TRASLAZIONI E DILATAZIONI

Prof. Fabio Breda

Abstract. *Lo scopo di questo articolo è fare chiarezza sulla modalità di costruzione del grafico di funzioni attraverso traslazioni o dilatazioni del grafico di altre funzioni. Infatti spesso si trova la necessità di costruire il grafico di funzioni come* $g(x) = 2sen\ (x + \pi/4) + 1$ *che, attraverso delle trasformazioni geometriche, si possono ricavare partendo dal grafico della funzione* $f(x) = sen\, x$.

Definiamo le trasformazioni che verranno di seguito utilizzate:

Definizione 1 *Una traslazione di vettore* $\overrightarrow{v}$ *è una trasformazione geometrica che fa corrispondere a ogni punto* P *del piano un punto* Q *tale che* $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{v}$. *Considerato un punto* $P(x_P; y_P)$ *del piano e il suo corrispondente* $Q(x_Q; y_Q)$ *nella traslazione di vettore* $\overrightarrow{v}(a, b)$ *con* a *e* b *numeri reali, le equazioni della traslazioni risultano essere:*

$$\begin{cases} x_Q = x_P + a \\ y_Q = y_P + b \end{cases}$$

Definizione 2 *Una dilatazione di rapporti 1/h e k, (con h e k numeri reali positivi) è una trasformazione geometrica che fa corrispondere ad ogni punto* $P(x_P; y_P)$ *del piano un punto* $Q(x_Q; y_Q)$ *attraverso le equazioni*

$$\begin{cases} x_Q = \frac{1}{h} x_P \\ y_Q = k y_P \end{cases}$$

Il rapporto $1/h$ determina una dilatazione (se $0 < 1/h < 1$) o una contrazione (se $1/h > 1$) lungo l'asse delle x, mentre il rapporto k determina una dilatazione (se $k > 1$) o una contrazione (se $0 < k < 1$) lungo l'asse delle y. Tali dilatazioni hanno come unico punto unito l'origine degli assi. Le dilatazioni possono avere come punto unito un punto diverso dall'origine degli assi ma queste non verranno trattate in questo articolo.

Interessante è quando si vanno a comporre le due trasformazioni appena definite. Se applichiamo prima una traslazione ad un grafico di una certa funzione e successivamente una dilatazione che funzione otteniamo? E se operiamo in ordine inverso, otteniamo lo stesso grafico? I seguenti teoremi ci aiutano a capire meglio.

Teorema 1 *Data una funzione* $f : A \longrightarrow B$, *con* $A \subset \mathbb{R}$ *se si applica una traslazione al grafico di* f *del vettore* $\overrightarrow{v}(a, b)$ *e successivamente una dilatazione di rapporti 1/h in x e k in y (con a,b,h e k numeri reali e h,k positivi) allora si ottiene il grafico della funzione* $g : C \longrightarrow D$ *con* $C \subset \mathbb{R}$ *definita da*

$$g(x) = k\left[f(hx - a) + b\right].$$

Dimostrazione. Sia P un punto del grafico di f e sia Q il punto del grafico di g ottenuto dalla traslazione e dalla dilatazione di P. Le coordinate di Q si ottengo inizialmente traslando le coordinate di P del vettore $\overrightarrow{v}(a, b)$ e quindi

$$\begin{cases} x_Q = x_P + a \\ y_Q = y_P + b \end{cases}$$

e successivamente dilatando dei rapporti $1/h$ e k:

$$\begin{cases} x_Q = \frac{1}{h}(x_P + a) \\ y_Q = k(y_P + b) \end{cases}$$

così

$$\begin{cases} x_P = hx_Q - a \\ y_P = \frac{1}{k}y_Q - b \end{cases}$$

Ora, poichè il punto P appartiene al grafico di f, allora $y_P = f(x_P)$ quindi

$$\frac{1}{k}y_Q - b = f(hx_Q - a) \qquad \Longrightarrow \qquad y_Q = k\left[f(hx_Q - a) + b\right]$$
$$\Longrightarrow \qquad g(x) = k\left[f(hx - a) + b\right].$$

