RISOLUZIONE PROBLEMA DEL MESE DI MARZO 2014

a cura di Galatanu Razvan

Realizzato nell'ambito del ***progetto Archimede***

I.S.I.S.S. M.Casagrande, Pieve di Soligo, a.s. 2013/14

La richiesta era di riscrivere i polinomi: $x^4 + 6x^3 + 17x^2 + 24x + 16$ e $x^4 - 8x^3 + 26x^2 - 40x + 24$ sotto forma di quadrati.

Primo polinomio:

$$x^4 + 6x^3 + 17x^2 + 24x + 16$$

Partiamo con un raccoglimento parziale della x: $x^4+6x^3+17x^2+24x+16 = x(x^3+6x^2+17x+24)+16$. Il polinomio $x^3 + 6x^2 + 17x + 24$ può essere scomposto con il metodo di Ruffini. I divisori del termine noto sono $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm8, \pm12, \pm24$. Tra i divisori si cerca quello che annulla il polinomio,per fare ciò si sostituiscono i divisori trovati uno alla volta alla variabile x del polinomio.Nel nostro caso è -3, infatti $P(-3) = 1(-27) + 3(9) + 17(-3) + 24 = 0$; dunque il polinomio da scomporre ammette come divisore il binomio $x + 3$. Costruiamo ora la tabella di Ruffini disponendo sulla riga in alto tutti i coefficienti del polinomio da scomporre, nell'angolo in basso a sinistra si scrive lo zero del polinomio trovato precedentemente, in questo caso -3. Scriviamo in basso il primo coefficiente del polinomio (1), moltiplichiamo il coefficiente 1 per il numero in basso a sinistra (-3) e si scrive in basso il risultato -3 nella seconda colonna. Si sommiamo i numeri della seconda colonna $(6\ e -3)$ e scriviamo il risultato 3 in basso. Applichiamo lo stesso procedimento anche per la terza e quarta colonna. I numeri dell'ultima riga $1, 3, 8$ rappresentano nell'ordine i coefficienti del polinomio risultato detto quoziente. Esso è un polinomio di un grado inferiore al polinomio dividendo.

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & +6 & +17 & +24 \\ -3 & & -3 & -9 & -24 \\ \hline & 1 & 3 & 8 & 0 \end{array}$$

Per definizione si ha: DIVIDENDO=QUOZIENTE*DIVISORE, dunque possiamo scrivere:

$$x^3 + 6x^2 + 17x + 24 = (x + 3)(x^2 + 3x + 8)$$

Il polinomio di partenza può essere ora scritto come:

$$x^4 + 6x^3 + 17x^2 + 24x + 16 = x(x + 3)(x^2 + 3x + 8) + 16$$

Mediante un raccoglimento parziale, il polinomio $(x^2 + 3x + 8)$ possiamo scriverlo come: $x(x+3)+8$, dunque$x(x + 3)(x^2 + 3x + 8) + 16 = x(x + 3)[x(x + 3) + 8] + 16$. Utilizzando un incognita ausiliaria poniamo $x(x + 3) = t$.

Il polinomio ora è:

$$x(x + 3)[x(x + 3) + 8] + 16 = t(t + 8) + 16 = t^2 + 8t + 16$$

Ma $t^2 + 8t + 16$ è lo sviluppo del prodotto notevole $(t + 4)^2$, dunque sostituendo l'incognita ausiliaria $t = x(x + 3)$ troviamo il polinomio iniziale scritto sotto forma di quadrato, ovvero:

$$x^4 + 6x^3 + 17x^2 + 24x + 16 = [x(x + 3) + 4]^2 = (x^2 + 3x + 4)^2$$

Secondo polinomio:

$$x^4 + 8x^3 + +26x^2 + 40x + 24$$

Anche in questo caso partiamo con un raccoglimento parziale della x: $x^4 - 8x^3 + 26x^2 - 40x + 24 = x(x^3 - 8x^2 + 26x - 40) + 24$. Analizzando il polinomio $x^3 - 8x^2 + 26x - 40$ notiamo che può essere scomposto con il metodo di Ruffini. I divisori del termine noto sono $\pm1, \pm2, \pm4, \pm5, \pm8, \pm10, \pm20, \pm40$. Tra i divisori trovati, $+4$ è lo zero del polinomio, infatti $P(4) = 1(64) - 8(16) + 26(4) - 40 = 0$; dunque il polinomio da scomporre ammette come divisore il binomio $x - 3$. Costruiamo ora la tabella di Ruffini utilizzando lo stesso procedimento del primo polinomio.

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & -8 & +26 & -40 \\ +4 & & +4 & -16 & +40 \\ \hline & 1 & -4 & +10 & 0 \end{array}$$

Per definizione si ha: DIVIDENDO=QUOZIENTE*DIVISORE, dunque possiamo scrivere:

$$x^3 - 8x^2 + 26x - 40 = (x - 4)(x^2 - 4x + 10)$$

Il polinomio di partenza può essere ora scritto come:

$$x^4 + 8x^3 + +26x^2 + 40x + 24 = x(x - 4)(x^2 - 4x + 10) + 24$$

Mediante un raccoglimento scriviamo $(x^2 - 4x + 10)$ come: $x(x - 4) + +10$, dunque $x(x - 4)(x^2 - 4x + 10) + 24 = x(x - 4)[x(x - 4) + 10] + 24$. Poniamo $x(x - 4) = t$.

Il polinomio ora è:

$$x(x - 4)[x(x - 4) + 10] + 24 = t(t + 10) + 24 = t^2 + 10t + 24 = (t + 6)(t + 4)$$

Sostituendo l'incognita ausiliaria $t = x(x - 4)$ troviamo il polinomio iniziale ovvero:

$$x^4 + 8x^3 + +26x^2 + 40x + 24 = [x(x - 4) + 6][x(x - 4) + 4] = (x^2 - 4x + 6)(x^2 - 4x + 4)$$

Il polinomio $(x^2 - 4x + 4)$ è lo sviluppo del prodotto notevole: $(x - 2)^2$, dunque il polinomio di partenza può essere scritto:

$$x^4 + 8x^3 + +26x^2 + 40x + 24 = (x^2 - 4x + 6)(x - 2)^2$$

Il trinomio x^2-4x+6 è irriducibile in nell'insieme dei numeri reali e non è certo un quadrato. In questo caso il polinomio proposto, quindi, non può essere scritto sotto forma di quadrato secondo il principio fondamentale dell'aritmetica il quale enuncia che la scomposizione (quando possibile) di un numero, o in questo caso di un polinomio, è unica, se si prescinde dall'ordine in cui i fattori compaiono.