SUL PROBLEMA DEL CERCHIO DI GAUSS

Anna Barisan e Prof. Fabio Breda

Abstract. *Lo scopo di questo articolo è la ricerca del numero di soluzioni intere delle disequazioni del tipo $x^2 + y^2 \leq n$, noto come il problema del cerchio di Gauss, e altre tipo $x^2 + y^2 + z^2 \leq n$. Il problema verrà analizzato sia dal punto di vista algebrico che geometrico per arrivare a risolvere una generica $a_1x_1^2+a_2x_2^2+...+a_mx_m^2 \leq n$, con $m \in \mathbb{N}_0$ e $n \in \mathbb{N}$* per poi ampliare lo studio a disequazioni simili.

Introduzione. Analizzeremo le disequazioni concentrandoci prima sul problema in una dimensione, poi in due arrivando fino ad ottenere conclusioni per $a_1x_1^2+a_2x_2^2+...+a_mx_m^2 \leq n$, con $m \in \mathbb{N}_0$ e $n \in \mathbb{N}$ in d dimensioni. Indicheremo con: $N_1(n) =$ il numero dei punti a coordinate intere che risolvono le disequazioni in una dimensione (rappresentabili sulla retta reale), con $N_2(n) =$ il numero dei punti a coordinate intere che risolvono le disequazioni in due dimensioni (rappresentabili sul piano cartesiano), con $N_3(n) =$ il numero dei punti a coordinate intere che risolvono le disequazioni in tre dimensioni (rappresentabili sullo spazio) fino ad arrivare a $N_d(n) =$ il numero dei punti a coordinate intere che risolvono le disequazioni in d dimensioni. Un interessante variante saranno le disequazioni del tipo $a_1|x_1|+a_2|x_2|+...+a_m|x_m| \leq n$

Una dimensione

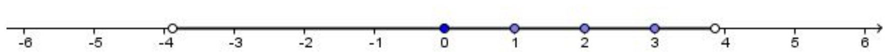
• $x^2 \leq n$ *con* $n \in \mathbb{N}$

La prima disequazione che vogliamo risolvere è $x^2 \leq n$. Algebricamente è una disequazione di secondo grado che ha per soluzioni $-\sqrt{n} \leq x \leq \sqrt{n}$. Geometricamente questi numeri sono rappresentabili nella retta reale con un segmento che ha punto medio sull'origine e come estremi i punti $(-\sqrt{n}; 0)$ e $(\sqrt{n}; 0)$. Volendo determinare il numero dei punti interi del segmento, contiamo l'origine degli assi (1 punto) e poi, osservando la parte positiva dell'asse x, un numero di punti compresi tra 0 e $\sqrt{n}$, cioè la parte intera di $\sqrt{n}$; osservando la parte negativa dell'asse x il procedimento è analogo e il numero dei punti è uguale a $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$.

Quindi la formula è:

$$N_1(n) = 1 + 2\lfloor\sqrt{n}\rfloor$$

Esempio.: $x^2 \leq 15$
$N_1(15) = 1 + 2\lfloor\sqrt{15}\rfloor = 1 + 2(3) = 7$
Pertanto il numero di soluzioni intere che risolvono la disequazione è 7.



- $ax^2 \leq n$ ***con*** $a, n \in \mathbb{R}$

Il procedimento è analogo al precedente e la formula è:

$$N_1(n,a) = 1 + 2\left\lfloor \sqrt{\frac{n}{a}} \right\rfloor$$

Esempio.: $3x^2 \leq 14$
$N_1(14,3) = 1 + 2\left\lfloor \sqrt{\frac{14}{3}} \right\rfloor = 1 + 2(2) = 5$
Pertanto il numero di soluzioni intere che risolvono la disequazione è 5.

- $a\,|x| \leq n$ ***con*** $a, n \in \mathbb{N}$

Algebricamente è una disequazione con un valore assoluto che ha per soluzioni $-\frac{n}{a} \leq x \leq \frac{n}{a}$. Geometricamente questi numeri sono rappresentabili nella retta reale con un segmento che ha punto medio sull'origine e come estremi i punti $\left(-\frac{n}{a};0\right)$ e $\left(\frac{n}{a};0\right)$. Volendo determinare il numero dei punti interi del segmento, contiamo l'origine degli assi (1 punto) e poi, osservando la parte positiva dell'asse x, un numero di punti compresi tra 0 e $\frac{n}{a}$, cioè $\left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor$; osservando la parte negativa dell'asse x il procedimento è analogo.

Quindi la formula è:

$$N_1(n,a) = 1 + 2\left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor$$

Esempio.: $5\,|x| \leq 23$
$N_1(23,5) = 1 + 2\left\lfloor \sqrt{\frac{23}{5}} \right\rfloor = 1 + 2(4) = 9$
Pertanto il numero di soluzioni intere che risolvono la disequazione è 9.

- $ax^m \leq n$ ***con*** $a, n \in \mathbb{N}$ ***e*** m *pari*

Algebricamente è una disequazione di grado m che ha per soluzioni $-\sqrt[m]{\frac{n}{a}} \leq x \leq \sqrt[m]{\frac{n}{a}}$. Geometricamente questi numeri sono rappresentabili nella retta reale con un segmento che ha punto medio sull'origine e come estremi i punti $\left(-\sqrt[m]{\frac{n}{a}};0\right)$ e $\left(\sqrt[m]{\frac{n}{a}};0\right)$. Volendo determinare il numero dei punti interi del segmento, contiamo l'origine degli assi (1 punto) e poi, osservando la parte positiva dell'asse x, un numero di punti compresi tra 0 e $\sqrt[m]{\frac{n}{a}}$, cioè la parte intera di $-\sqrt[m]{\frac{n}{a}}$; osservando la parte negativa dell'asse x il procedimento è analogo.