■

Teorema 2 *Data una funzione $f : A \longrightarrow B$, con $A \subset \mathbb{R}$ se si applica una dilatazione di rapporti $1/h$ in x e k in y e successivamente una traslazione al grafico di f del vettore $\overrightarrow{v}(a, b)$ (con a,b,h e k numeri reali e h, k positivi) allora si ottiene il grafico della funzione $g : C \longrightarrow D$, con $C \subset \mathbb{R}$ definita da*

$$g(x) = kf\left[h(x - a)\right] + b.$$

Dimostrazione. Sia P un punto del grafico di f e sia Q il punto del grafico di g ottenuto dalla dilatazione e dalla traslazione di P. Le coordinate di Q si ottengo inizialmente dilatando le coordinate di P dei rapporti $1/h$ e k e quindi

$$\begin{cases} x_Q = \frac{1}{h}x_P \\ y_Q = ky_P \end{cases}$$

e successivamente traslando del vettore $\overrightarrow{v}(a, b)$

$$\begin{cases} x_Q = \frac{1}{h}x_P + a \\ y_Q = ky_P + b \end{cases}$$

così

$$\begin{cases} x_P = hx_Q - ha \\ y_P = \frac{1}{k}y_Q - \frac{1}{k}b \end{cases}$$

Ora, poichè il punto P appartiene al grafico di f, allora $y_P = f(x_P)$ quindi

$$\frac{1}{k}y_Q - \frac{1}{k}b = f(hx_Q - ha) \qquad \Longrightarrow \qquad y_Q = kf\left[h(x_Q - a)\right] + b$$
$$\Longrightarrow \qquad g(x) = kf\left[h(x - a)\right] + b.$$

■

La conseguenza dei teoremi appena dimostrati è che applicare prima la traslazione di vettore $\overrightarrow{v}(a; b)$ e poi la dilatazione di rapporti $1/h$ e k o fare il contrario non produce gli stessi effetti, a meno che non si cambi il vettore di traslazione.

Infatti, presi α, β reali e m, n reali positivi, la funzione

$$y = mf(nx + \alpha) + \beta$$

si può vedere in due modi diversi:

1) $\quad y = mf\left[n\left(x + \dfrac{\alpha}{n}\right)\right] + \beta$

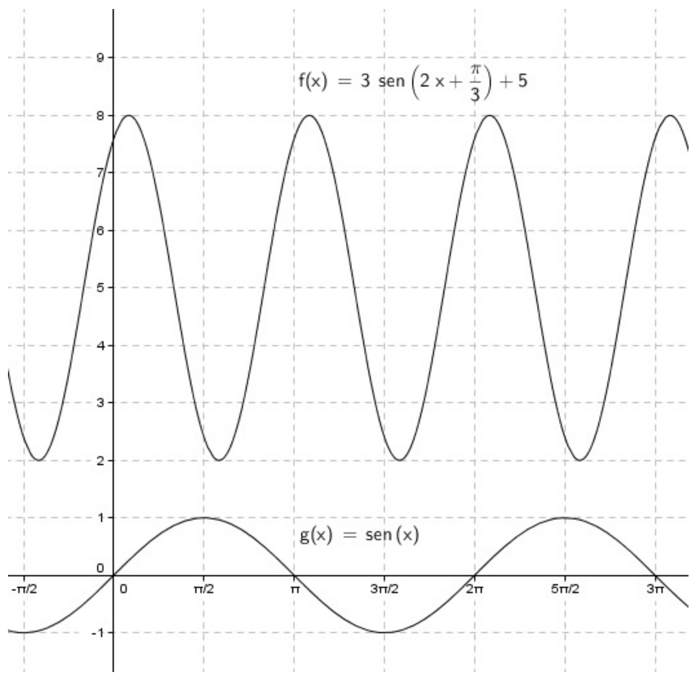
2) $\quad y = m\left[f(nx + \alpha) + \dfrac{\beta}{m}\right].$

Nel primo caso si può considerare che il grafico della funzione si ottenga dal grafico della funzione f attraverso
• una dilatazione di rapporti $1/n$ in x e m in y,
• e successivamente una traslazione di vettore $\overrightarrow{v}\left(-\frac{\alpha}{n};\beta\right)$.
Nel secondo caso, invece, attraverso
• una traslazione di vettore $\overrightarrow{v}\left(-\alpha;\frac{\beta}{m}\right)$
• e successivamente una dilatazione di rapporti $1/n$ in x e m in y.

