RISOLUZIONE PROBLEMA DEL MESE DI MARZO 2014

a cura di prof. Fabio Breda

Realizzato nell'ambito del ***progetto Archimede***

I.S.I.S.S. M.Casagrande, Pieve di Soligo, a.s. 2013/14

La richiesta è di riscrivere i polinomi: $x^4+6x^3+17x^2+24x+16$ e $x^4-8x^3+26x^2-40x+24$ sotto forma di quadrati.

Primo polinomio:

$$x^4+6x^3+17x^2+24x+16$$

Il polinomio è di quarto grado quindi risulta essere il quadrato di un polinomio di secondo grado, quindi si può ipotizzare di riuscire a scrivere

$$x^4+6x^3+17x^2+24x+16=\left(px^2+qx+r\right)^2$$

con opportuni numeri reali p,q,r.

Sviluppando il quadrato a secondo membro si ottiene

$$\begin{aligned} x^4+6x^3+17x^2+24x+16 &= p^2x^4+q^2x^2+r^2+2pqx^3+2prx^2+2qrx \\ &= p^2x^4+2pqx^3+\left(q^2+2pr\right)x^2+2qrx+r^2 \end{aligned}$$

e confrontando i coefficienti delle potenze uguali nei due menbri della identità si ottengono 5 equazioni in 3 variabili:

$$\begin{cases} p^2=1 \\ 2pq=6 \\ q^2+2pr=17 \\ 2qr=24 \\ r^2=16 \end{cases}$$

che risolto porta a

$$\begin{cases} p=\pm 1 \\ q=\pm 3 \\ r=\pm 4 \\ 24=24 \\ 16=16 \end{cases}$$

In questo sistema, quindi, le terne $(1;3;4)$ e $(-1;-3;-4)$ soddisfano anche le ultime due equazioni quindi sono soluzioni accettate del sistema.

Il polinomio di partenza si può quindi scrivere sotto forma di quadrato

$$\left(x^2+3x+4\right)^2 \qquad \text{oppure} \qquad \left(-x^2-3x-4\right)^2.$$

Secondo polinomio:

$$x^4 + 8x^3 + +26x^2 + 40x + 24$$

Non è sempre possibile, però, risolvere un sistema che abbia più equazioni che variabili. Molto spesso il sistema risulta impossibile come succede nel secondo polinomio proposto:

$$\begin{cases} p^2 = 1 \\ 2pq = 8 \\ q^2 + 2pr = 26 \\ 2qr = 40 \\ r^2 = 24 \end{cases}$$

che risolto porta a

$$\begin{cases} p = \pm 1 \\ q = 4 \\ r = \pm 5 \\ 20 = 40 \\ 25 = 24 \end{cases}$$

cioè ad un sistema impossibile e quindi si conclude che il polinomio non può essere scritto sotto forma di quadrato.