



GLI SPETTRI ATOMICI



Misura di lunghezze d'onda delle righe spettrali dell'idrogeno e verifica della legge di Balmer

A cura di Carniel Chiara, Dal Colle Marlene, Guarnieri Filippo, Lorenzon Altea, Lucchetta Jessica, Mazzucco Beatrice, Merotto Lorenzo, Padoin Francesca, Rebeschini Leonardo, Spadetto Matteo, Spina Benedetta, Zanin Pietro

Realizzato nell'ambito del **Progetto Archimede**
con la supervisione dei Proff. F.M.Cardano, A.Carraro, F.Zampieri
I.S.I.S.S. M.Casagrande, Pieve di Soligo, Dicembre 2013

Sommario

Scopo del presente lavoro è stato quello di mettere in relazione i fenomeni di emissione luminosa da parte di una sorgente artificiale con la struttura atomica della materia, evidenziando in particolare la presenza dei livelli energetici atomici. Nello specifico, in questa esperienza abbiamo misurato, tramite uno spettrometro a prisma, la lunghezza d'onda di tre righe di emissione dello spettro dell'idrogeno prodotto da un tubo di Plucker. Le lunghezze d'onda ottenute sono state utilizzate per dare una spiegazione dei meccanismi atomici di emissione attraverso la verifica della legge di Balmer.

1 Cenni teorici

Il fenomeno dell'emissione luminosa da parte di sorgenti artificiali viene sperimentato quotidianamente ogni qualvolta utilizziamo delle lampade a scarica o a fluorescenza, quali possono essere per esempio dei tubi al neon. Questo tipo di sorgenti consistono in tubi di vetro in cui è presente un gas a bassa pressione. Due elettrodi vengono collocati alle estremità e collegati ad un generatore di tensione. In seguito al passaggio di una corrente, gli atomi del gas presente nel tubo emettono una particolare radiazione elettromagnetica, percepita dai nostri organi di senso come luce visibile.

1.1 Gli spettri atomici

Una caratteristica della luce è il colore, una sensazione ottica interpretata da alcune cellule poste sulla retina che dipende dalla frequenza ν ovvero dalla lunghezza d'onda λ della radiazione stessa. Esiste quindi una corrispondenza fra la lunghezza d'onda della radiazione ed il colore percepito. L'occhio umano è sensibile ad un certo intervallo di lunghezze d'onda $\Delta\lambda$, detto finestra ottica, che va da un minimo di $\lambda_{min} \simeq 400 \text{ nm}$ corrispondente al colore violetto, ad un massimo di $\lambda_{max} \simeq 700 \text{ nm}$, che invece corrisponde al colore rosso.

La diversa colorazione della luce riflette necessariamente la natura del gas che la produce, cosicchè ogni lampada emetterà una luce di colore diverso a seconda del gas contenuto in essa.

Tale fenomeno si può osservare in laboratorio usando un tubo di Plucker (si veda figura1), consistente fondamentalmente in ampolla di vetro con due elettrodi, connessi ad una elevata differenza di potenziale (dell'ordine di $3 \div 4 \text{ KV}$). Si possono così osservare le particolari colorazioni della luce emessa da gas diversi. In questa esperienza abbiamo osservato la luce emessa da diversi gas: idrogeno molecolare, ossigeno molecolare, argon, neon, elio.

Benchè l'occhio percepisca la radiazione luminosa di un unico colore, quasi sempre non facile da definire in quanto estremamente soggettivo, è noto che la radiazione emessa dal gas non è monocromatica, ma è

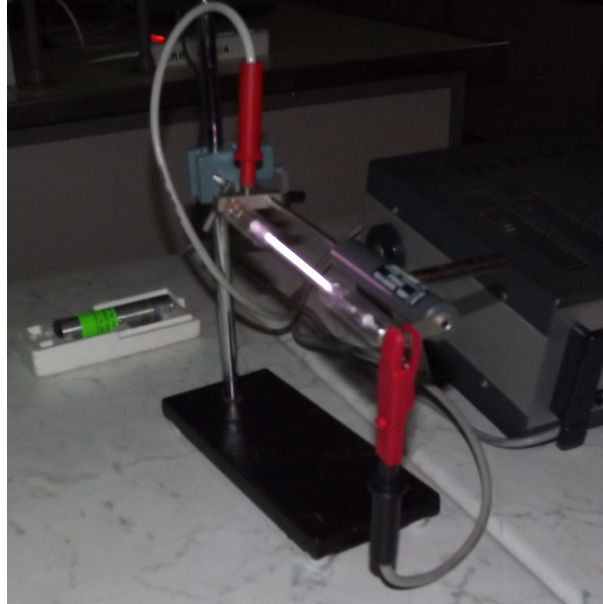


Figura 1: Fotografia del tubo di Plucker. In evidenza i collegamenti al generatore, posizionato sulla destra, e la colorazione rosa-violetta della luce, emessa in questo caso dal gas H_2 .

somma di più componenti spettrali, ciascuna con una ben precisa lunghezza d'onda. In tal modo, la luce che ci appare bianca è in realtà somma di più componenti colorate.

Sussiste comunque la possibilità di separare ciascuna componente di un fascio di luce policromatica sfruttando il fenomeno della dispersione della luce. È infatti noto che l'indice di rifrazione di un materiale trasparente dipende dalla lunghezza d'onda, cosicchè raggi di lunghezza d'onda differente, appartenenti ad un unico fascio che incide con un angolo θ_i , sono caratterizzati da diversi angoli di rifrazione $\theta_r(\lambda)$: in particolare vengono rifratti con angoli maggiori le lunghezze d'onda minori come illustrato in figura 2.

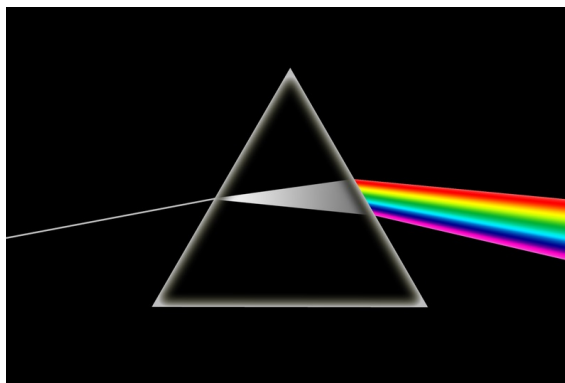


Figura 2: Illustrazione del fenomeno della dispersione della luce attraverso un prisma. Il fascio policromatico incide con un certo angolo e le varie componenti spettrali diversamente colorate sono rifratte ad angoli diversi dipendenti dalla loro lunghezza d'onda.