Proviamo a vederlo con un esempio.

Esempio. Consideriamo la funzione

$$y = 3sen\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 5$$



la possiamo rappresentare seguendo due strade:

1) scrivendola sotto la forma $y = 3sen\left[2\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right] + 5$
e quindi prima dilatando dei rapporti $1/2$ in x e 3 in y il grafico della funzione seno, e poi traslando del vettore $\overrightarrow{v}\left(-\frac{\pi}{6};5\right)$ (figura 1).

2) oppure scrivendola sotto la forma $y = 3\left[sen\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{5}{3}\right]$
e quindi prima traslando del vettore $\overrightarrow{v}\left(-\frac{\pi}{3};\frac{5}{3}\right)$ il grafico della funzione seno e poi dilatando dei rapporti $1/2$ in x e 3 in y (figura 2).

Risulta, però, meno immediato il procedimento per arrivare al grafico finale in questo secondo caso, cioè applicando una dilatazione di una funzione precedentemente traslata. Infatti se si deve dilatare, per

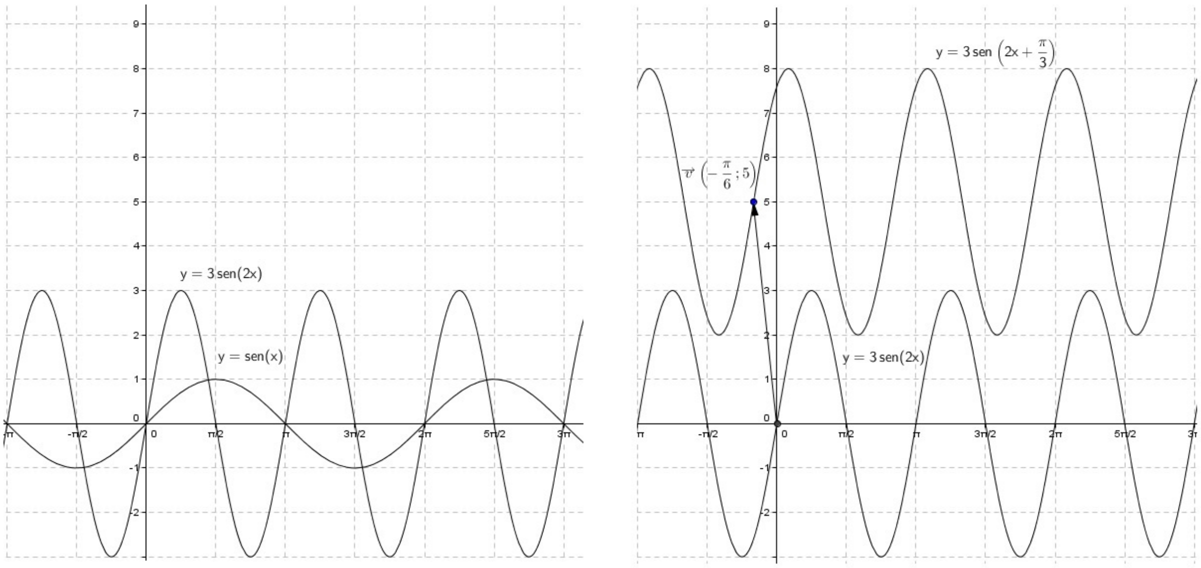


Figura 1: dilatazione e traslazione

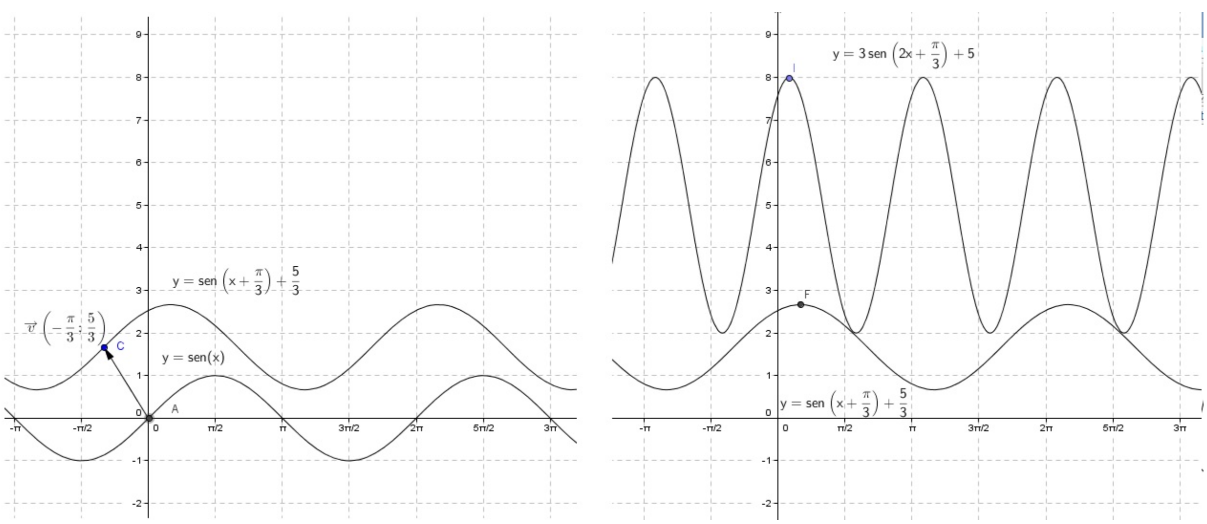


Figura 2: traslazione e dilatazione

esempio, la funzione seno lungo l'asse x si mantengono i valori massimi e i valori minimi e si spostano le intersezioni della funzione con l'asse x. Mentre se si deve dilatare lungo l'asse y si mantengono le intersezioni con l'asse x e si spostano i valori massimi ed i valori minimi.

Invece dilatare una funzione già traslata richiede una maggior cura. Nell'esempio riportato, infatti, il punto $F\left(\frac{\pi}{6}, \frac{8}{3}\right)$ deve essere trasformato, attraverso una dilatazione dei rapporti $1/2$ in x e 3 in y, nel punto $I\left(\frac{\pi}{12}, 8\right)$ e così per tutti gli altri punti.

