QUADRATO DI UN POLINOMIO DI SECONDO GRADO A COEFFICIENTI REALI

Valentina Fabbro

Abstract.

L'articolo presenta un criterio per stabilire se un polinomio di quarto grado a coefficienti in $\mathbb{R}$ sia lo sviluppo del quadrato di un polinomio di secondo grado a coefficienti in $\mathbb{R}$; in caso affermativo, esiste una formula generale per determinare tale polinomio di secondo grado a partire dai coefficienti del polinomio iniziale di quarto grado.
L'idea è nata a seguito di alcune osservazioni sul metodo euristico utilizzato dall'alunno Galatanu Razvan per rispondere al problema del mese di marzo 2014 pubblicato sul sito del Progetto Archimede.

Introduzione

L'articolo comincia con una serie di osservazioni che riguardano i coefficienti dello sviluppo del quadrato di un polinomio e la generalizzazione del metodo utilizzato da Razvan nella risoluzione che ha presentato per il quesito del progetto Archimede.

Da queste osservazioni si deduce che se un polinomio di quarto grado a coefficienti in $\mathbb{R}$ è lo sviluppo del quadrato di un polinomio di secondo grado, allora è possibile scrivere subito tale polinomio di secondo grado. Il problema diventa quindi stabilire se un polinomio di quarto grado sia o meno lo sviluppo del quadrato di un polinomio di secondo grado.

Nella sezione successiva si dimostra una condizione necessaria e sufficiente perchè un polinomio di quarto grado a coefficienti in $\mathbb{R}$ sia lo sviluppo del quadrato di un polinomio di secondo grado. Il risultato è stato ottenuto considerando il polinomio di quarto grado come una funzione e sfruttando la simmetria del suo grafico nel caso in cui sia lo sviluppo del quadrato di un polinomio di secondo grado.

1 Osservazioni sullo sviluppo del quadrato di un polinomio

Consideriamo il generico polinomio nella variabile x di grado n a coefficienti reali

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 \quad a_i \in \mathbb{R}.$$

Osserviamo nella tabella i coefficienti dello sviluppo di p_n^2 al crescere di n.

n	$\mathbf{p_n}$	$\mathbf{p_n^2}$
0	a_0	a_0^2
1	$a_1x + a_0$	$a_1^2x^2 + 2a_0a_1x + a_0^2$
2	$a_2x^2 + a_1x + a_0$	$a_2^2x^4 + 2a_1a_2x^3 + (a_1^2 + 2a_0a_2)x^2 + 2a_0a_1x + a_0^2$
3	$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$	$a_3^2x^6 + 2a_2a_3x^5 + (a_2^2 + 2a_1a_3)x^4 + (2a_1a_2 + 2a_0a_3)x^3 +$ $+(a_1^2 + 2a_0a_2)x^2 + 2a_0a_1x + a_0^2$
4	$a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$	$a_4^2x^8 + 2a_3a_4x^7 + (a_3^2 + 2a_2a_4)x^6 + (2a_2a_3 + 2a_1a_4)x^5 +$ $+(a_2^2 + 2a_1a_3 + 2a_0a_4)x^4 + (2a_1a_2 + 2a_0a_3)x^3 +$ $+(a_1^2 + 2a_0a_2)x^2 + 2a_0a_1x + a_0^2$
...	...	...

Tabella 1: Osservazioni sullo sviluppo del quadrato di un polinomio

Si osserva che all'aumentare del grado di p_n, nello sviluppo di p_n^2 compaiono invariati alcuni termini. In particolare, per il polinomio di grado n, lo sviluppo del suo quadrato presenta i termini fino al grado

$n-1$ identici ai termini dello stesso grado dello sviluppo del quadrato del polinomio di grado $n-1$. Quindi lo sviluppo di p_{n+1}^2 ha gli stessi coefficienti dello sviluppo di p_n^2 per i termini x_i con $i = 0, \ldots, n$ e cambia coefficiente dal termine x^{n+1}. Ci si può chiedere se al crescere di n ci sia una regola che determina il primo coefficiente che differisce dai precedenti sviluppi che sarà il nuovo coefficiente a ripetersi nello sviluppo successivo.

Nella seguente tabella riportiamo il primo coefficiente nuovo nello sviluppo di p_n^2 fino a $n = 8$.

grado n	**numero potenze di x in p_n^2**	**primo coefficiente nuovo**
0	1	a_0^2
1	3	$2a_0a_1$
2	5	$a_1^2 + 2a_0a_2$
3	7	$2a_0a_3 + 2a_1a_2$
4	9	$a_2^2 + 2a_0a_4 + 2a_1a_3$
5	11	$2a_0a_5 + 2a_1a_4 + 2a_2a_3$
6	13	$a_3^2 + 2a_0a_6 + 2a_1a_5 + 2a_2a_4$
7	15	$2a_0a_7 + 2a_1a_6 + 2a_2a_5 + 2a_3a_4$
8	17	$a_4^2 + 2a_0a_8 + 2a_1a_7 + 2a_2a_6 + 2a_3a_5$

Si può dedurre quindi la regola generale per il calcolo del primo nuovo coefficiente distinguendo fra il caso n pari e n dispari.

n pari $\Rightarrow$ il primo nuovo termine ha coefficiente $a_{\frac{n}{2}}^2 + 2\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} a_i a_{n-i}$

n dispari $\Rightarrow$ il primo nuovo termine ha coefficiente $2\sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} a_i a_{n-i}$

Esempio 1.