La legge che lega il valore dell'indice di rifrazione alla lunghezza d'onda della luce, la cosiddetta *relazione di dispersione*, è caratterizzata dal fatto di non essere analitica ma empirica ed in generale dipendente dalla natura del materiale.

Facendo passare quindi un fascio di luce emessa da un gas eccitato attraverso un mezzo disperdente come ad esempio un prisma di vetro sarà possibile osservare le diverse componenti spettrali della luce. Ad esempio in figura 3 si nota come la luce bianco-rosata emessa dall' H_2 si presenta dispersa secondo una banda policromatica solcata da alcune righe più luminose, dette *righe di emissione*.

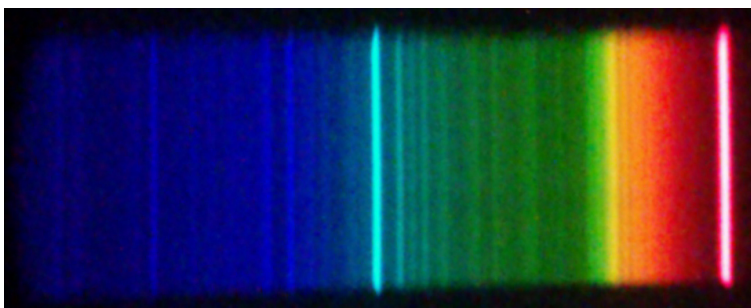


Figura 3: Fotografia dello spettro di emissione dell' H_2 (tubo di Plucker). In evidenza le due righe spettrali $H - \alpha$ (a destra), $H - \beta$ (al centro) e le righe del violetto, tra cui $H - \gamma$ (a sinistra).

L'insieme delle bande e delle righe osservate grazie alla dispersione di un mezzo prende il nome di *spettro atomico* (di emissione). Ogni spettro si caratterizza per:

- la presenza di determinate righe, che si possono osservare isolate (nel caso di gas monoatomici estremamente rarefatti) o sovrapposte ad una banda colorata detta *continuo* (caratteristica dei gas poliatomici e dei solidi incandescenti);
- la posizioni delle righe, ognuna corrispondente ad una ben precisa lunghezza d'onda, che non risultano equidistanziate, ma addensate in diverse *serie*.

Ovviamente il tipo di spettro dipende dalla sostanza che lo emette, oltre che dalla temperatura (lo stesso gas a temperature diverse è caratterizzato da un spettro di aspetto diverso).

1.2 Spettri e struttura atomica discreta

Dato che ogni riga spettrale è associata ad una precisa lunghezza d'onda, dalla misura delle varie componenti si possono ricavare informazioni circa i fenomeni che sono legati a questa emissione, in particolare alla luce del fatto che la radiazione elettromagnetica è caratterizzata da una precisa relazione fra energia e lunghezza d'onda.

Tale relazione, dovuta a A. Einstein a proposito della sua interpretazione dell'effetto fotoelettrico, ma riferentesi anche ai lavori di M. Planck, è espressa dalla celebre equazione

$$E = h \cdot \nu, \quad (1)$$

dove E è l'energia trasportata dall'onda, $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ è la *costante di Planck* e ν è la frequenza della radiazione emessa.

In particolare, l'emissione di radiazione visibile da parte dell'atomo è dovuta ai processi di oscillazione delle sue cariche elettriche. La presenza di righe discrete nello spettro è quindi indice della natura discreta della distribuzione dell'energia all'interno dell'atomo, nel senso che, conformemente al modello atomico di Bohr, gli elettroni si collocano su diversi livelli energetici, a distanze differenti dal nucleo, caratterizzate da una diversa energia potenziale elettrostatica, detta *energia di legame*.

Quando l'atomo riceve energia questa viene assorbita da un'elettrone, inizialmente collocato su un certo livello caratterizzato dall'energia E_0 , e se la quantità assorbita E corrisponde almeno alla differenza fra un livello superiore e quello di partenza ($E = \Delta E = E_f - E_0$), subisce un *salto quantico*, portandosi sul nuovo livello, detto *stato eccitato*. Lo stato eccitato si rivela però instabile decadendo con tempi

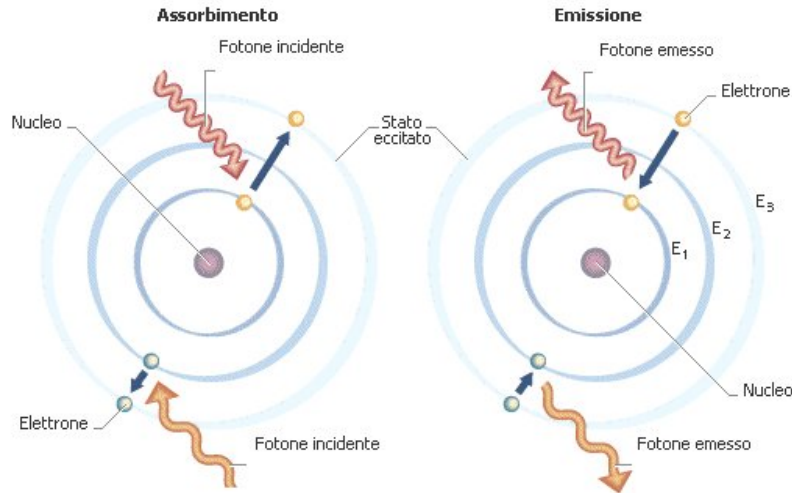


Figura 4: Rappresentazione schematica dei meccanismi di assorbimento ed emissione della radiazione elettromagnetica a livello atomico. Salti quantici più lunghi sono associati a radiazione di maggior frequenza e viceversa.

dell'ordine dei 10^{-8} s, e l'elettrone ritorna allo stato fondamentale emettendo un'onda elettromagnetica di frequenza $\nu = E/h$ come illustrato in figura 4.

