risolvere un problema di programmazione lineare. Impostato il problema, si procede a trasformare il sistema dei vincoli in un sistema di tutte equazioni, introducendo, una per disequazione, delle nuove variabili ausiliari, non negative, dette **variabili aggiunte** o **variabili di scarto**. In tal modo il sistema degli m vincoli acquista la forma normale o forma canonica.

Si tratta di un sistema lineare di m equazioni nelle $(n + m)$ incognite.

Considerando la matrice associata a tale sistema, se il rango della matrice incompleta e quello della matrice completa del sistema sono entrambi uguali a m, per il teorema di Rouchè - Capelli, il sistema ammette soluzioni.

Si prendono m incognite in modo che il determinante dei loro coefficienti sia diverso da zero e alle altre n incognite si attribuiscono valori arbitrari; in tal modo si viene a ottenere un sistema di m equazioni in m incognite; risolto tale sistema, gli m valori trovati più n valori arbitrari attribuiti alle altre incognite formano una soluzione del sistema.

Una soluzione del sistema ottenuta in questo modo, nella quale almeno n delle incognite hanno il valore zero, se soddisfa la condizione di non negatività, è detta **soluzione ammissibile** o **di base**.

Ogni soluzione di base del sistema è dunque una soluzione del sistema stesso, comprendente n valori ed m valori non negativi: cioè almeno n variabili risultano nulla e le altre sono positive.

Si dimostra, infatti, il seguente teorema, che ci limitiamo ad enunciare:

Teorema: *se un problema di programmazione lineare ammette soluzioni ottimali tra queste c'è sempre una soluzione di base.*

La soluzione ottimale del problema sarà ogni soluzione di base che ottimizza la funzione obiettivo u, nel senso voluto (e cioè la rende minima o massima).

Quando, all'interno del problema di programmazione lineare, il numero delle variabili messe in gioco non permette di utilizzare il metodo algebrico, il procedimento di cui ci si serve maggiormente, poichè facilita i calcoli, è quello del simplesso, ideato dall'americano George Dantzig nel 1947.

§4. METODO DEL SIMPLESSO

La funzione che va minimizzata o massimizzata è detta funzione **obbiettivo**, cioè la funzione di partenza che noi andremo a determinare. Quindi l'obiettivo della risoluzione di un tale problema è trovare tra le soluzioni che soddisfino i vincoli, quella ottimale.

Il primo passo del metodo del simplesso consiste nella trasformazione di ogni disequazione lineare, i vincoli, in equazioni attraverso l'utilizzo di variabili aggiunte sempre positive, passando così a un sistema di equazioni.

A questo punto il sistema di equazioni viene reso attraverso le matrici incompleta e completa di cui calcoleremo i ranghi. Se le matrici completa e incompleta hanno rango uguale allora il sistema è compatibile, cioè ammette delle soluzioni.

Esprimiamo le variabili aggiunte in funzione di quelle di base ponendole uguali a zero. In questo modo otteniamo la prima soluzione ammissibile del sistema di equazioni, e poi ripetendo il procedimento si determinano le altre soluzioni di base. Infine si sceglie la soluzione che soddisfa maggiormente la funzione.

Illustriamo con un esempio il metodo del simplesso.

PROBLEMA. Un'azienda produttrice di televisori decide di produrre due diversi tipi di elettrodomestici, A e B, a seconda delle dimensioni e del colore. La massima produzione consentita è di 800 televisori. Il numero di televisori del tipo A deve essere superiore di 100 al tipo B. Un televisore del tipo A richiede per l'assemblaggio 40 minuti di lavoro e viene venduto a 200€, mentre un televisore del tipo B, che richiede invece 45 minuti, viene venduto a 150€. Sapendo che le ore lavorative mensili a disposizione sono 650, determiniamo il numero di televisori dei due tipi che deve produrre per raggiungere il massimo utile.

Se indichiamo con x_1 A e con x_2 B, otteniamo il seguente modello. Massimizzare la funzione:

$$z = 200x_1 + 150x_2$$

sotto i vincoli:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 800 \\ 40x_1 + 45x_2 \leq 39000 \\ x_1 - x_2 \leq 100 \end{cases}$$

Introduciamo le variabili aggiunte (positive, per poter ottenere l'uguaglianza) e risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 800 \\ 40x_1 + 45x_2 + x_4 = 39000 \\ x_1 - x_2 + x_5 = 100 \end{cases}$$

Scriviamo le matrici incompleta e completa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 40 & 45 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 40 & 45 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 800 \\ 39000 \\ 100 \end{bmatrix}$$

Il rango delle matrici, completa e incompleta, è uguale a tre, pertanto ne segue che il sistema di equazioni precedente è compatibile, e che tre variabili di base possono essere espresse in funzione delle due variabili libere.

$$\begin{cases} x_3 = -x_1 - x_2 + 800 \\ x_4 = -40x_1 - 45x_2 + 39000 \\ x_5 = -x_1 + x_2 + 100 \end{cases}$$

Ora, per $x_1 = 0$ e per $x_2 = 0$, le variabili di base assumono i seguenti valori.

$$x_3 = 800,\ x_4 = 39000,\ x_5 = 100$$

Così facendo troviamo la prima soluzione ammissibile del sistema di disequazioni: per la soluzione trovata, la funzione z è nulla: $z_1 = 0$. Proviamo ora ad aumentare il valore z_1. Considerando il sistema di equazioni con le variabili libere, notiamo che, tenendo $x_2 = 0$, x_1 può essere aumentato fino a cento. Così facendo $z_2 = 20000$, infatti abbiamo le seguenti soluzioni: (100, 0, 700, 35000, 0) Successivamente, prendiamo come variabili libere x_2 e x_5, cioè le variabili che nella nuova soluzione trovata sono nulle. A tale scopo, dall'ultima equazione del sistema si ottiene $x_1 = 100 + x_2 - x_5$ e quindi si ha:

$$\begin{cases} x_3 = -2x_2 + x_5 + 700 \\ x_4 = -95x_2 + 40x_5 + 35000 \\ x_1 = 100 + x_2 - x_5 \end{cases}$$

con $z = 350x_2 - 200x_5 + 20000$.

Per far crescere il valore di z, aumentiamo x_2 dato che il suo coefficiente è positivo e teniamo sempre $x_5 = 0$: quindi aumentiamo il valore di x_2 fino a 350 che è il valore massimo oltre il quale x_3 assume un valore negativo. Sotto questa condizione otteniamo la nuova soluzione ammissibile:
(100, 350, 0, 1750, 0) e quindi $z_2 = 124500$.

Adesso, esprimiamo un nuovo sistema attraverso le variabili libere x_5 e x_3, che nel soluzione precedente erano nulle.

$$\begin{cases} x_2 = \frac{x_5}{2} - \frac{x_3}{2} + 350 \\ x_4 = \frac{15}{2}x_5 - \frac{95}{2}x_3 + 68250 \\ x_1 = 450 - \frac{x_5}{2} - \frac{x_3}{2} \end{cases}$$

Dato che x_3 e x_5 hanno coefficiente negativo, il valore massimo di x_1 lo si ottiene quando x_5 e x_3 sono nulli.

Ciò vuol dire che la soluzione (100, 350, 0, 1750, 0) è ottimale e che: $z_{max} = 124500$.