SOLUZIONE PROBLEMA DEL MESE

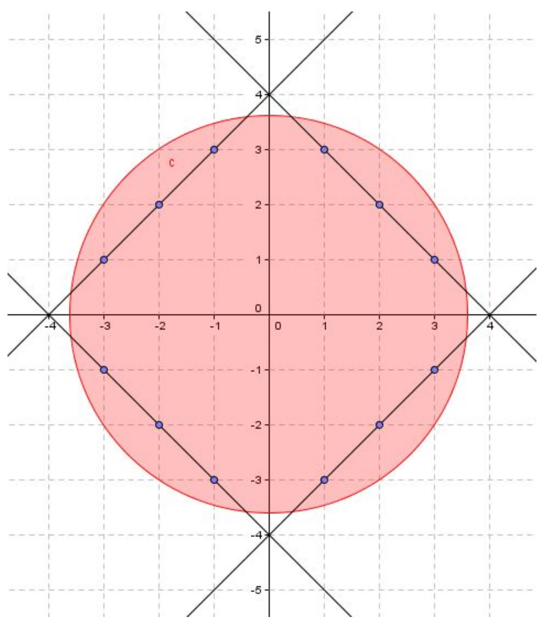
Dicembre 2014

Trovare quante sono le coppie di numeri interi che soddisfano contemporaneamente queste due condizioni:
• *la somma dei loro quadrati sia minore di 13;*
• *la somma dei loro valori assoluti sia maggiore o uguale a 4.*
Si può cambiare il numero 13 in modo che le coppie di numeri interi siano esattamente 4?

Il problema può essere sintetizzato con questo sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 < 13 \text{ con } x, y \in \mathbb{Z} \\ \mid x \mid + \mid y \mid \geq 4 \text{ con } x, y \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

La prima disequazione rappresenta tutti i punti di coordinate intere interni alla circonferenza di raggio $\sqrt{13}$ centrata nell'origine; la seconda rappresenta invece tutti i punti di coordinate intere esterni alla figura individuata dalle quattro rette $x + y = 4$, $x - y = 4$, $-x - y = 4$ e $-x + y = 4$. Esse si intersecano nei punti (4;0), (0;4), (-4;0) e (0;-4) determinando un quadrato (vedi figura).



Tra tutti i punti interi interni alla circonferenza sono da considerare solo quelli esterni al quadrato generato dalle quattro rette o appartenenti ai quattro lati. E' sufficiente perciò contare tali punti per avere la risposta alla prima richiesta del problema: i punti sono 9.

La seconda parte del problema richiede di modificare il raggio della circonferenza in modo da avere solamente 4 punti interi interni alla circonferenza e contemporaneamente esterni al quadrato o appartenenti ai suoi lati. Come si può vedere dalla figura, tali punti sono quelli di coordinate (2;2), (-2;2), (-2;-2) e (2:-2). La circonferenza quindi deve avere un raggio maggiore di $\sqrt{8}$ ma minore o uguale a $\sqrt{10}$.