Ogni riga spettrale risulta quindi associata ad un determinato salto quantico dell'elettrone e quindi ad un preciso livello energetico caratterizzato da un valore del numero quantico principale n . Dato che le righe non sono equidistanziate, come si evince facilmente osservando ad esempio lo spettro di emissione dell'idrogeno (il più semplice), ne consegue che la distribuzione dei livelli non è omogenea.

Questo significa inoltre che non vi sarà una correlazione lineare fra il numero della riga e la sua lunghezza d'onda, ma la relazione sarà più complessa. Una nota legge che lega il numero della riga alla corrispondente lunghezza d'onda per la serie di righe osservate nello spettro dell'idrogeno è quella trovata empiricamente da J.Balmer

$$\lambda = B \cdot \left(\frac{m^2}{m^2 - 4} \right), \quad (2)$$

dove λ indica la lunghezza d'onda della riga, m è un valore intero maggiore di 2 che corrisponde al suo numero, e il coefficiente $B = 364,56 \text{ nm}$ è detto *costante di Balmer*. Il valore 4 al denominatore si riferisce al fatto che lo stato fondamentale è identificato dal numero quantico principale $n = 2$, ossia le transizioni che danno luogo alla serie di Balmer hanno come livello di partenza quello caratterizzato dal numero quantico $n = 2$.

Nel 1888 il fisico J.Rydberg propose una relazione più generica valida per tutte le righe osservabili per lo spettro dell'idrogeno

$$\frac{1}{\lambda} = R \cdot \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right), \quad (3)$$

dove n è il numero quantico principale del livello fondamentale, m quello del livello eccitato che corrisponde al numero della riga osservata, e il coefficiente $R = 1097 \text{ nm}^{-1}$ è detto *costante di Rydberg*. Ponendo $n = 2$ si ritrova la *formula di Balmer* (2) con il vantaggio di avere una relazione lineare fra $1/\lambda$ e $1/m^2$.

Un ulteriore vantaggio della (3) è che i valori forniti della *formula di Rydberg* risultano direttamente proporzionali all'energia dei corrispondenti salti quantici. Infatti, ricordando anche la formula di Einstein

(1) e la relazione esistente tra frequenza ν e lunghezza d'onda λ , si ottiene che

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = hcR \cdot \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right),$$

dove $c = 2,9979 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ rappresenta la *velocità della luce nel vuoto*.

Considerando ad esempio le prime tre righe della *serie di Balmer* (si veda figura 3), si ottengono energie dell'ordine di $E \simeq (3 \div 5) \cdot 10^{-19} \text{ J} \simeq (2 \div 3) \text{ eV}$.

L'obiettivo del nostro lavoro sarà quindi quello di misurare la lunghezza d'onda di ciascuna riga spettrale della serie di Balmer e verificare:

- la dipendenza quadratica della lunghezza d'onda dall'ordine m della riga, secondo la formula di Rydberg (3);
- la consistenza delle stime delle due costanti R e B con i rispettivi valori di riferimento.

2 Misura sperimentale

Per la misurazione delle lunghezze d'onda dello spettro dell'idrogeno abbiamo fatto uso di uno spettrometro a prisma. Nella fattispecie è stato utilizzato uno spettrometro modello Kruss, fornito di una fenditura collimatrice di forma rettangolare ad apertura regolabile, un cannocchiale con lente obiettivo, un prisma in vetro ottico di natura non specificata, ed un secondo cannocchiale provvisto di lente oculare. L'oculare può ruotare attorno all'asse centrale, consentendo di visualizzare il fascio rifratto e, con l'aiuto di una croce presente sull'oculare, di centrare le singole righe spettrali.

Lo spettrometro presenta una scala graduata goniometrica che consente, anche con l'aiuto di un nonio (si veda figura 5), di misurare gli angoli di riflessione con una sensibilità di 1 secondo d'arco.



Figura 5: Fotografia in dettaglio del nonio laterale dello strumento.

Come sorgente luminosa è stato utilizzato un tubo di Plucker contenente idrogeno molecolare, alimentato da un generatore di tensione variabile impostato sul valore di circa 3.500 V . Essendo la sorgente luminosa particolarmente estesa, allo scopo di collimare il fascio di luce emesso, si è proceduto a schermarlo con del nastro adesivo nero, come illustrato in figura 6.

Abbiamo proceduto preliminarmente alla taratura del sistema senza il prisma, ruotando la scala goniometrica in modo da far coincidere lo zero strumentale con lo zero su uno dei due noni laterali secondo la direzione di arrivo dei raggi incidenti.

Con l'aiuto di due squadre, è stato quindi posizionato il prisma in modo che la direzione del fascio incidente formasse un angolo di incidenza θ_i pari all'apertura α del prisma, che mediante una misura diretta eseguita con un goniometro è risultato essere $(60 \pm 1)^\circ$.

Spostandosi lateralmente mediante il meccanismo di rotazione del cannocchiale oculare si è quindi trovata inizialmente la posizione in cui si visualizzava lo spettro rifratto.



Figura 6: Fotografia dello spettrometro: in evidenza anche la sorgente luminosa schermata.

Per misurare la posizione angolare delle singole righe spettrali, è stato infine collocato il centro della croce presente sul cannocchiale oculare in coincidenza con ciascuna riga, leggendo quindi l'angolo di rotazione mediante il nonio laterale.

Al termine della procedura di misurazione, disponiamo quindi dei valori dell'angolo di rifrazione θ_r , corrispondenti alle tre righe spettrali, riportati in tabella 1.

riga	colore	θ_i ($^\circ$)	θ_r ($^\circ$)	ε_θ ($^\circ$)
$H - \alpha$	rosso	60	48,40	0,02
$H - \beta$	ciano		49,88	
$H - \gamma$	viola		50,34	

Tabella 1: Angoli di rifrazione misurati in corrispondenza alle tre righe spettrali osservate.

3 Analisi dei dati

La misura diretta effettuata con lo spettrometro ha fornito i tre valori dell'angolo di rifrazione θ_r per le righe spettrali $H - \alpha$, $H - \beta$ e $H - \gamma$.