$\mathbf{n}$	$\mathbf{p_n}$	$\mathbf{p_n^2}$
0	4	16
1	$3x+4$	$9x^2+24x+16$
2	x^2+3x+4	$x^4+6x^3+17x^2+24x+16$
3	$-2x^3+x^2+3x+4$	$4x^6-4x^5-11x^4-10x^3+17x^2+24x+16$
4	$x^4-2x^3+x^2+3x+4$	$x^8-4x^7+6x^6+2x^5-3x^4-10x^3+17x^2+24x+16$
...	...	...

1.1 Caso $n = 2$: quadrato di un polinomio di secondo grado

Consideriamo più attentamente il caso $n = 2$.

$$\begin{aligned}(a_2x^2+a_1x+a_0)^2 &= a_2^2x^4+2a_1a_2x^3+(a_1^2+2a_0a_2)x^2+2a_0a_1x+a_0^2\\ &= a_2^2x^4+2a_1a_2x^3+a_1^2x^2+2a_0a_2x^2+2a_0a_1x+a_0^2\\ &= (a_2x^2+a_1x)^2+2a_0(a_2x^2+a_1x)+a_0^2\end{aligned}$$

Con la sostituzione $t = a_2x^2 + a_1x$ si ha che

$$(a_2x^2+a_1x+a_0)^2 = t^2+2a_0t+a_0^2 = (t+a_0)^2$$

Quindi con un opportuno cambio di variabile, p_2 è riconducibile ad un polinomio di primo grado nella nuova variabile t.

Razvan era arrivato per un'altra via alla stessa sostituzione. Il metodo da lui seguito si può generalizzare nel seguente modo. Consideriamo lo sviluppo del polinomio $p_2^2(x)$ come riportato nella tabella 1 e raccogliamo la x.

$$\begin{aligned}
p_2^2(x) &= a_2^2x^4 + 2a_1a_2x^3 + (a_1^2 + 2a_0a_2)x^2 + 2a_0a_1x + a_0^2 \\
&= x[a_2^2x^3 + 2a_1a_2x^2 + (a_1^2 + 2a_0a_2)x + 2a_0a_1] + a_0^2 \\
&= a_2^2x\left[x^3 + \frac{2a_1}{a_2}x^2 + \left(\frac{a_1^2}{a_2^2} + \frac{2a_0}{a_2}\right)x + \frac{2a_0a_1}{a_2^2}\right] + a_0^2
\end{aligned}$$

Il polinomio di terzo grado all'interno delle parentesi quadre si annulla per $x = -\dfrac{a_1}{a_2}$. Possiamo quindi applicare Ruffini per scomporre il polinomio.

$$\begin{array}{c|cccc|c}
 & 1 & \frac{2a_1}{a_2} & \frac{a_1^2}{a_2^2} + \frac{2a_0}{a_2} & & \frac{2a_0a_1}{a_2^2} \\
-\frac{a_1}{a_2} & & -\frac{a_1}{a_2} & -\frac{a_1^2}{a_2^2} & & -\frac{2a_0a_1}{a_2^2} \\
\hline
 & 1 & \frac{a_1}{a_2} & \frac{2a_0}{a_2} & & 0
\end{array}$$

Si può quindi continuare a raccogliere nel seguente modo

$$\begin{aligned}
p_2^2(x) &= a_2^2x\left(x + \frac{a_1}{a_2}\right)\left(x^2 + \frac{a_1}{a_2}x + \frac{2a_0}{a_2}\right) + a_0^2 \\
&= a_2^2x\left(x + \frac{a_1}{a_2}\right)\left[x\left(x + \frac{a_1}{a_2}\right) + \frac{2a_0}{a_2}\right] + a_0^2 \\
&= x\left(a_2x + a_1\right)\left[x\left(a_2x + a_1\right) + 2a_0\right] + a_0^2
\end{aligned}$$

Ponendo $t = x(a_2x + a_1) = a_2x^2 + a_1x$ si ottiene la stessa scomposizione di prima.

$$p_2^2(x) = t(t + 2a_0) + a_0^2 = t^2 + 2a_0t + a_0^2 = (t + a_0)^2$$

Esempio 2.

Consideriamo i due polinomi del problema del mese del progetto Archimede (vedi sitografia):
$x^4 + 6x^3 + 17x^2 + 24x + 16 = (x^2 + 3x + 4)^2$ (sviluppo del quadrato di un trinomio di secondo grado)
$x^4 - 8x^3 + 26x^2 - 40x + 24 = (x^2 - 4x + 6)(x - 2)^2$ (fattorizzabile ma non come sviluppo del quadrato di polinomio di secondo grado).
Lo svolgimento per la scomposizione è riportato nel file citato.

Esempio 3.