Quindi la formula è:

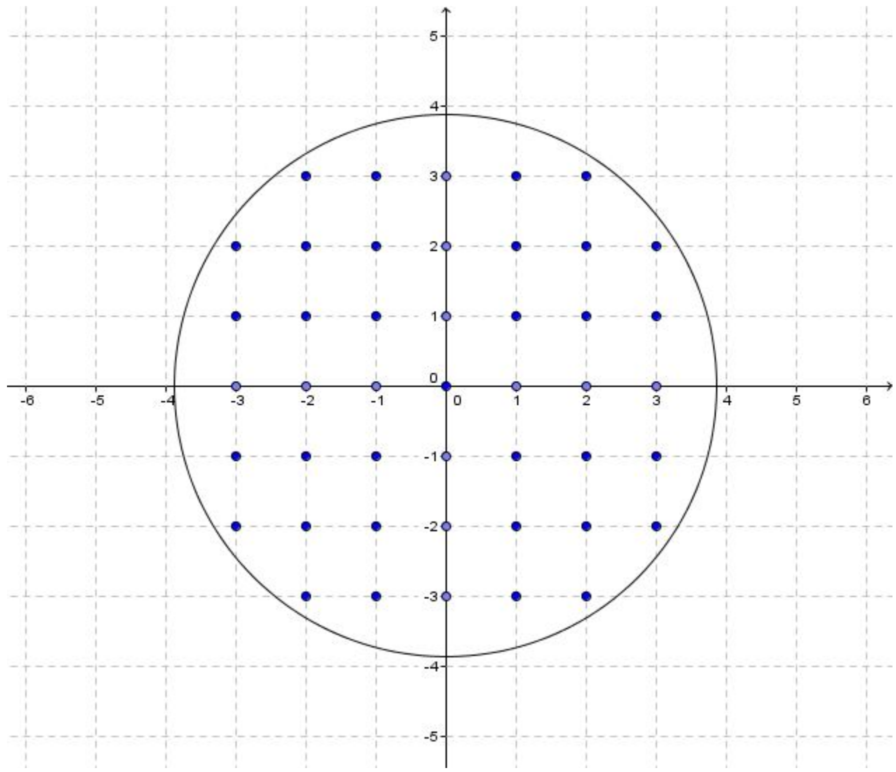
$$N_1(n,a,m) = 1 + 2\left\lfloor \sqrt[m]{\frac{n}{a}} \right\rfloor$$

Esempio.: $3x^6 \leq 200$
$N_1(200,3,6) = 1 + 2\left\lfloor \sqrt[6]{\frac{200}{3}} \right\rfloor = 1 + 2(2) = 5$
Pertanto il numero di soluzioni intere che risolvono la disequazione è 5.

Due dimensioni

- $x^2 + y^2 \leq n$ ***con*** $n \in \mathbb{N}$

La prima disequazione che vogliamo risolvere è $x^2 + y^2 \leq n$. Algebricamente dobbiamo trovare tutte le coppie intere di numeri la cui somma dei quadrati sia minore di n. Geometricamente, queste coppie, sono i punti interni alla circonferenza centrata nell'origine e di raggio $\sqrt{n}$.



Volendo determinarne il numero, dividiamo i punti a coordinate intere del cerchio: l'origine, i punti sugli assi esclusa l'origine e i punti restanti.

Per quanto riguarda i punti sugli assi, si consideri inizialmente la semiretta positiva dell'asse x: su di essa c'è un numero di punti pari alla parte intera del raggio ($\lfloor\sqrt{n}\rfloor$); la situazione è analoga per la semiretta negativa dell'asse x e per le semirette positiva e negativa dell'asse y. Pertanto il numero totale dei punti sugli assi è quattro volte quello dei punti giacenti solamente sulla semiretta positiva dell'asse x, cioè $4\lfloor\sqrt{n}\rfloor$.

Per quanto riguarda i restanti punti consideriamo inizialmente il 1^o quadrante: si noti che i punti che hanno ascissa $= 1$ giacciono sul segmento $\overline{AB}$. Esso ha lunghezza pari all'ordinata corrispondente a $x = 1$ della curva $x^2 + y^2 \leq n$. Esplicitandola, $y = \sqrt{n^2 - x^2}$. Il numero dei punti con ascissa $= 1$ è pertanto uguale a $\lfloor\sqrt{n^2 - 1}\rfloor$. Allo stesso modo i punti con ascissa $= 2$ sono $\lfloor\sqrt{n^2 - 2^2}\rfloor$, ecc. Nel 1^o quadrante il numero dei punti è la somma di tutti questi segmenti:

$$\sum_{k=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} \left(\lfloor\sqrt{n - k^2}\rfloor\right).$$

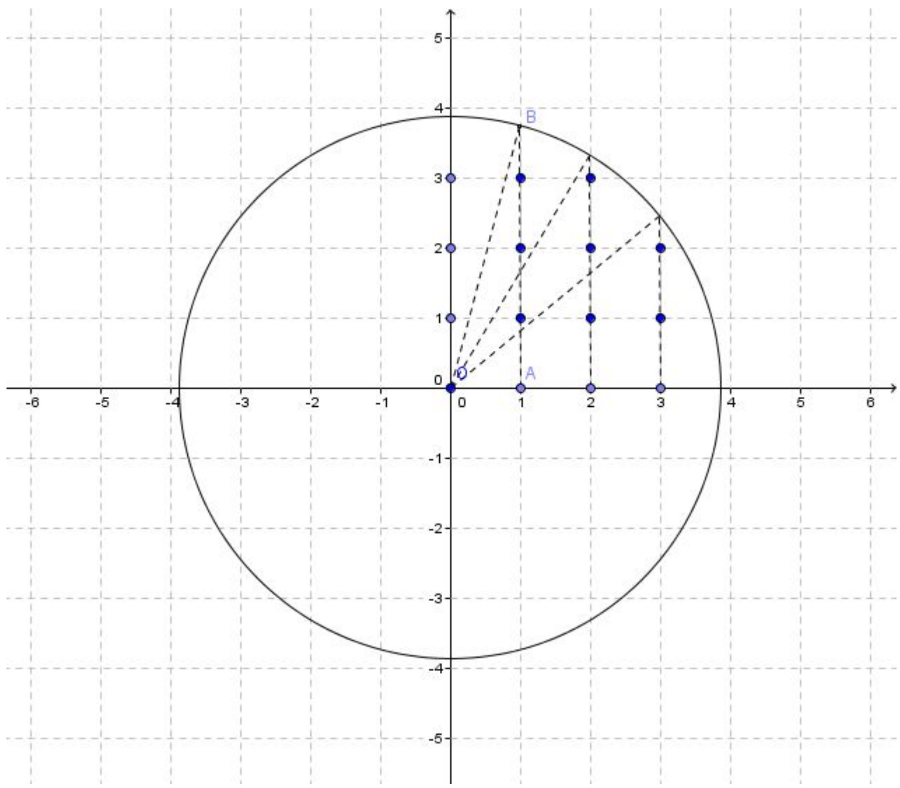
La situazione è analoga anche per gli altri tre quadranti. La somma totale dei punti non appartenenti agli assi quindi è:

$$4\sum_{k=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} \left(\lfloor\sqrt{n - k^2}\rfloor\right).$$