Un lavoro un po' più elaborato, dunque il consiglio è di seguire la prima strada.

Solo nel caso in cui la dilatazione sia solo lungo uno dei due assi cartesiani e la traslazione sia lungo l'altro asse cartesiano risultano uguali le due strade, in quanto se la dilatazione è solo lungo l'asse x, allora $m = 1$ e se la traslazione è solo lungo l'asse y allora $\alpha = 0$ quindi il vettore

$$\vec{v}\left(-\frac{\alpha}{n}; \beta\right) = \vec{v}\left(-\alpha; \frac{\beta}{m}\right) = \vec{v}(0; \beta).$$

Mentre se la dilatazione è solo lungo l'asse y allora $n = 1$ e se la traslazione è solo lungo l'asse x allora $\beta = 0$ quindi il vettore

$$\vec{v}\left(-\frac{\alpha}{n}; \beta\right) = \vec{v}\left(-\alpha; \frac{\beta}{m}\right) = \vec{v}(-\alpha; 0).$$

Esempio. Se la funzione da rappresentare è $y = cos(2x) + 1$ allora $m = 1$, $n = 2$, $\alpha = 0$ e $\beta = 1$ cioè potremmo scegliere tra

- prima dilatare di rapporti $1/2$ e 1 e poi traslare del vettore $\vec{v}\left(-\frac{\alpha}{n}; \beta\right) = \vec{v}(0; 1)$ oppure
- prima traslare del vettore $\vec{v}\left(-\alpha; \frac{\beta}{m}\right) = \vec{v}(0; 1)$. E' ovvio che sia la stessa cosa.

Esempio. Allo stesso modo se la funzione da rappresentare è $y = 3sen\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. Infatti $m = 3$, $n = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ e $\beta = 0$ cioè i due vettori di traslazioni da applicare nei due casi coincidono e valgono

$$\vec{v}\left(-\frac{\alpha}{n}; \beta\right) = \vec{v}\left(-\alpha; \frac{\beta}{m}\right) = \vec{v}\left(\frac{\pi}{4}; 0\right).$$