Consideriamo il polinomio $9x^4 - 12x^3 + 28x^2 - 16x + 16 = (3x^2 - 2x + 4)^2$. Se sappiamo già che il polinomio di quarto grado è lo sviluppo del quadrato di un polinomio di secondo grado, la sostituzione $t = a_2x^2 + a_1x$ ci permette di scrivere subito il polinomio di secondo grado $(t + a_0)^2$. Osserviamo dallo sviluppo quadrato di un polinomio di secondo grado riportato nella tabella 1 che possiamo calcolare i coefficienti a_0, a_1 e a_2 a partire dai coefficienti del polinomio di quarto grado risolvendo il sistema

$$\begin{cases}
a_0 = \pm\sqrt{16} \\
a_2 = \pm\sqrt{9} \\
2a_1a_2 = -12 \\
2a_0a_1 = -16
\end{cases}$$

Le terne di valori che soddisfano il sistema sono la terna $a_0 = 4$, $a_1 = -2$ e $a_2 = 3$ e la terna $a_0 = -4$, $a_1 = 2$ e $a_2 = -3$.

Ad analogo risultato si poteva pervenire utilizzando il procedimento di Razvan.

$$
\begin{aligned}
&9x^4 - 12x^3 + 28x^2 - 16x + 16 = x(9x^3 - 12x^2 + 28x - 16) + 16 = \\
&= x(3x-2)(3x^2 + 2x + 8) + 16 = x(3x-2)[x(3x-2) + 8] + 16 = \\
&= t(t+8) + 16 \quad \text{con } t = x(3x-2) \\
&= t^2 + 8t + 16 = (t+4)^2 = (3x^2 - 2x + 4)^2
\end{aligned}
$$

Esempio 4.

Consideriamo il polinomio $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 = (x^2 - 2x + 1)^2 = (x-1)^4$. Possiamo calcolare i coefficienti a_0, a_1 e a_2 a partire dai coefficienti del polinomio di quarto grado risolvendo il sistema

$$
\begin{cases}
a_0 = \pm\sqrt{1} \\
a_2 = \pm\sqrt{1} \\
2a_1a_2 = -4 \\
2a_0a_1 = -4
\end{cases}
$$

Le terne di valori che soddisfano il sistema sono la terna $a_0 = 1$, $a_1 = -2$ e $a_2 = 1$ e la terna $a_0 = -1$, $a_1 = 2$ e $a_2 = -1$.

Ad analogo risultato si poteva pervenire utilizzando il procedimento di Razvan.

$$
\begin{aligned}
&x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 = x(x^3 - 4x^2 + 6x - 4) + 1 = \\
&= x(x-2)(x^2 + 2x + 2) + 1 = x(x-2)[x(x-2) + 2] + 1 = \\
&= t(t+2) + 1 \quad \text{con } t = x(x-2) \\
&= t^2 + 2t + 1 = (t+1)^2 = (x^2 - 2x + 1)^2 = (x-1)^4
\end{aligned}
$$

Esempio 5.

Consideriamo il polinomio $x^4 - 12x^3 + 49x^2 - 78x + 40 = (x-1)(x-2)(x-4)(x-5)$. In questo caso il polinomio di quarto grado non è lo sviluppo del quadrato di un polinomio di secondo grado. Il sistema

$$
\begin{cases}
a_0 = \pm\sqrt{40} \\
a_2 = \pm\sqrt{1} \\
2a_1a_2 = -12 \\
2a_0a_1 = -78
\end{cases}
$$

non ammette infatti soluzioni.

Utilizzando il procedimento di Razvan si ottiene quanto segue.

$$
\begin{aligned}
&x^4 - 12x^3 + 49x^2 - 78x + 40 = x(x^3 - 12x^2 + 49x - 78) + 40 = \\
&= x(x-6)(x^2 - 6x + 13) + 40 = x(x-6)[x(x-6) + 13] + 40 = \\
&= t(t+13) + 40 \quad \text{con } t = x(x-6) \\
&= t^2 + 13t + 40 = (t+8)(t+5) = (x^2 - 6x + 8)(x^2 - 6x + 5) = (x-4)(x-2)(x-1)(x-5)
\end{aligned}
$$

1.2 Caso n qualunque: quadrato di un polinomio di grado n

Si osserva che un ragionamento analogo a quello esposto nella sezione precedente si può estendere a tutti i p_n, come si può vedere nella seguente tabella.

n	$\mathbf{p_n}$	$\mathbf{p_n^2}$
0	a_0	a_0^2
1	$a_1x + a_0$	$a_1^2x^2 + 2a_0(a_1x) + a_0^2 = (\underbrace{a_1x}_{t} + a_0)^2 = (t + a_0)^2$
2	$a_2x^2 + a_1x + a_0$	$(a_2x^2 + a_1x)^2 + 2a_0(a_2x^2 + a_1x) + a_0^2 =$ $= (\underbrace{a_2x^2 + a_1x}_{t} + a_0)^2 = (t + a_0)^2$
3	$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$	$(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x)^2 + 2a_0(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x) + a_0^2 =$ $= (\underbrace{a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x}_{t} + a_0)^2 = (t + a_0)^2$
4	$a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$	$(a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x)^2+$ $+2a_0(a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x) + a_0^2 =$ $= (\underbrace{a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x}_{t} + a_0)^2 = (t + a_0)^2$
...	...	...