Concludendo il numero totale dei punti a coordinate intere che verificano la disequazione è:

$$N_2(n) = 1 + 4\lfloor\sqrt{n}\rfloor + 4\sum_{k=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\left(\lfloor\sqrt{n-k^2}\rfloor\right).$$

Un altro modo per contare i punti non appartenenti agli assi è quello di considerare il segmento $\overline{AB}$ come cateto del triangolo rettangolo ABO con $\overline{AO} = 1$ e ipotenusa $\overline{OB} = \sqrt{n}$. Applicando il teorema di Pitagora ricaviamo che $\overline{AB} = \sqrt{\sqrt{n}^2 - 1} = \sqrt{n-1}$. Calcolata quindi la lunghezza di $\overline{AB}$, si procede allo stesso modo per il segmento corrispondente all'ascissa = 2, ecc. Si sommano poi tutti i segmenti e si procede analogalmente alla dimostrazione precedente.



Esempio.: $x^2 + y^2 \leq 15$

$$N_2(15) = 1 + 4\lfloor\sqrt{15}\rfloor + 4\sum_{k=1}^{\lfloor\sqrt{15}\rfloor}\left(\lfloor\sqrt{15-k^2}\rfloor\right) = 1 + 4(3) + 4(3+3+2) = 45$$

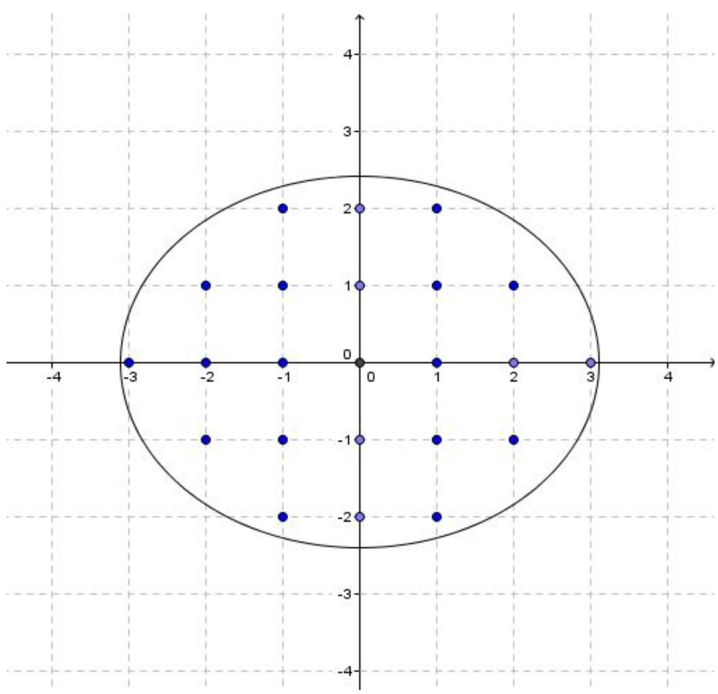
Pertanto il numero di soluzioni intere che risolvono la disequazione è 45.

Con un linguaggio qualsiasi è possibile creare un ciclo che fornisca in valore di $N_2(n)$ dato un certo n, per esempio in visual basic:

```
x = 0

For i = 1 To Int(Sqr(n))

x = x + Int(Sqr(n - i ^ 2))

Next

N = 1 + 4 * Int(Sqr(n)) + 4 * x
```

- $ax^2 + by^2 \leq n$ ***con*** $a, b, n \in \mathbb{N}$

Algebricamente dobbiamo trovare tutte le coppie intere di numeri la cui somma dei quadrati moltiplicati per i coefficienti a e b sia minore di n.
Geometricamente, queste coppie, sono i punti interni all'ellisse centrata nell'origine e con semiasse orizzontale uguale a $\sqrt{\frac{n}{a}}$ e semiasse verticale uguale a $\sqrt{\frac{n}{b}}$. Analogamente al procedimento usato per il cerchio, volendo determinarne il numero, dividiamo i punti a coordinate intere dell'ellisse: l'origine, i punti sugli assi esclusa l'origine e i punti restanti.

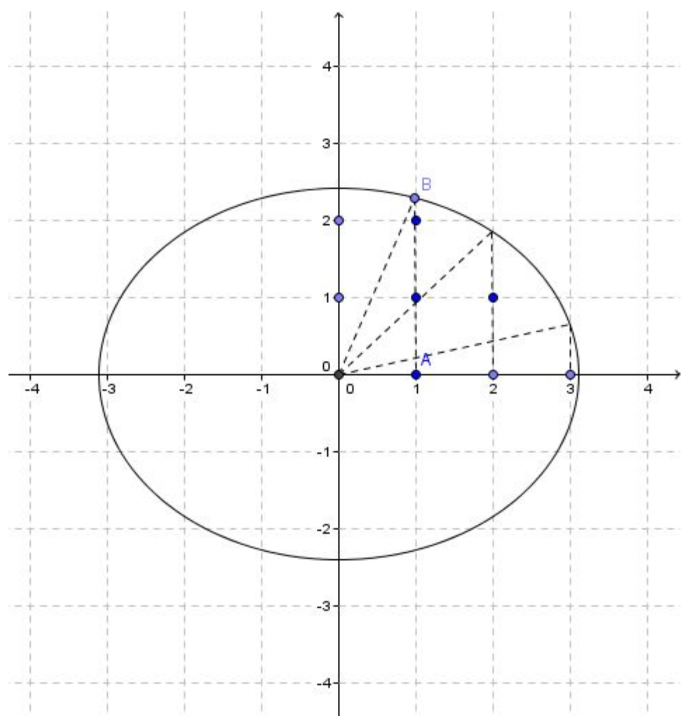


Per quanto riguarda i punti sugli assi, si consideri inizialmente la semiretta positiva dell'asse x: su di essa c'è un numero di punti pari alla parte intera del semiasse orizzontale $\left(\sqrt{\frac{n}{a}}\right)$; la situazione è analoga per la semiretta negativa dell'asse x. Per la semiretta positiva dell'asse y il numero dei punti è pari alla

parte intera del semiasse verticale $\left(\sqrt{\dfrac{n}{b}}\right)$; la situazione è analoga per la semiretta negativa dell'asse y.
Pertanto il numero totale dei punti sugli assi è $2\left\lfloor\sqrt{\dfrac{n}{a}}\right\rfloor+2\left\lfloor\sqrt{\dfrac{n}{b}}\right\rfloor$.