Sarà ora necessario ricavare, mediante un'opportuna relazione di dispersione, i corrispondenti valori delle lunghezze d'onda λ_α , λ_β e λ_γ .

3.1 Determinazione degli indici di rifrazione del prisma per le righe spettrali osservate

Il primo passo necessario per determinare le lunghezze d'onda delle righe spettrali dagli angoli di rifrazione misurati è quello di ricavare la relazione fra questi ultimi e i corrispondenti indici di rifrazione del prisma.

Sappiamo che l'angolo di rifrazione dipende dall'indice di rifrazione del materiale tramite la celebre relazione espressa dalla *legge di Cartesio-Snell*:

$$n_1 \cdot \sin \theta_1 = n_2 \cdot \sin \theta_2. \quad (4)$$

Nel caso del prisma avvengono però due rifrazioni, la prima dall'aria al vetro e la seconda dal vetro all'aria, per cui sarà necessario applicare due volte la (4) tenendo conto della relazione esistente fra gli angoli di rifrazione/incidenza all'interno del prisma. Nella figura 7 è rappresentato uno schema della situazione descritta, in cui:

- $\theta_1 = \theta_i$ è l'angolo di incidenza della luce proveniente dalla lampada;
- θ_2 è l'angolo della prima rifrazione interna al prisma;
- θ_3 è l'angolo di incidenza sulla seconda faccia del prisma;
- $\theta_4 = \theta_r$ è l'angolo di rifrazione finale che è stato misurato;
- $n_1 = 1,000277$ è l'indice di rifrazione dell'aria in *condizioni standard di temperatura e pressione*¹ (cfr. Wikipedia.org);
- n_2 è l'indice di rifrazione del materiale di cui è composto il prisma.

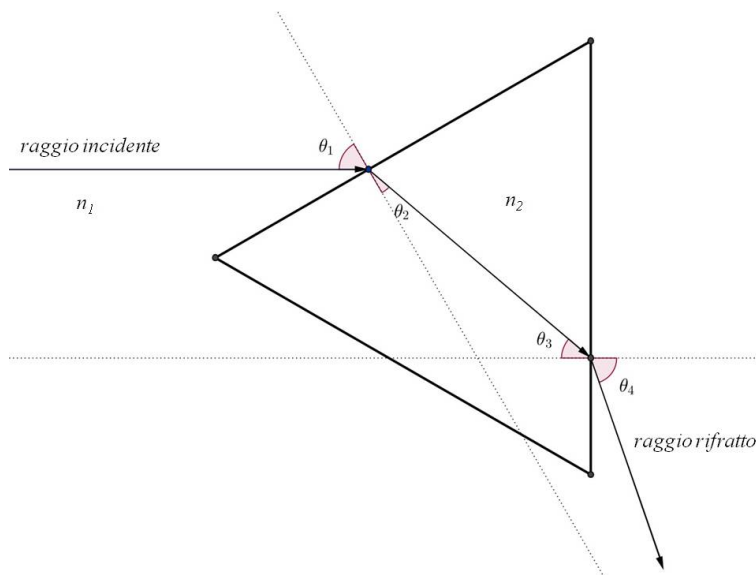


Figura 7: Rappresentazione geometrica del processo di rifrazione all'interno del prisma; si noti che in base all'orientamento scelto, $\theta_1 = 60^\circ$ e $\theta_2 + \theta_3 = 60^\circ$

Facendo riferimento alla notazione adottata, si ottiene quindi:

$$\begin{cases} n_1 \cdot \sin \theta_1 = n_2 \cdot \sin \theta_2 & (5a) \\ \theta_3 = 60^\circ - \theta_2 & (5b) \\ n_2 \cdot \sin \theta_3 = n_1 \sin \theta_4 & (5c) \end{cases}$$

Per risolvere il sistema risulta conveniente porre $n_1 \cdot \sin \theta_1 = k_1$ e $n_1 \cdot \sin \theta_4 = k_2$. Dividendo quindi membro a membro le relazioni (5a) e (5c), e ricordando la (5b), si ricava che

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{\sin \theta_2}{\sin (60^\circ - \theta_2)}.$$

¹Per condizioni standard di temperatura e pressione (STP) si intendono $T = 15^\circ C$ e $P = 1Atm$.

Attraverso semplici passaggi si ottiene quindi il primo angolo di rifrazione come

$$\theta_2 = \arctan \frac{k_1 \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot k_2 + k_1}$$

o, ricordando le posizioni fatte e semplificando l'indice di rifrazione n_1 :

$$\theta_2 = \arctan \frac{\sqrt{3} \cdot \sin \theta_1}{2 \cdot \sin \theta_4 + \sin \theta_1}.$$

Invertendo infine la (5a) e sostituendo l'angolo di rifrazione ottenuto si ricava che:

$$n_2 = \frac{n_1 \cdot \sin \theta_1}{\sin \left[\arctan \left(\frac{\sqrt{3} \cdot \sin \theta_1}{\sin \theta_1 + 2 \cdot \sin \theta_4} \right) \right]}. \quad (6)$$

Utilizzando la relazione (6) si sono quindi determinati i valori dell'indice di rifrazione n_2 del prisma corrispondenti agli angoli di rifrazione θ_4 misurati. I risultati ottenuti sono riportati in tabella 2 insieme all'incertezza sperimentale determinata attraverso la propagazione dell'errore di misura dell'angolo².

riga	θ_1 (°)	θ_4 (°)	ε_θ (°)	n_1	n_2	ε_n
$H - \alpha$	60	48,40	0,02	1,000277	1,616	0,007
$H - \beta$		49,88			1,632	
$H - \gamma$		50,34			1,637	

Tabella 2: Valori degli indici di rifrazione corrispondenti agli angoli di uscita misurati, corredati dell'incertezza sperimentale. Gli errori ottenuti per le diverse righe spettrali sono risultati in buona approssimazione costanti e si è quindi riportato un unico valore.

3.2 Stima della risposta del prisma e delle lunghezze d'onda delle righe spettrali

La relazione di dispersione, che lega le lunghezze d'onda λ delle righe spettrali agli indici di rifrazione n ottenuti, è una caratteristica del materiale. A questo punto si è quindi reso necessario stimare la risposta del prisma utilizzato.