Dalle precedenti osservazioni possiamo quindi costruire un ragionamento a ritroso: dato un polinomio di grado $2n = N$ sviluppo di un quadrato, è possibile determinare i coefficienti del polinomio di grado n che elevato al quadrato dà il polinomio di partenza.
Sia quindi $Q_N(x) = A_N x^N + \cdots + A_1 x + A_0$ lo sviluppo del quadrato del polinomio p_n , cioè

$$(p_n)^2 = Q_N \qquad \text{con } N = 2n, \text{ quindi } N \in \mathbb{P}.$$

Per determinare il polinomio p_n è necessario determinare i coefficienti a_i con $i = 0, \cdots, n$, cioè $n + 1$ coefficienti. Osservando la tabella 1, si nota che :

- $a_0 = \pm\sqrt{A_0}$;
- nel polinomio $p_n^2 = Q_N$ i coefficienti dei primi n termini $x^{2n}, \cdots, x^{n+1}$ bastano a determinare gli $a^n, \cdots, a_1$ del polinomio p_n.

Consideriamo il caso $n = 4$. Allora

$$\begin{aligned}
A_0 &= a_0^2 \quad \Rightarrow \quad a_0 = \pm\sqrt{A_0} \\
A_8 &= a_4^2 \quad \Rightarrow \quad a_4 = \pm\sqrt{A_8} \\
A_7 &= 2a_3a_4 \quad \Rightarrow \quad a_3 = \frac{A_7}{2a_4} \\
A_6 &= a_3^2 + 2a_2a_4 \quad \Rightarrow \quad a_2 = \frac{A_6 - a_3^2}{2a_4} \\
A_5 &= 2a_2a_3 + 2a_1a_4 \quad \Rightarrow \quad a_1 = \frac{A_5 - a_2a_3}{2a_4}
\end{aligned}$$

Osservazione Si osserva come le formule per determinare $a_n, \cdots, a_0$ siano simmetriche rispetto al coefficiente centrale A_n (vedi tabella 2). Questo non significa necessariamente che le coppie di coefficienti A_0 ed A_N, A_1 ed A_{N-1}, A_2 ed A_{N-2}, $\cdots$ debbano essere uguali. Ad esempio si ha che $x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 20x + 25 = (x^2 + 2x - 5)^2$, ma $A_0 \neq A_4$.

Tabella 2: Coefficienti di Q_N nel caso di $n = 2$, $n = 3$ ed $n = 4$.

grado	**coeff. di Q_N**	**coeff. di p_n specifico**	**coeff. di p_n generico**
$n = 2$	$A_4 = a_2^2$	$a_2 = \pm\sqrt{A_4}$	$a_n = \pm\sqrt{A_{2n}}$
	$A_3 = 2a_1a_2$	$a_1 = \frac{A_3}{2a_2}$	$a_{n-1} = \frac{A_{2n-1}}{2a_n}$
	$A_2 = a_1^2 + 2a_0a_2$	$a_0 = \frac{A_2 - a_1^2}{2a_2}$	$a_{n-2} = \frac{A_{2n-2} - a_{n-1}^2}{2a_n}$
	$A_2 = a_1^2 + 2a_0a_2$	$a_2 = \frac{A_2 - a_1^2}{2a_0}$	$a_2 = \frac{A_2 - a_1^2}{2a_0}$
	$A_1 = 2a_0a_1$	$a_1 = \frac{A_1}{2a_0}$	$a_1 = \frac{A_1}{2a_0}$
	$A_0 = a_0^2$	$a_0 = \pm\sqrt{A_0}$	$a_0 = \pm\sqrt{A_0}$
$n = 3$	$A_6 = a_3^2$	$a_3 = \pm\sqrt{A_6}$	$a_n = \pm\sqrt{A_{2n}}$
	$A_5 = 2a_2a_3$	$a_2 = \frac{A_5}{2a_3}$	$a_{n-1} = \frac{A_{2n-1}}{2a_n}$
	$A_4 = a_2^2 + 2a_1a_3$	$a_1 = \frac{A_4 - a_2^2}{2a_3}$	$a_{n-2} = \frac{A_{2n-2} - a_{n-1}^2}{2a_n}$
	$A_3 = 2a_1a_2 + 2a_0a_3$	$a_0 = \frac{A_3 - 2a_1a_2}{2a_3}$	$a_{n-3} = \frac{A_{2n-3} - 2a_{n-1}a_{n-2}}{2a_n}$
	$A_3 = 2a_1a_2 + 2a_0a_3$	$a_3 = \frac{A_3 - 2a_1a_2}{2a_0}$	$a_3 = \frac{A_3 - 2a_1a_2}{2a_0}$
	$A_2 = a_1^2 + 2a_0a_2$	$a_2 = \frac{A_2 - a_1^2}{2a_0}$	$a_2 = \frac{A_2 - a_1^2}{2a_0}$
	$A_1 = 2a_0a_1$	$a_1 = \frac{A_1}{2a_0}$	$a_1 = \frac{A_1}{2a_0}$
	$A_0 = a_0^2$	$a_0 = \pm\sqrt{A_0}$	$a_0 = \pm\sqrt{A_0}$
$n = 4$	$A_8 = a_4^2$	$a_4 = \pm\sqrt{A_8}$	$a_n = \pm\sqrt{A_{2n}}$
	$A_7 = 2a_3a_4$	$a_3 = \frac{A_7}{2a_4}$	$a_{n-1} = \frac{A_{2n-1}}{2a_n}$
	$A_6 = a_3^2 + 2a_2a_4$	$a_2 = \frac{A_6 - a_3^2}{2a_4}$	$a_{n-2} = \frac{A_{2n-2} - a_{n-1}^2}{2a_n}$
	$A_5 = 2a_2a_3 + 2a_1a_4$	$a_1 = \frac{A_5 - 2a_2a_3}{2a_4}$	$a_{n-3} = \frac{A_{2n-3} - 2a_{n-1}a_{n-2}}{2a_n}$
	$A_4 = a_2^2 + 2a_1a_3 + 2a_0a_4$	$a_0 = \frac{A_4 - a_2^2 - 2a_1a_3}{2a_4}$	$a_{n-4} = \frac{A_{2n-4} - a_{n-2}^2 - 2a_{n-3}a_{n-1}}{2a_n}$
	$A_4 = a_2^2 + 2a_1a_3 + 2a_0a_4$	$a_4 = \frac{A_4 - a_2^2 - 2a_3a_1}{2a_0}$	$a_4 = \frac{A_4 - a_2^2 - 2a_3a_1}{2a_0}$
	$A_3 = 2a_1a_2 + 2a_0a_3$	$a_3 = \frac{A_3 - 2a_1a_2}{2a_0}$	$a_3 = \frac{A_3 - 2a_1a_2}{2a_0}$
	$A_2 = a_1^2 + 2a_0a_2$	$a_2 = \frac{A_2 - a_1^2}{2a_0}$	$a_2 = \frac{A_2 - a_1^2}{2a_0}$
	$A_1 = 2a_0a_1$	$a_1 = \frac{A_1}{2a_0}$	$a_1 = \frac{A_1}{2a_0}$
	$A_0 = a_0^2$	$a_0 = \pm\sqrt{A_0}$	$a_0 = \pm\sqrt{A_0}$