Per quanto riguarda i restanti punti consideriamo inizialmente il 1^o quadrante: si noti che i punti che hanno ascissa $=1$ giacciono sul segmento $\overline{AB}$. Esso ha lunghezza pari all'ordinata corrispondente a $x=1$ della curva $ax^2+by^2\leq n$. Esplicitandola, $y=\sqrt{\dfrac{n-ax^2}{b}}$. Il numero dei punti con ascissa $=1$ è pertanto uguale a $\left\lfloor\sqrt{\dfrac{n-a}{b}}\right\rfloor$. Allo stesso modo i punti con ascissa $=2$ sono $\left\lfloor\sqrt{\dfrac{n-a2^2}{b}}\right\rfloor$, ecc. Nel 1^o quadrante il numero dei punti è la somma di tutti questi segmenti:

$$\sum_{k=1}^{\left\lfloor\sqrt{\frac{n}{a}}\right\rfloor}\left(\left\lfloor\sqrt{\frac{n-ak^2}{b}}\right\rfloor\right).$$



La situazione è analoga anche per gli altri tre quadranti. La somma totale dei punti non appartenenti agli assi quindi è:

$$4\sum_{k=1}^{\left\lfloor\sqrt{\frac{n}{a}}\right\rfloor}\left(\left\lfloor\sqrt{\frac{n-ak^2}{b}}\right\rfloor\right).$$

Concludendo il numero totale dei punti a coordinate intere che verificano la disequazione è:

$$N_2(n,a,b) = 1 + 2\left\lfloor \sqrt{\frac{n}{a}} \right\rfloor + 2\left\lfloor \sqrt{\frac{n}{b}} \right\rfloor + 4\sum_{k=1}^{\left\lfloor \sqrt{\frac{n}{a}} \right\rfloor} \left(\left\lfloor \sqrt{\frac{n-ak^2}{b}} \right\rfloor \right).$$

Esempio.: $3x^2 + 5y^2 \leq 29$

$$N_2(29,3,5) = 1 + 2\left\lfloor \sqrt{\frac{29}{3}} \right\rfloor + 2\left\lfloor \sqrt{\frac{29}{5}} \right\rfloor + 4\sum_{k=1}^{\left\lfloor \sqrt{\frac{29}{3}} \right\rfloor} \left(\left\lfloor \sqrt{\frac{29-3k^2}{5}} \right\rfloor \right) = 1 + 2(3) + 2(2) + 4(2+1) = 23.$$

Pertanto il numero di soluzioni intere che risolvono la disequazione è 23.

- $|x| + |y| \leq n$ ***con*** $n \in \mathbb{R}^+$

Algebricamente dobbiamo trovare tutte le coppie intere di numeri le cui somme dei valori assoluti sia minore di n. Si risolve dividendo il problema in quattro casi che conducono a quattro rette: i valori interni risolvono la disequazione.

Geometricamente, queste quattro rette individuano nel piano cartesiano un quadrato centrato nell'origine, con i lati disposti a 45^o e -45^o rispetto agli assi. I quattro vertici del quadrato sono $(n;0), (0;n), (-n;0)$ e $(0;-n)$. Analogamente agli altri procedimenti precedenti, volendo determinarne il numero, dividiamo i punti a coordinate intere dell'ellisse: l'origine, i punti sugli assi esclusa l'origine e i punti restanti.

Per quanto riguarda i punti sugli assi, si consideri inizialmente la semiretta positiva dell'asse x: su di essa c'è un numero di punti pari alla parte intera di n; la situazione è analoga per la semiretta negativa dell'asse x e per le semirette positiva e negativa dell'asse y. Pertanto il numero totale dei punti sugli assi è quattro volte quello dei punti sulla semiretta positiva dell'asse x: $4\lfloor n \rfloor$.

Per quanto riguarda i restanti punti consideriamo inizialmente il 1^o quadrante: si noti che i punti che hanno ascissa $= 1$ giacciono sul segmento $\overline{AB}$. Esso ha lunghezza pari all'ordinata corrispondente a $x = 1$ della curva $|x| + |y| \leq n$. Esplicitandola, $y = \lfloor n - x \rfloor$. Il numero dei punti con ascissa $= 1$ è pertanto uguale a $\lfloor n-1 \rfloor$. Allo stesso modo i punti con ascissa $= 2$ sono $\lfloor n-2 \rfloor$, ecc. Nel 1^o quadrante il numero dei punti è la somma di tutti questi segmenti:

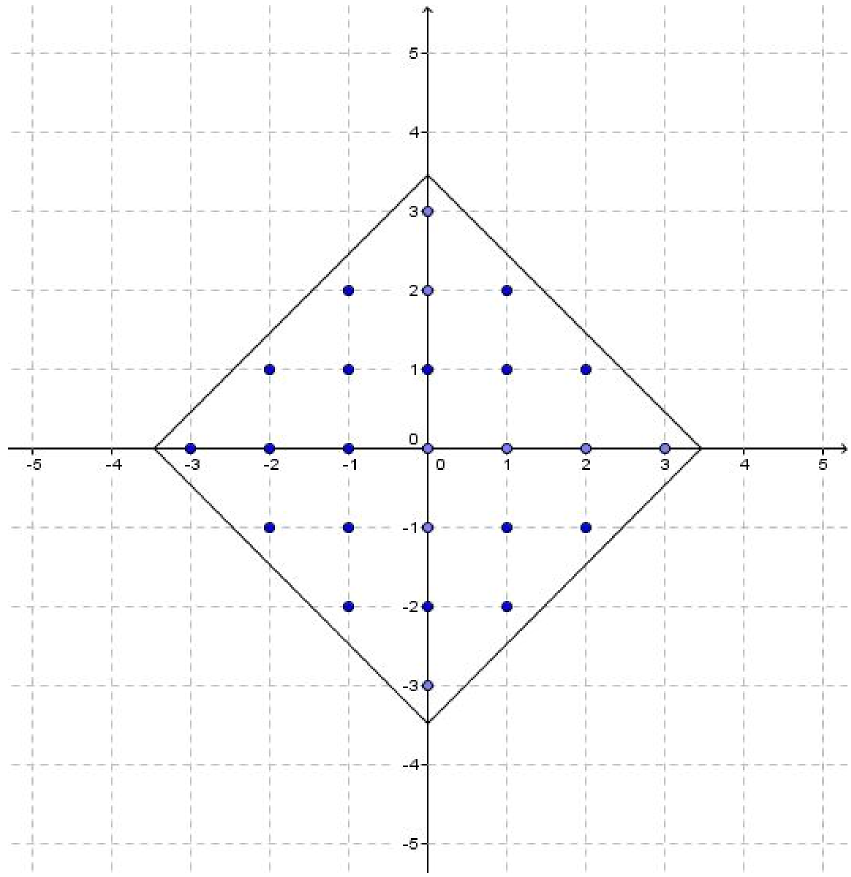
$$\sum_{k=1}^{\lfloor n \rfloor} (\lfloor n-k \rfloor).$$