A tal fine sono state innanzi tutto misurate la massa m e le dimensioni lineari (l'altezza h della faccia triangolare e lo spessore s) del prisma, e tramite queste è stata ottenuta la sua densità come illustrato in tabella 3. La densità e gli indici di rifrazione ottenuti in tabella 2 sono risultati compatibili con le proprietà del vetro FLINT a media densità di tipo F2 (cfr. Wikipedia.org).

m (g)	ε_m (g)	h (mm)	s (mm)	ε_l (mm)	V (cm ³)	ε_V (cm ³)	ρ (g/cm ³)	ε_ρ (g/cm ³)
> 38,65	> 0,01	29,75	21,95	0,05	11,22	0,06	> 3,45	> 0,02

Tabella 3: Calcolo della densità del prisma. Si noti che, dato che il prisma utilizzato presentava una leggera scheggiatura, la densità ottenuta e la rispettiva incertezza rappresentano solo dei limiti inferiori rispetto ai valori veri.

Per mezzo di una *applet* presente sul *database online* refractiveindex.info sono quindi stati tabulati, per due tipologie di vetro FLINT F2 di differenti produttori (SCHOTT e NHG), gli indici di rifrazione corrispondenti a lunghezze d'onda nell'intervallo (365 ÷ 715) nm. Gli indici di rifrazione n ottenuti per i due materiali sono riportati nel grafico in figura 8 in funzione delle corrispondenti lunghezze d'onda λ .

²Per i dettagli della propagazione degli errori si veda l'Appendice A.

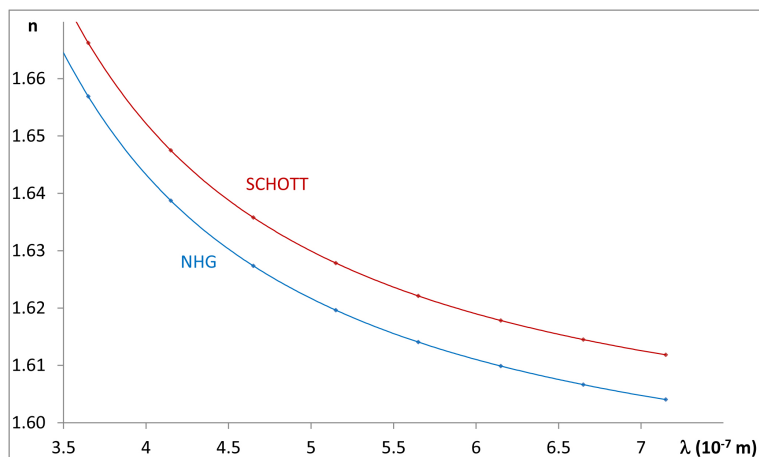


Figura 8: Curve di dispersione per le due tipologie di vetro in esame. Non conoscendo l'esatta natura del materiale, tutta la banda compresa fra le due curve contiene valori compatibili col prisma utilizzato.

A causa della persistente incertezza sulla precisa natura del prisma utilizzato, si è a questo punto reso necessario stimare una relazione di dispersione che fornisca una curva di risposta media, esprimendo al contempo l'indeterminazione esistente sotto forma di un errore sperimentale.

A tal fine si è inizialmente verificato che le relazioni di dispersione rispettassero la cosiddetta *legge di Cauchy approssimata*

$$n^2 = \frac{a}{\lambda^2} + b \quad (7)$$

elaborando un nuovo grafico (figura 9) che riporta l'andamento in buona approssimazione lineare di n^2 in funzione di $1/\lambda^2$.

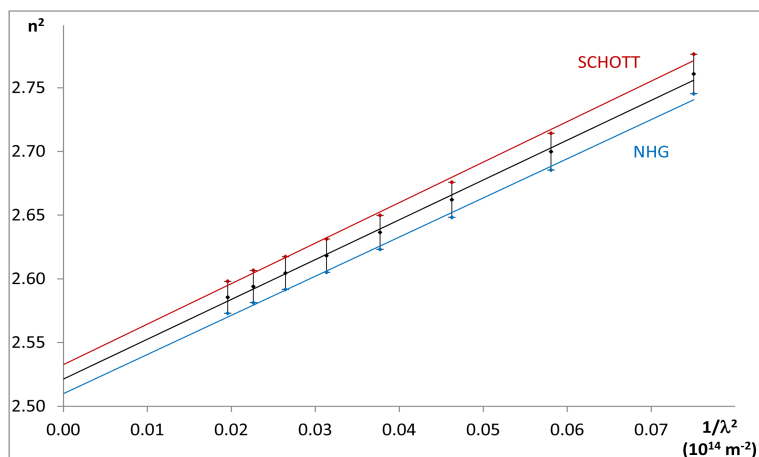


Figura 9: Nel grafico sono riportati per i due materiali i valori di n^2 in funzione di $1/\lambda^2$. Si può notare che la linearità è buona in entrambi i casi. Considerando per ogni λ un n^2 medio ed una barra di errore data dalla semidispersione dei valori, si ottiene la retta intermedia che rappresenta la relazione di dispersione cercata.

Le rette in figura 9 sono state ottenute eseguendo *fit* lineari col metodo dei minimi quadrati³. In

³Per i dettagli sulla procedura di *fit* si veda l'Appendice B.

particolare, considerando per ogni λ un n^2 medio con incertezza data dalle semidisersione dei due valori, sono stati ricavati i coefficienti a e b della (7) con i rispettivi errori.

La pendenza e l'intercetta ricavate sono infine state utilizzate per determinare le lunghezze d'onda corrispondenti agli indici di rifrazione ottenuti, invertendo la relazione (7):

$$\lambda = \sqrt{\frac{a}{n^2 - b}}. \quad (8)$$

I risultati sono riportati in tabella 4 con le relative incertezze⁴, mentre lo spettro di emissione ottenuto è rappresentato in figura 10, insieme a quello atteso.

riga	n	ε_n	a ($10^{-14}m^2$)	ε_a ($10^{-14}m^2$)	b	ε_b	λ ($10^{-7}m$)	ε_λ ($10^{-7}m$)
$H - \alpha$	1,616	0,007	3,1	0,3	2,52	0,01	5,9	0,7
$H - \beta$	1,632						4,7	0,4
$H - \gamma$	1,637						4,4	0,4

Tabella 4: Valori ottenuti per i parametri a e b della relazione di dispersione e per le lunghezze d'onda delle righe spettrali osservate, insieme alle rispettive incertezze. Per i dettagli relativi alla stima dei parametri e alla propagazione degli errori, si veda l'Appendice.