Esempio 6.

Consideriamo i polinomi degli esempi precedenti che già sappiamo essere lo sviluppo del quadrato di un polinomio di secondo grado

$$x^4 + 6x^3 + 17x^2 + 24x + 16, \quad 9x^4 - 12x^3 + 28x^2 - 16x + 16 \quad \text{e} \quad x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1.$$

Allora per il primo polinomio abbiamo che

$$\begin{aligned} a_0 &= \pm\sqrt{A_0} = \pm\sqrt{16} = \pm 4 \\ a_1 &= \frac{A_1}{2a_0} = \frac{24}{\pm 8} = \pm 3 \\ a_2 &= \frac{A_2 - a_1^2}{2a_0} = \frac{17-9}{\pm 8} = \pm 1 \end{aligned}$$

per il secondo

$$\begin{aligned} a_0 &= \pm\sqrt{A_0} = \pm\sqrt{16} = \pm 4 \\ a_1 &= \frac{A_1}{2a_0} = \frac{-16}{\pm 8} = \mp 2 \\ a_2 &= \frac{A_2 - a_1^2}{2a_0} = \frac{28-4}{\pm 8} = \pm 3 \end{aligned}$$

mentre per il terzo

$$\begin{aligned} a_0 &= \pm\sqrt{A_0} = \pm\sqrt{1} = \pm 1 \\ a_1 &= \frac{A_1}{2a_0} = \frac{-4}{\pm 2} = \mp 2 \\ a_2 &= \frac{A_2 - a_1^2}{2a_0} = \frac{6-4}{\pm 2} = \pm 1 \end{aligned}$$

Abbiamo quindi trovato i polinomi di secondo grado che elevati al quadrato danno i rispettivi polinomi di quato grado.

$$\begin{aligned} &x^4 + 6x^3 + 17x^2 + 24x + 16 = (\pm x^2 \pm 3x \pm 4)^2 \\ &9x^4 - 12x^3 + 28x^2 - 16x + 16 = (\pm 3x^2 \mp 2x \pm 4)^2 \\ &x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 = (\pm x^2 \mp 2x \pm 1)^2 = (\pm x \mp 1)^4 \end{aligned}$$

2 Condizione necessaria e sufficiente per lo sviluppo del quadrato di un polinomio di secondo grado a coefficienti in $\mathbb{R}$

Abbiamo visto come lo sviluppo del quadrato di un polinomio evidenzi delle regolarità nei coefficienti che permettono di determinare velocemente i coefficienti del polinomio da prendere come base della potenza. Resta quindi da capire se dato un polinomio di quarto grado esista un criterio per poter stabilire quando tale polinomio è lo sviluppo del quadrato di un polinomio di secondo grado.

L'idea per rispondere a questa domanda consiste nel considerare il polinomio di quarto grado come una funzione di quarto grado. Si sfrutta poi il fatto che le funzioni polinomiali di quarto grado che sono lo sviluppo del quadrato di una funzione di secondo grado, il cui supporto è una parabola, hanno il grafico simmetrico rispetto ad un asse verticale (figura 1).