La situazione è analoga anche per gli altri tre quadranti. La somma totale dei punti non appartenenti agli assi quindi è:

$$4\sum_{k=1}^{\lfloor n \rfloor} (\lfloor n-k \rfloor).$$

Concludendo il numero totale dei punti a coordinate intere che verificano la disequazione è:

$$N_2(n) = 1 + 4\lfloor n \rfloor + 4\sum_{k=1}^{\lfloor n \rfloor} (\lfloor n-k \rfloor) = 1 + 4\sum_{k=0}^{\lfloor n \rfloor} (\lfloor n-k \rfloor).$$



Un altro modo per contare i punti è vedere che

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n \rfloor} (\lfloor n-k \rfloor) = n + (n-1) + (n-2) + ... + (n-n).$$

Applicando la *formula della somma dei primi n numeri naturali* si ottiene che il numero dei punti interi interni è:

$$1 + 2\lfloor n \rfloor (\lfloor n \rfloor + 1)$$

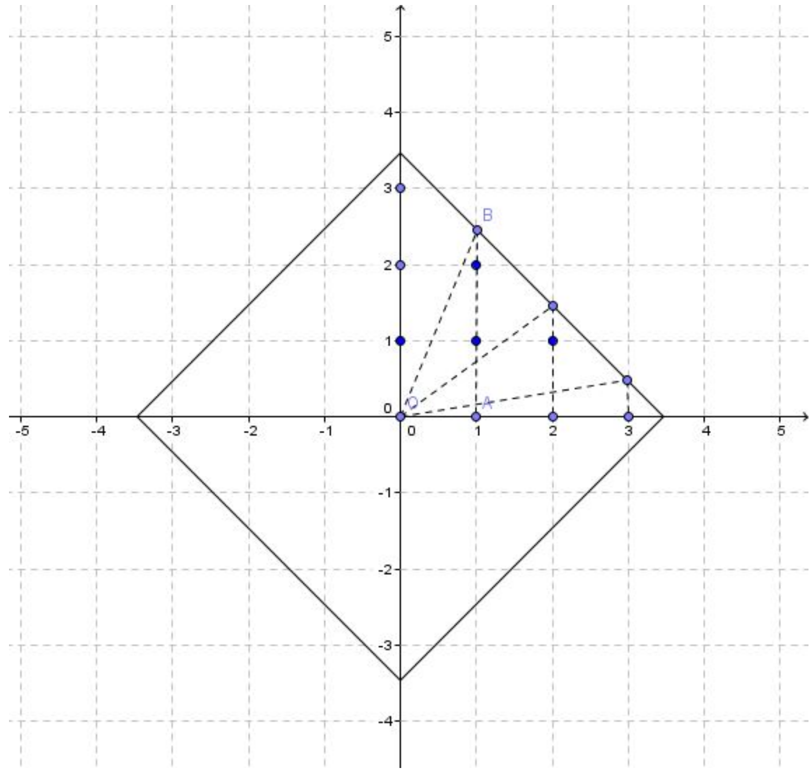
Esempio.: $|x| + |y| \leq \dfrac{18}{5}$

$$N_2\left(\frac{18}{5}\right) = 1 + 2\left\lfloor \frac{18}{5} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{18}{5} \right\rfloor + 1\right) = 25.$$

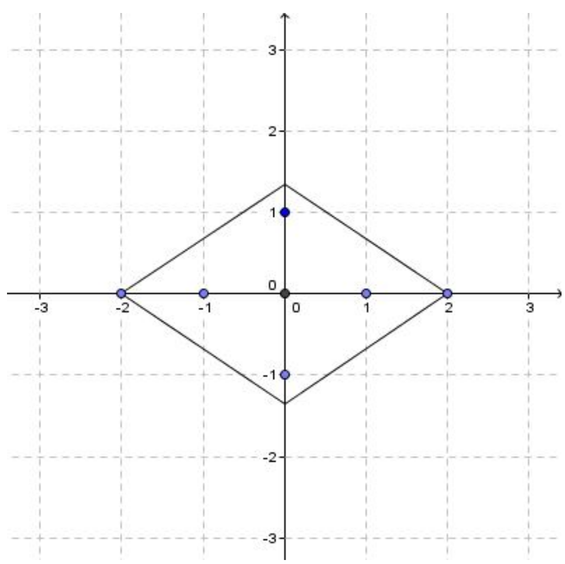
Pertanto il numero di soluzioni intere che risolvono la disequazione è 25.

- $a\,|x| + b\,|y| \leq n$ ***con*** $a, b, n \in \mathbb{N}$

Algebricamente dobbiamo trovare tutte le coppie intere di numeri le cui somme dei valori assoluti sia minore di n. Si risolve dividendo il problema in quattro casi che conducono a quattro rette: i valori interni risolvono la disequazione. Geometricamente, queste quattro rette individuano nel piano cartesiano un rombo centrato nell'origine; I quattro vertici del rombo sono $\left(\frac{n}{a};0\right)$, $\left(0;\frac{n}{b}\right)$, $\left(-\frac{n}{a};0\right)$, $\left(0;-\frac{n}{b}\right)$.



Analogamente agli altri procedimenti precedenti, volendo determinarne il numero, dividiamo i punti a coordinate intere dell'ellisse: l'origine, i punti sugli assi esclusa l'origine e i punti restanti.