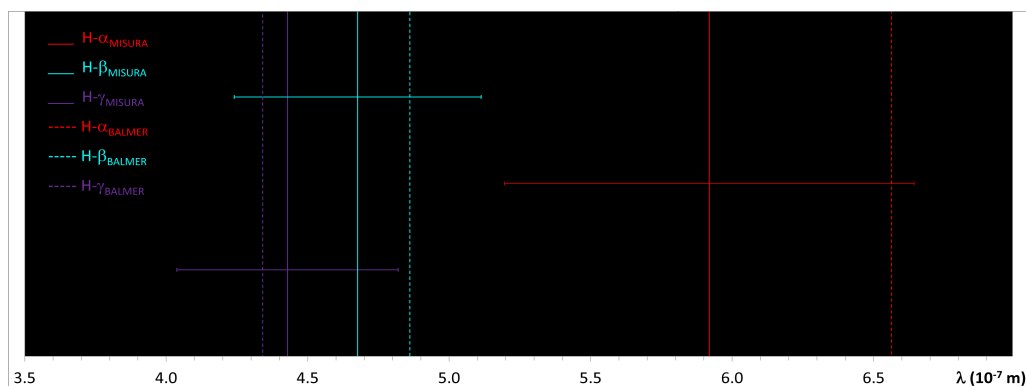


Figura 10: Spettro ottenuto in confronto ai valori attesi. Le righe continue rappresentano i valori misurati con le rispettive barre di errore, mentre quelle tratteggiate rappresentano i valori di riferimento. Si può notare che i valori ottenuti risultano compatibili, entro gli errori sperimentali, con quelli noti.

3.3 Verifica della legge di Balmer

Ottenute le misure sperimentali delle lunghezze d'onda delle righe di emissione, si vuole infine verificare che queste rispettino la legge di Balmer (2). Si cerca quindi di trovare una relazione tra le lunghezze d'onda λ e i numeri quantici principali $m = 3, 4, 5$ corrispondenti ai livelli energetici esterni da cui gli elettroni saltano indietro allo stato fondamentale $n = 2$.

Volendo anche in questo caso ottenere un *fit* lineare, si rende necessario utilizzare la più generale legge di Rydberg (3), che si riferisce al salto da numero quantico principale maggiore m ad uno minore n .

Dopo aver calcolato i valori di $1/m$ e $1/\lambda$ con le corrispondenti incertezze⁵, si è quindi innanzi tutto verificato che fra queste sussistesse una relazione quadratica come atteso dalla (3), realizzando il grafico rappresentato in figura 11.

⁴Per i dettagli della propagazione degli errori, si veda ancora l'Appendice A.

⁵Utilizzando la propagazione degli errori relativi si dimostra facilmente che $\varepsilon_{1/\lambda} = \varepsilon_\lambda/\lambda^2$.

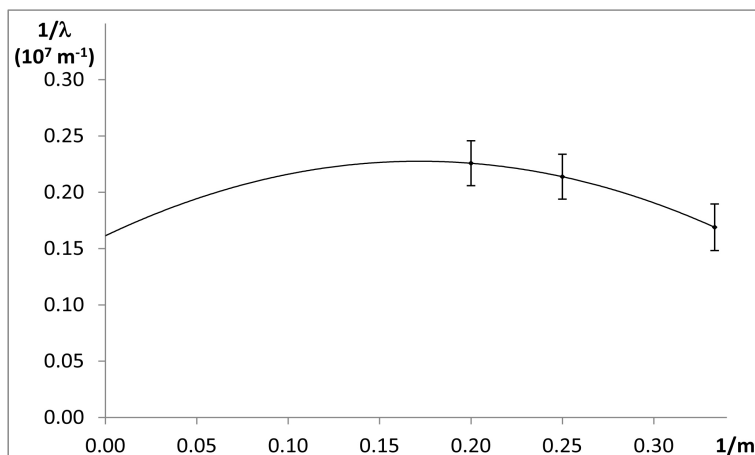


Figura 11: Valori di $1/\lambda$ con le relative barre di errore, in funzione di $1/m$. Si noti che la propagazione degli errori determina incertezze pressoché costanti per tutti i dati. La correlazione quadratica esistente fra le due grandezze risulta evidentemente verificata con un ottimo livello di approssimazione.

Verificata l'eccellente correlazione quadratica esistente fra le due grandezze, per poter ottenere una misura della costante di Rydberg (e quindi della costante di Balmer) si è proceduto a linearizzare la relazione realizzando un *fit*⁶ di $1/\lambda$ contro $1/m^2$, come illustrato nel grafico in figura 12.

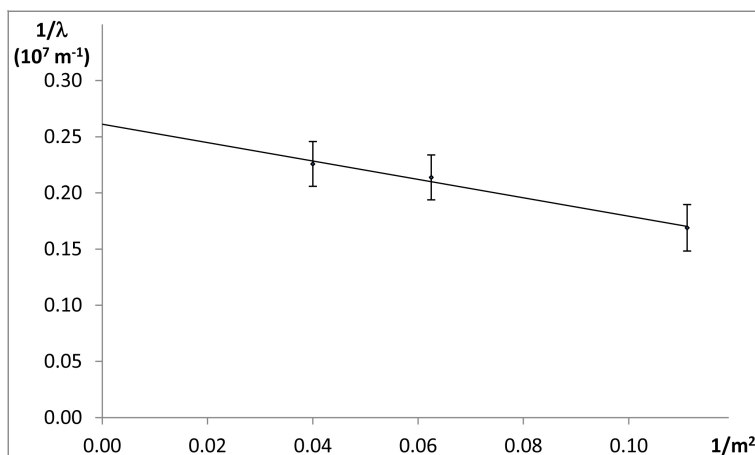


Figura 12: Valori di $1/\lambda$ con le relative barre di errore, in funzione di $1/m^2$. In questo caso la relazione ottenuta è lineare: i punti giacciono infatti con buona approssimazione su una retta.