Se il grafico di una funzione è simmetrico rispetto ad un asse verticale, allora esiste una traslazione che rende la funzione pari, cioè con il grafico simmetrico ripetto all'asse y. In questa forma la funzione deve contenere solo potenze di grado pari della variabile. Traslando la funzione di quarto grado in modo che l'asse y sia l'asse di simmetria, la funzione diventa quindi pari.

Nel caso di una funzione di quarto grado che è lo sviluppo di un quadrato di una funzione di secondo grado, una volta applicata l'eventuale opportuna traslazione per renderla pari, la funzione avrà la forma

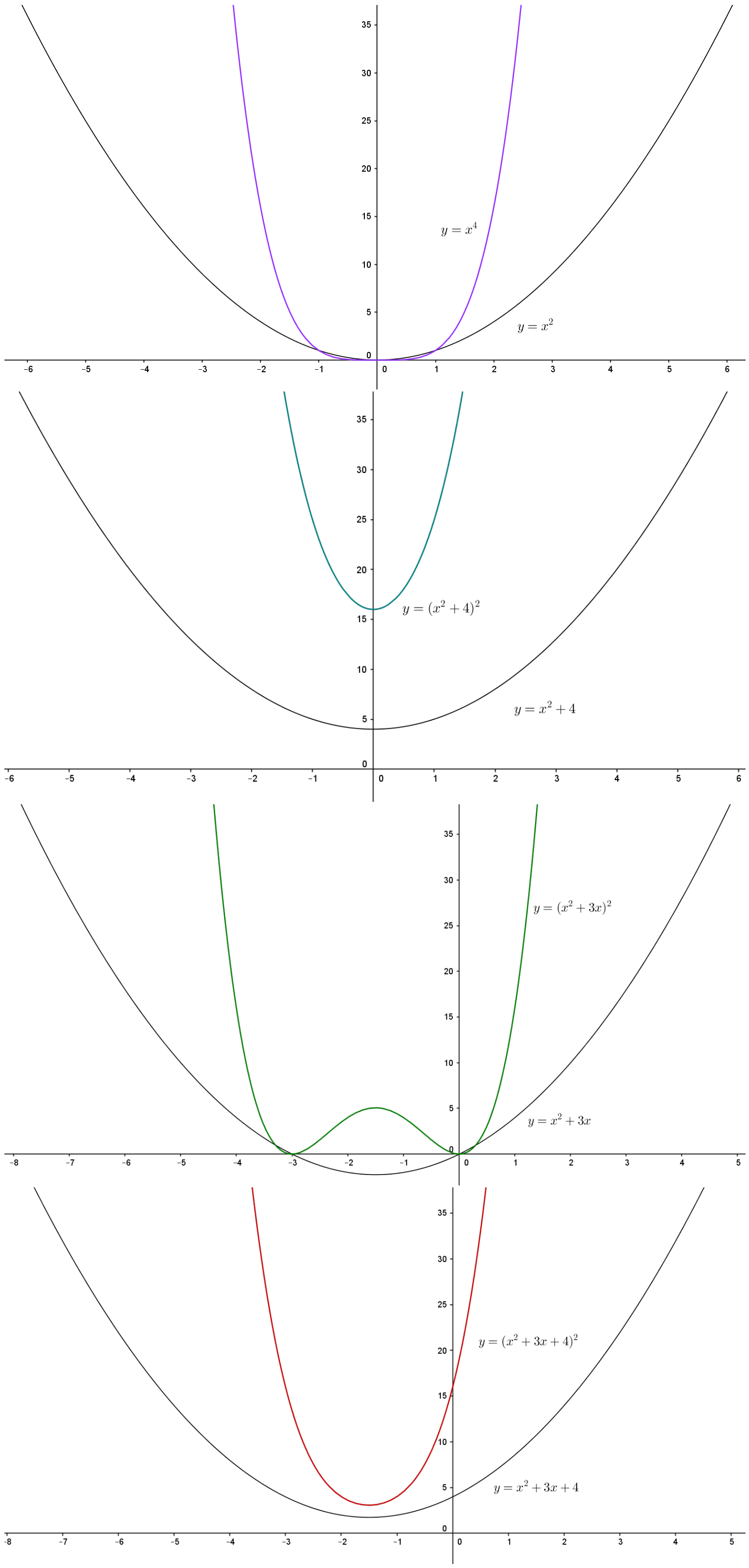

Figura 1: Grafici di funzioni polinomiali di secondo grado e del loro quadrato

di una biquadratica il cui discriminante è nullo. Considerando come funzione un generico polinomio di quarto grado traslato, si possono quindi imporre le condizioni di simmetria rispetto all'asse y e imporre che il discriminante dell'equazione biquadratica associata alla funzione pari di quarto grado sia nullo. In questo modo si trovano delle condizioni sui parametri e sul vettore traslazione.