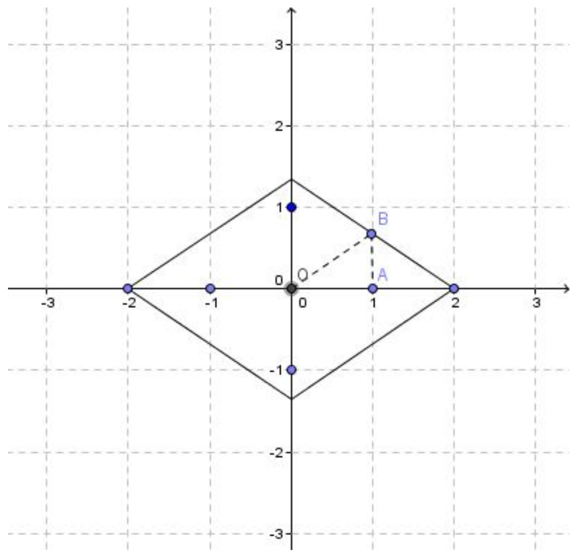


Per quanto riguarda i punti sugli assi, si consideri inizialmente la semiretta positiva dell'asse x: su di essa c'è un numero di punti pari alla parte intera di $\frac{n}{a}$; la situazione è analoga per la semiretta negativa dell'asse x. Sulla semiretta positiva dell'asse y c'è un numero di punti pari a $\frac{n}{b}$, come nella semiretta negativa dell'asse y. Pertanto il numero totale dei punti sugli assi è : $2\left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor + 2\left\lfloor \frac{n}{b} \right\rfloor$.

Per quanto riguarda i restanti punti consideriamo inizialmente il 1^o quadrante: si noti che i punti che hanno ascissa $= 1$ giacciono sul segmento $\overline{AB}$. Esso ha lunghezza pari all'ordinata corrispondente a $x = 1$ della curva $a|x| + b|y| \leq n$. Esplicitandola, $y = \left\lfloor \frac{an-x}{b} \right\rfloor$. Il numero dei punti con ascissa $= 1$ è pertanto uguale a $\left\lfloor \frac{an-1}{b} \right\rfloor$. Allo stesso modo i punti con ascissa $= 2$ sono $\left\lfloor \frac{an-2}{b} \right\rfloor$, ecc.

Nel 1^o quadrante il numero dei punti è la somma di tutti questi segmenti:

$$\sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor} \left(\left\lfloor \frac{an-k}{b} \right\rfloor \right).$$



La situazione è analoga anche per gli altri tre quadranti. La somma totale dei punti non appartenenti agli assi quindi è:

$$4\sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor} \left(\left\lfloor \frac{an-k}{b} \right\rfloor \right).$$

Concludendo il numero totale dei punti a coordinate intere che verificano la disequazione è:

$$N_2(n,a,b) = 1 + 2\left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor + 2\left\lfloor \frac{n}{b} \right\rfloor + 4\sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor} \left(\left\lfloor \frac{an-k}{b} \right\rfloor \right).$$

Esempio.: $2|x| + 3|y| \leq 4$

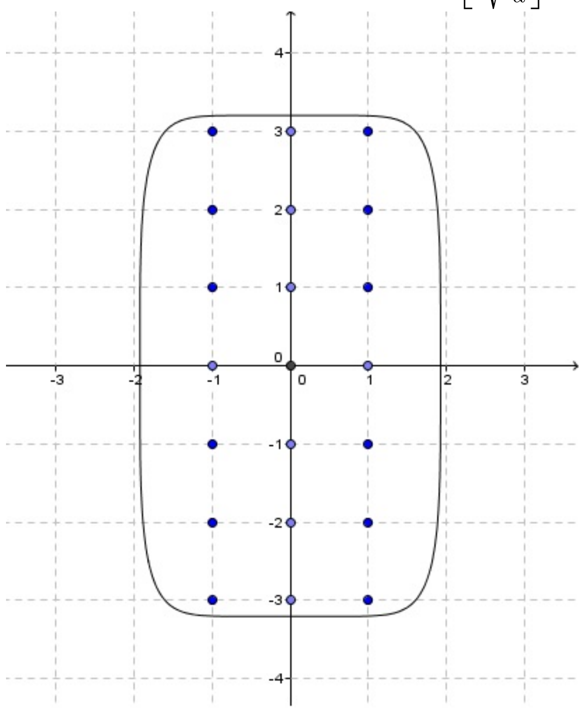
$$N_2(4,2,3) = 1 + 2\left\lfloor \frac{4}{2} \right\rfloor + 2\left\lfloor \frac{4}{3} \right\rfloor + 4\sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{4}{2} \right\rfloor} \left(\left\lfloor \frac{2 \times 4 - k}{3} \right\rfloor \right) = 1 + 2(2) + 2(1) + 4(0) = 11.$$

Pertanto il numero di soluzioni intere che risolvono la disequazione è 11.

- **$ax^m + by^h \leq n$ con $a, b, n \in \mathbb{N}$ e m, h pari**

Algebricamente dobbiamo trovare tutte le coppie intere di numeri che verificano la disequazione. Geometricamente, queste coppie, sono i punti interni ad una generica curva chiusa del piano centrata nell'origine e con semiasse orizzontale uguale a $\sqrt[m]{\frac{n}{a}}$ e semiasse verticale uguale a $\sqrt[h]{\frac{n}{b}}$. Analogamente ai procedimenti precedenti dividiamo i punti a coordinate intere interni: l'origine, i punti sugli assi esclusa l'origine e i punti restanti.

Per quanto riguarda i punti sugli assi, si consideri inizialmente la retta positiva dell'asse x: su di essa c'è un numero di punti pari a due volte la parte intera del semiasse orizzontale $\left(\sqrt[m]{\frac{n}{a}}\right)$. Per la semiretta positiva dell'asse y il numero dei punti è pari a due volte la parte intera del semiasse verticale $\left(\sqrt[h]{\frac{n}{b}}\right)$. Pertanto il numero totale dei punti sugli assi è $2\left\lfloor \sqrt[m]{\frac{n}{a}} \right\rfloor + 2\left\lfloor \sqrt[h]{\frac{n}{b}} \right\rfloor$.