La retta ottenuta risulta descritta da una relazione del tipo

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{a}{m^2} + b \quad (9)$$

con le migliori stime dei parametri date da:

$$a = (-0,8 \pm 0,4) \cdot 10^7 m^{-1}, \quad (10a)$$

$$b = (0,26 \pm 0,03) \cdot 10^7 m^{-1}. \quad (10b)$$

⁶Per i dettagli sulla procedura di *fit* si veda ancora l'Appendice B.

Mettendo a questo punto in evidenza un fattore $1/n^2 = 1/4$ nella (10a) si ottiene

$$b = \frac{1}{4} \cdot (1, 0 \pm 0, 1) \cdot 10^7 m^{-1} = \frac{1}{n^2} \cdot (1, 0 \pm 0, 1) \cdot 10^7 m^{-1}$$

e la (9) può essere quindi scritta nella forma:

$$\frac{1}{\lambda} = \left(\frac{1, 0}{n^2} - \frac{0, 8}{m^2} \right) \cdot 10^7 m^{-1}.$$

Notando infine che i due coefficienti risultano compatibili l'uno con l'altro entro le incertezze stimate, questi possono essere sostituiti con il loro valore medio ottenendo:

$$\frac{1}{\lambda} = 0, 9 \cdot 10^7 m^{-1} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right). \quad (11)$$

Il valore medio ottenuto, a cui è stata assegnata come incertezza quella della pendenza a (10a), rappresenta a questo punto la miglior stima per la costante di Rydberg

$$R = (0, 9 \pm 0, 4) \cdot 10^7 m^{-1} \quad (12)$$

e risulta compatibile, entro l'errore sperimentale, con il valore atteso $R = 1, 097 \cdot 10^7 m^{-1}$.

La relazione (11) può quindi essere espressa nella forma

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2} \right),$$

da cui passando ai reciproci si ottiene la legge di Balmer:

$$\lambda = \frac{4}{R} \left(\frac{n^2}{n^2 - 4} \right) = B \left(\frac{n^2}{n^2 - 4} \right).$$

Il coefficiente $B = 4/R$ rappresenta appunto la costante di Balmer, la cui stima

$$B = (4, 3 \pm 1, 8) \cdot 10^{-7} m \quad (13)$$

risulta di nuovo compatibile, entro l'errore sperimentale⁷, con il valore atteso $B = 3, 6456 \cdot 10^{-7} m$.

Conclusioni

Nell'esperienza descritta sono state misurate le lunghezze d'onda dello spettro di emissione dell'idrogeno e ne è stata data interpretazione dal punto di vista dei meccanismi atomici attraverso la verifica della legge di Balmer.

Gli obiettivi prefissati si possono considerare raggiunti in modo adeguato: i risultati ottenuti (12 e 13) sono infatti compatibili, entro le incertezze stimate, con i valori noti delle costanti.

La misura risulta comunque poco accurata, sia per la discrepanza tra i valori ottenuti e quelli noti, che per le incertezze stimate esageratamente grandi. In seguito ad attenta analisi, le principali cause di tali problemi sono state ricondotte a:

- la scarsa accuratezza con cui sono state determinate le misure degli angoli di apertura e di posizionamento del prisma rispetto al fascio incidente dal tubo di Plucker, misure che potevano essere effettuate con maggior precisione utilizzando lo spettrometro;
- l'ignoranza intrinseca riguardo alla natura del prisma e la conseguente necessità di stimarne le caratteristiche ottiche tenendo conto di un'incertezza;
- il ridotto numero di righe di emissione individuabili nella componente visibile dello spettro dell'idrogeno, che ha determinato incertezze eccessive nella procedura di *fit*, e che, nei limiti delle nostre disponibilità materiali, sarebbe stato possibile incrementare solo utilizzando un altro gas.

Nonostante i problemi individuati, possiamo comunque ritenerci molto soddisfatti del lavoro compiuto.

⁷Utilizzando la propagazione degli errori relativi si dimostra facilmente che $\varepsilon_B = 4 \varepsilon_r / R^2$.

Appendici

A Propagazione degli errori nella determinazione delle lunghezze d'onda

Nelle sezioni 3.1 e 3.2 sono state ricavate le relazioni che legano rispettivamente gli angoli di uscita misurati ai corrispondenti indici di rifrazione per il prisma (6), e questi ultimi alle lunghezze d'onda delle righe spettrali osservate (8).

Le lunghezze d'onda ottenute risultano ovviamente affette da incertezze sperimentali dovute alla propagazione degli errori di misura degli angoli e all'incertezza residua sulla natura del materiale.

Data la complessità delle relazioni ottenute si è deciso di non appesantire la trattazione con i dettagli della propagazione degli errori, che sono invece riportati qui per completezza.

Per quanto riguarda la relazione (6) fra l'indice di rifrazione del prisma e l'angolo di uscita misurato, risulta conveniente porre:

$$\begin{cases} N = \sqrt{3} \sin \theta_1 \\ D = 2 \sin \theta_4 + \sin \theta_1 \\ X = \frac{N}{D} \\ Y = \arctan X \\ n = \frac{\sin \theta_1}{\sin Y} \cdot n_1 \end{cases}$$

Propagando gli errori di misura degli angoli e ricordando che $\varepsilon(\sin \theta) = \cos \theta \cdot \varepsilon_\theta$, dalle relazioni precedenti si ottengono:

$$\begin{cases} \varepsilon_N = \sqrt{3} \cos \theta_1 \cdot \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_D = (2 \cos \theta_4 + \cos \theta_1) \cdot \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_X = \left(\frac{\varepsilon_N}{N} + \frac{\varepsilon_D}{D} \right) \cdot X \\ \varepsilon_Y = \frac{\varepsilon_X}{1 + X^2} \\ \varepsilon_n = \left(\frac{\varepsilon_\theta}{\tan \theta_1} + \frac{\varepsilon_Y}{\tan Y} \right) \cdot n \end{cases}$$

A dispetto dell'eleganza della trattazione si è deciso in questo caso di non ricavare un'unica relazione per l'incertezza dell'indice di rifrazione, ma si è preferito calcolare numericamente in sequenza gli errori ottenuti come illustrato in tabella 5.

riga	N	ε_N	D	ε_D	X	ε_X	Y	ε_Y	n	ε_n
$H - \alpha$	1,5000	0,0003	2,3616	0,0005	0,6352	0,0002	0,5659	0,0002	1,616	0,007
$H - \beta$			2,3955		0,6262		0,5594		1,632	
$H - \gamma$			2,4058		0,6235		0,5575		1,637	

Tabella 5: Risultati intermedi nel calcolo dell'indice di rifrazione e della corrispondente incertezza. In tutti i passaggi del calcolo si sono ottenuti errori in buona approssimazione costanti per le diverse righe spettrali.