2.1 Condizione necessaria

Teorema 1 (Condizione necessaria)**.** *Dato il polinomio a coefficienti reali $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, se il polinomio è lo sviluppo del quadrato del trinomio $(Ax^2 + Bx + C)^2$ a coefficienti reali allora*

$$d = -\frac{b}{2a} \cdot \frac{\Delta}{4a} \quad \textit{ed} \quad e = \frac{\Delta^2}{(4a)^3} \qquad \textit{con} \qquad \Delta = b^2 - 4ac$$

Dimostrazione. Consideriamo il polinomio di quarto grado come una funzione $g(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ e supponiamo per ipotesi che $g(x) = (Ax^2 + Bx + C)^2$. Il grafico di una funzione polinomiale di secondo grado è simmetrico rispetto ad un asse verticale e il quadrato della funzione di secondo grado è ancora una funzione che ha il grafico simmetrico rispetto allo stesso asse verticale. Consideriamo quindi la generica traslazione $\tau_{\vec{v}}$ di vettore $\vec{v}$ lungo l'asse x e la sua inversa $\tau_{\vec{v}}^{-1}$

$$\tau_{\vec{v}} = \begin{cases} X = x + v \\ Y = y \end{cases} \qquad\qquad \tau_{\vec{v}}^{-1} = \begin{cases} x = X - v \\ y = Y \end{cases} \tag{1}$$

Applichiamo $\tau_{\vec{v}}$ al polinomio di quarto grado per ottenere l'equazione della funzione traslata.

$$\begin{aligned} &Y = a(X-v)^4 + b(X-v)^3 + c(X-v)^2 + d(X-v) + e = \ldots = \\ &= aX^4 + (b-4av)X^3 + (6av^2 - 3bv + c)X^2 + (-4av^3 + 3bv^2 - 2cv + d)X + av^4 - bv^3 + cv^2 - dv + e \end{aligned} \tag{2}$$

Imponiamo che i coefficienti dei termini di grado dispari siano nulli in modo da rendere pari la funzione traslata.

$$\begin{cases} b - 4av = 0 \\ -4av^3 + 3bv^2 - 2cv + d = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} v = \dfrac{b}{4a} \\[2ex] d = \dfrac{bc}{2a} - \dfrac{b^3}{8a^2} \end{cases}$$

Osserviamo che l'espressione trovata per d è quella espressa nella tesi: $d = \dfrac{bc}{2a} - \dfrac{b^3}{8a^2} = -\dfrac{b}{2a} \cdot \dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$. Sostituendo i valori trovati per v e d in (2) si ottiene la funzione

$$Y = aX^4 + \left(c - \frac{3}{8}\frac{b^2}{a}\right)X^2 + \frac{5}{4^4}\frac{b^4}{a^3} - \frac{1}{16}\frac{b^2c}{a^2} + e$$

Affermare che questa funzione biquadratica è il risultato del quadrato di una funzione di secondo grado equivale ad affermare che è nullo il discriminante dell'equazione associata alla funzione biquadratica. Imponiamo pertanto questa condizione.

$$\Delta = \left(c - \frac{3}{8}\frac{b^2}{a}\right)^2 - 4a\left(\frac{5}{4^4}\frac{b^4}{a^3} - \frac{1}{16}\frac{b^2c}{a^2} + e\right) = c^2 + \frac{1}{16}\frac{b^4}{a^2} - \frac{1}{2}\frac{b^2c}{a} - 4ae$$

$$\Delta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e = \frac{16a^2c^2 + b^4 - 8ab^2c}{64a^3} \quad \Leftrightarrow \quad e = \frac{(b^2-4ac)^2}{(4a)^3} = \frac{\Delta^2}{(4a)^3}$$

$\square$

2.2 Condizione sufficiente

Ci proponiamo ora di verificare che le espressioni determinate per d ed e rappresentano anche una condizione sufficiente per affermare che un polinomio di quarto grado a coefficienti in $\mathbb{R}$ è lo sviluppo del quadrato di un polinomio di secondo grado a coefficienti in $\mathbb{R}$.

Teorema 2 (Condizione sufficiente). *Dato il polinomio a coefficienti reali $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, se $d = -\frac{b}{2a} \cdot \frac{\Delta}{4a}$ ed $e = \frac{\Delta^2}{(4a)^3}$ allora $\exists A, B, C \in \mathbb{R}$ tale che $(Ax^2 + Bx + C)^2 = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$. Si ha inoltre che le terne di valori che soddisfano il teorema sono $A = \sqrt{a}$, $B = \frac{b}{2\sqrt{a}}$ e $C = -\frac{\Delta}{8a\sqrt{a}}$ oppure $A = -\sqrt{a}$, $B = -\frac{b}{2\sqrt{a}}$ e $C = \frac{\Delta}{8a\sqrt{a}}$.*

Dimostrazione. Sostituiamo al polinomio generico $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ le espressioni per i parametri d ed e; otteniamo il polinomio

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 - \frac{b(b^2 - 4ac)}{8a^2}x + \frac{(b^2 - 4ac)^2}{64a^3}. \tag{3}$$

D'altro canto, sviluppiamo il quadrato del trinomio di secondo grado

$$\begin{aligned}(Ax^2 + Bx + C)^2 &= A^2x^4 + B^2x^2 + C^2 + 2ABx^3 + 2ACx^2 + 2BCx \\ &= A^2x^4 + 2ABx^3 + (B^2 + 2AC)x^2 + 2BCx + C^2 \end{aligned} \tag{4}$$