Punti interni a $5x^8 + 9y^4 \leq 947$

Per quanto riguarda i restanti punti consideriamo inizialmente il 1^o quadrante: si noti che i punti che hanno ascissa $= 1$ giacciono sul segmento che ha lunghezza pari all'ordinata corrispondente della curva. Esplicitandola, $y = \sqrt[h]{\frac{n - ax^m}{b}}$. Il numero dei punti con ascissa $= 1$ è pertanto uguale a $\left\lfloor \sqrt{\frac{[}{h}]n - ab} \right\rfloor$. Allo stesso modo i punti con ascissa $= 2$ sono $\left\lfloor \sqrt{\frac{n - a2^m}{b}} \right\rfloor$, ecc. Nel 1^o quadrante il numero dei punti è la somma di tutti questi segmenti:

$$\sum_{k=1}^{\left\lfloor \sqrt[m]{\frac{n}{a}} \right\rfloor} \left(\left\lfloor \sqrt[h]{\frac{n - ak^m}{b}} \right\rfloor \right).$$

La situazione è analoga anche per gli altri tre quadranti. La somma totale dei punti non appartenenti agli assi quindi è:

$$4 \sum_{k=1}^{\left\lfloor \sqrt[m]{\frac{n}{a}} \right\rfloor} \left(\left\lfloor \sqrt[h]{\frac{n-ak^m}{b}} \right\rfloor \right).$$

Concludendo il numero totale dei punti a coordinate intere che verificano la disequazione è:

$$N_2(n,a,b,m,h) = 1 + 2\left\lfloor \sqrt[m]{\frac{n}{a}} \right\rfloor + 2\left\lfloor \sqrt[h]{\frac{n}{b}} \right\rfloor + 4 \sum_{k=1}^{\left\lfloor \sqrt[m]{\frac{n}{a}} \right\rfloor} \left(\left\lfloor \sqrt[h]{\frac{n-ak^m}{b}} \right\rfloor \right).$$

Esempio.: $5x^8 + 9y^4 \leq 947$

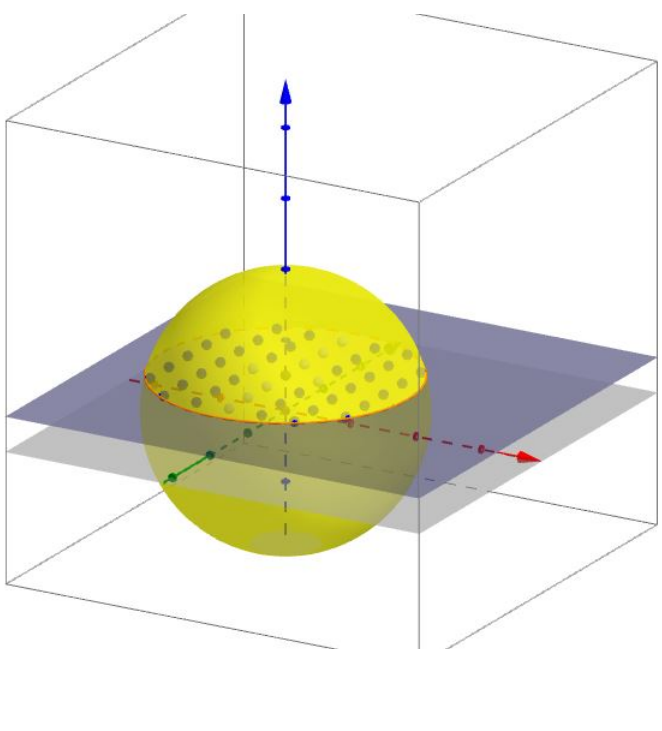
$$N_2(947,5,9,8,4) = 1+2\left\lfloor \sqrt[8]{\frac{947}{5}} \right\rfloor + 2\left\lfloor \sqrt[4]{\frac{947}{9}} \right\rfloor + 4 \sum_{k=1}^{\left\lfloor \sqrt[8]{\frac{947}{5}} \right\rfloor} \left(\left\lfloor \sqrt[4]{\frac{947-5k^8}{9}} \right\rfloor \right) = 1+2(1)+2(3)+4(1+1+1) = 21.$$

Pertanto il numero di soluzioni intere che risolvono la disequazione è 21 (vedi figura sopra).

1 Tre dimensioni.

- $x^2 + y^2 + z^2 \leq n$ ***con*** $n \in \mathbb{N}$

La prima disequazione che vogliamo risolvere è $x^2+y^2+z^2 \leq n$. Algebricamente dobbiamo trovare tutte le terne di numeri interi la cui somma dei quadrati sia minore di n.



Geometricamente queste terne si possono pensare come tutti i punti interni ad una sfera centrata nell'origine di raggio $\sqrt{n}$. Volendo determinarne il numero, possiamo sezionare la sfera con dei piani paralleli $z = i$ con $i = 0, 1, 2, ...$ fino a quando il piano non interseca più la sfera, cioè fino a $i = \sqrt{n}$. Le sezioni saranno dei cerchi.

Quindi si osserva che per calcolare i punti interi interni alla sfera $N_3(n)$ si fa uso del precedente calcolo dei numeri interi interni a dei cerchi $N_2(n)$. Questo ragionamento si potrà estendere poi anche per le successive dimensioni. Cerchiamo ora la giusta relazione che lega N_3 con N_2.

Per prima cosa $N_3(0)$ consiste in un solo punto infatti algebricamente la disequazione $x^2 + y^2 + z^2 \leq 0$ ha per soluzione solo la terna $(0; 0; 0)$ e geometricamente rappresenta un sfera di raggio 0.
Per calcolare $N_3(1)$ ovvero risolvere la disequazione $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ dobbiamo sezionare la sfera di raggio 1 con i tre piani $z = -1, z = 0$ e $z = 1$. La sezione ottenuta col piano $z = 0$ è un cerchio di raggio 1, algebricamente è la disequazione $x^2 + y^2 \leq 1$ e cioè $N_2(1)$ che come abbiamo visto sopra è uguale a 5. Le sezioni ottenute con i piani $z = -1$ e $z = 1$ sono due cerchi di raggio 0, algebricamente la disequazione $x^2 + y^2 \leq 0$ e cioè $N_2(0)$ che a 1.Quindi

$$N_3(1) = N_2(1) + 2 \cdot N_2(0) = 5 + 2 \cdot 1 = 7$$

Per calcolare $N_3(4)$, per esempio, ovvero risolvere la disequazione $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ dobbiamo sezionare la sfera di raggio 2 con i cinque piani $z = 0, z = \pm 1$ e $z = \pm 2$. La sezione ottenuta col piano $z = 0$ è un cerchio di raggio 2, algebricamente è la disequazione $x^2 + y^2 \leq 4$ e cioè $N_2(4) = 13$. Le sezioni ottenute con i piani $z = -1$ e $z = 1$ sono due cerchi di raggio $\sqrt{3}$, algebricamente la disequazione $x^2 + y^2 \leq 3$ e cioè $N_2(3) = 9$. Le sezioni ottenute con i piani $z = -2$ e $z = 2$ sono due cerchi di raggio 0, algebricamente la disequazione $x^2 + y^2 \leq 0$ e cioè $N_2(0) = 1$. Quindi

$$N_3(4) = N_2(4) + 2 \cdot (N_2(3) + N_2(0)) = 13 + 2 \cdot (9 + 1) = 33$$

.