L'errore sulle lunghezze d'onda ottenute attraverso la relazione (8), risulta a questo punto determinato dalla propagazione dell'incertezza residua sulla natura del materiale (ovvero sui parametri a e b stimati) e da quella appena discussa sull'indice di rifrazione. In questo caso si ottiene che:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_\lambda = \frac{\varepsilon \left(\sqrt{\frac{a}{n^2 - b}} \right)}{\sqrt{\frac{a}{n^2 - b}}} \cdot \lambda \\ \varepsilon \left(\sqrt{\frac{a}{n^2 - b}} \right) = \frac{\varepsilon \left(\frac{a}{n^2 - b} \right)}{2 \left(\sqrt{\frac{a}{n^2 - b}} \right)} \\ \varepsilon \left(\frac{a}{n^2 - b} \right) = \left(\frac{\varepsilon_a}{a} + \frac{\varepsilon(n^2 - b)}{n^2 - b} \right) \cdot \frac{a}{n^2 - b} \\ \varepsilon(n^2 - b) = \varepsilon(n^2) + \varepsilon_b \\ \varepsilon(n^2) = 2n \cdot \varepsilon_n \end{array} \right.$$

Risolvendo per sostituzione si ricava infine:

$$\varepsilon_\lambda = \left(\frac{\varepsilon_a}{a} + \frac{2n \cdot \varepsilon_n + \varepsilon_b}{n^2 - b} \right) \cdot \frac{\lambda}{2},$$

da cui si ottengono gli errori riportati in tabella 4.

B Il metodo dei minimi quadrati

Nel corso della trattazione si è più volte fatto riferimento alla procedura di *fit* lineare eseguita tramite il metodo dei minimi quadrati.

Con il termine inglese *fit* si intende in generale un sistema che permette di verificare se fra due serie di dati sperimentali $x_1 \dots x_i \dots x_N$ e $y_1 \dots y_i \dots y_N$ sussista una determinata relazione matematica, ricavando allo stesso tempo i parametri che forniscono l'accordo migliore.

Il tipo più semplice di *fit* è senza dubbio quello lineare, il cosiddetto metodo dei minimi quadrati, in cui minimizzando gli scarti quadratici fra i valori attesi e quelli effettivamente misurati, è possibile stimare la pendenza a e l'intercetta b della retta che meglio descrive un determinato gruppo di dati sperimentali.

Definito y_i il generico dato misurato con incertezza ε_i , e $ax_i - b$ il valore atteso in corrispondenza nell'ipotesi che i dati rispettino una relazione lineare, lo scarto s_i risulta:

$$s_i = y_i - (ax_i + b) = y_i - ax_i - b.$$

La retta che meglio descrive le relazione fra le due serie di dati sarà quella corrispondente ai valori dei parametri a e b che minimizzano la somma degli scarti quadratici pesati sui reciproci dei rispettivi errori di misura:

$$S = \sum_{i=1}^N \frac{(y_i - ax_i - b)^2}{\varepsilon_i^2}.$$

I minimi della funzione $S(a, b)$ possono quindi essere ottenuti imponendo che le sue derivate parziali rispetto ai parametri a e b siano nulle:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial S}{\partial a} = -2 \sum_{i=1}^N \frac{ax_i(y_i - ax_i - b)}{\varepsilon_i^2} = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^N \frac{y_i - ax_i - b}{\varepsilon_i^2} = 0 \end{array} \right.$$

Con semplici ma tediosi passaggi si può dimostrare che il sistema ammette soluzioni nella forma:

$$a = \frac{S_{xy} \cdot S_\varepsilon - S_x \cdot S_y}{S_{xx} \cdot S_\varepsilon - S_x^2},$$

$$b = \frac{S_y \cdot S_{xx} - S_x \cdot S_{xy}}{S_{xx} \cdot S_\varepsilon - S_x^2}.$$

dove si è posto:

$$S_x = \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\varepsilon_i^2}, S_y = \sum_{i=1}^N \frac{y_i}{\varepsilon_i^2}, S_{xx} = \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{\varepsilon_i^2}, S_{xy} = \sum_{i=1}^N \frac{x_i y_i}{\varepsilon_i^2}, S_\varepsilon = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\varepsilon_i^2}.$$

In caso di incertezze di misura costanti ($\varepsilon_i = \varepsilon \forall i$) queste possono essere semplificate e, ricordando la notazione per il valore medio

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

e le analoghe, le soluzioni del sistema assumono una forma più compatta:

$$a = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2},$$

$$b = \frac{\overline{x^2 y} - \bar{x} \cdot \overline{xy}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}.$$

Infine le incertezze sperimentali ε_i presenti nelle misure dei valori y_i si propagano nelle stime di pendenza e intercetta e i parametri a e b ottenuti risultano quindi affetti rispettivamente dagli errori:

$$\varepsilon_a = \sqrt{\frac{S_\varepsilon}{S_\varepsilon \cdot S_{xx} - S_x^2}},$$

$$\varepsilon_b = \sqrt{\frac{S_{xx}}{S_\varepsilon \cdot S_{xx} - S_x^2}}.$$

Analogamente alle stime dei parametri della retta, anche le loro rispettive incertezze possono essere semplificate in presenza di errori costanti, ottenendo in questo caso:

$$\varepsilon_a = \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{N(\overline{x^2} - \bar{x}^2)}},$$

$$\varepsilon_b = \sqrt{\frac{\varepsilon^2 \bar{x}^2}{N(\overline{x^2} - \bar{x}^2)}}.$$