Volendo generalizzare quindi otteniamo la seguente formula per il calcolo di $N_3(n)$:

$$\begin{cases} N_3(0) = 1 \\ N_3(n) = N_2(n) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} N_2\left(n - i^2\right), & \quad n > 0 \end{cases}$$

2 Quattro dimensioni.

- $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \leq n$ ***con*** $n \in \mathbb{N}$

La prima disequazione che vogliamo risolvere è $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \leq n$.

Algebricamente dobbiamo trovare tutte le quaterne di numeri interi la cui somma dei quadrati sia minore di n.

Geometricamente queste quaterne si possono pensare (ma non rappresentare) come tutti i punti interni ad una sfera in 4 dimensioni (una 4-sfera) centrata nell'origine di raggio $\sqrt{n}$. Volendo determinarne il numero, possiamo sezionare la 4-sfera con dei piani paralleli $t = i$ con $t = 0, 1, 2, ...$ fino a quando il piano non interseca più la 4-sfera, cioè fino a $i = \sqrt{n}$. Le sezioni saranno delle sfere in 3 dimensioni. Quindi si osserva che per calcolare i punti interi interni alla 4-sfera, cioè $N_4(n)$ si fa uso del precedente calcolo dei numeri interi interni alla sfera si dimensione 3 (3-sfera), cioè $N_3(m)$.

Cerchiamo ora la giusta relazione che lega N_4 con N_3.
Prima di tutto $N_4(0)$ consiste in un solo punto infatti algebricamente la disequazione $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \leq 0$ ha per soluzione solo la quaterna $(0; 0; 0; 0)$ e geometricamente rappresenta un 4-sfera di raggio 0.
Per calcolare $N_4(1)$ ovvero risolvere la disequazione $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \leq 1$ dobbiamo sezionare la 4-sfera di raggio 1 con i tre piani $t = -1, t = 0$ e $t = 1$. La sezione ottenuta col piano $t = 0$ è una 3-sfera di

raggio 1, algebricamente è la disequazione $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ e cioè $N_3(1)$ che come abbiamo visto sopra è uguale a 7. Le sezioni ottenute con i piani $t = -1$ e $t = 1$ sono due 3-sfere di raggio 0, algebricamente la disequazione $x^2 + y^2 + t^2 \leq 0$ e cioè $N_3(0)$ che a 1. Quindi

$$N_4(1) = N_3(1) + 2 \cdot N_3(0) = 7 + 2 \cdot 1 = 9$$

Per calcolare $N_4(4)$, per esempio, ovvero risolvere la disequazione $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \leq 4$ dobbiamo sezionare la 4-sfera di raggio 2 con i cinque piani $t = 0, t = \pm 1$ e $t = \pm 2$. La sezione ottenuta col piano $t = 0$ è una 3-sfera di raggio 2, algebricamente è la disequazione $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ e cioè $N_3(4) = 33$. Le sezioni ottenute con i piani $t = -1$ e $t = 1$ sono due 3-sfere di raggio $\sqrt{3}$, algebricamente la disequazione $x^2 + y^2 + z^2 \leq 3$ e cioè $N_3(3) = 27$. Le sezioni ottenute con i piani $t = -2$ e $t = 2$ sono due 3-sfere di raggio 0, algebricamente la disequazione $x^2 + y^2 + z^2 \leq 0$ e cioè $N_3(0) = 1$. Quindi

$$N_3(4) = N_2(4) + 2 \cdot (N_2(3) + N_2(0)) = 13 + 2 \cdot (9 + 1) = 33$$

Volendo generalizzare quindi otteniamo la seguente formula per il calcolo di $N_4(n)$:

$$\begin{cases} N_4(0) = 1 \\ N_4(n) = N_3(n) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} N_3\left(n - i^2\right), & n > 0 \end{cases}$$

Possiamo infine costruire una formula utilizzabile per una dimensione $d > 2$ generica:

$$\begin{cases} N_d(0) = 1 \\ N_d(n) = N_{d-1}(n) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} N_{d-1}\left(n - i^2\right), & n > 0 \end{cases}$$

Con un linguaggio di programmazione possiamo costruire una tabella che fornisce tutti gli $N_d(n)$. Presentiamo la tabella fino alla dimensione 5 dei primi 20 valori ed il relativo codice in visual basic:

n	$N_1(n)$	$N_2(n)$	$N_3(n)$	$N_4(n)$	$N_5(n)$
0	1	1	1	1	1
1	3	5	7	9	11
2	3	9	19	33	51
3	3	9	27	65	131
4	5	13	33	89	221
5	5	21	57	137	333
6	5	21	81	233	573
7	5	21	81	297	893
8	5	25	93	321	1093
9	7	29	123	425	1343
10	7	37	147	569	1903
11	7	37	171	665	2463
12	7	37	179	761	2863
13	7	45	203	873	3423
14	7	45	251	1065	4223
15	7	45	251	1257	5183
16	9	49	257	1281	5913
17	9	57	305	1425	6393
18	9	61	341	1737	7633
19	9	61	365	1897	9153
20	9	69	389	2041	9905

```
For k = 3 To 23
    Range("a" & k).Value = k - 3
    m = Range("a" & k).Value
    x = 0
        For i = 1 To Int(Sqr(m))
        x = x + Int(Sqr(m - i ^ 2))
        Next
    Range("b" & k).Value = 1 + 2 * Int(Sqr(m))
    Range("c" & k).Value = 1 + 4 * Int(Sqr(m)) + 4 * x
Next

Range("d" & 3).Value = 1
For j = 4 To 23
y = 0
    For p = 1 To Int(Sqr(j - 3))
    y = y + Range("c" & j - p ^ 2).Value
    Next
Range("d" & j).Value = Range("c" & j).Value + 2 * y
Next

Range("e" & 3).Value = 1
For l = 4 To 23
Z = 0
    For q = 1 To Int(Sqr(l - 3))
    Z = Z + Range("d" & l - q ^ 2).Value
    Next
Range("e" & l).Value = Range("d" & l).Value + 2 * Z
Next

Range("f" & 3).Value = 1
For v = 4 To 23
t = 0
    For h = 1 To Int(Sqr(v - 3))
    t = t + Range("e" & v - h ^ 2).Value
    Next
Range("f" & v).Value = Range("e" & v).Value + 2 * t
Next
```