Imponiamo ora l'uguaglianza dei coefficienti dei termini corrispondenti dei polinomi (3) e (4).

$$\begin{cases} A^2 = a \\ 2AB = b \\ B^2 + 2AC = c \\ 2BC = -\dfrac{b\Delta}{8a^2} \\ C^2 = \dfrac{\Delta^2}{64a^3} \end{cases}$$

Dalla prima e dalla seconda equazione si ricava facilmente che $A = \pm\sqrt{a}$ e $B = \pm\frac{b}{2\sqrt{a}}$. Dall'ultima equazione del sistema si ricava che $C = \frac{|\Delta|}{8a\sqrt{a}}$.
Il valore assoluto del discriminante porta a due possibili soluzioni per C:

$$C = \begin{cases} -\dfrac{\Delta}{8a\sqrt{a}} \\ \dfrac{\Delta}{8a\sqrt{a}} \end{cases}$$

La terza equazione del sistema è soddisfatta scegliendo A e C con segni discordi, mentre la quarta equazione del sistema è soddisfatta scegliendo B e C discordi. Pertanto le terne di valori trovati sono $A = \sqrt{a}$, $B = \frac{b}{2\sqrt{a}}$ e $C = -\frac{\Delta}{8a\sqrt{a}}$ oppure $A = -\sqrt{a}$, $B = -\frac{b}{2\sqrt{a}}$ e $C = \frac{\Delta}{8a\sqrt{a}}$.

Si è quindi dimostrato che dato un polinomio di quarto grado i cui coefficienti soddisfano le ipotesi, esistono dei coefficienti reali A, B e C definiti come sopra tali che

$$(Ax^2 + Bx + C)^2 = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e.$$

In particolare, sostituendo i valori trovati si ha che

$$\left(\sqrt{a}x^2 + \frac{b}{2\sqrt{a}}x - \frac{\Delta}{8a\sqrt{a}}\right)^2 = \left(-\sqrt{a}x^2 - \frac{b}{2\sqrt{a}}x + \frac{\Delta}{8a\sqrt{a}}\right)^2 = ax^4 + bx^3 + cx^2 - \frac{b\Delta}{8a^2}x + \frac{\Delta^2}{(4a)^3}.$$

□

2.3 Esempi ed osservazioni

Esempio 7.

Consideriamo i seguenti polinomi di quarto grado fra cui ci sono quelli degli esempi precedenti e applichiamo il criterio per stabilire se sono o meno lo sviluppo del quadrato di un polinomio di secondo grado.

(a) $x^4 + 6x^3 + 17x^2 + 24x + 16 = (x^2 + 3x + 4)^2$

$$-\frac{b}{2a} \cdot \frac{\Delta}{4a} = -\frac{6}{2} \cdot \frac{-32}{4} = 24 = d \qquad \text{e} \qquad \frac{(\Delta)^2}{(4a)^3} = \frac{(-32)^2}{4^3} = 16 = e$$

Per il teorema 2 $A = \pm\sqrt{a} = \pm 1$, $B = -\dfrac{b}{2\sqrt{a}} = \pm 3$ e $C = \dfrac{\Delta}{8a\sqrt{a}} = \pm 4$.

(b) $x^4 - 8x^3 + 26x^2 - 40x + 24 = (x^2 - 4x + 6)(x - 2)^2$

$$-\frac{b}{2a} \cdot \frac{\Delta}{4a} = -\frac{-8}{2} \cdot \frac{-40}{4} = -40 = d \qquad \text{e} \qquad \frac{(\Delta)^2}{(4a)^3} = \frac{(-40)^2}{4^3} = 25 \neq 24 = e$$

(c) $9x^4 - 12x^3 + 28x^2 - 16x + 16 = (3x^2 - 2x + 4)^2$

$$-\frac{b}{2a} \cdot \frac{\Delta}{4a} = -\frac{-12}{18} \cdot \frac{-864}{36} = -16 = d \qquad \text{e} \qquad \frac{(\Delta)^2}{(4a)^3} = \frac{(-864)^2}{36^3} = 16 = e$$

Per il teorema 2 $A = \pm\sqrt{a} = \pm 3$, $B = -\dfrac{b}{2\sqrt{a}} = \mp 2$ e $C = \dfrac{\Delta}{8a\sqrt{a}} = \pm 4$.

(d) $x^4 - 8x^3 + 17x^2 + 2x - 24 = (x + 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)$

$$-\frac{b}{2a} \cdot \frac{\Delta}{4a} = -\frac{-8}{2} \cdot \frac{-4}{4} = 4 \neq 2 = d \qquad \text{e} \qquad \frac{(\Delta)^2}{(4a)^3} = \frac{(-4)^2}{4^3} = \frac{1}{4} \neq -24 = e$$

(e) $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 = (x^2 - 2x + 1)^2 = (x - 1)^4$

$$-\frac{b}{2a} \cdot \frac{\Delta}{4a} = -\frac{-4}{2} \cdot \frac{-8}{4} = -4 = d \qquad \text{e} \qquad \frac{(\Delta)^2}{(4a)^3} = \frac{(-8)^2}{4^3} = 1 = e$$

Per il teorema 2 $A = \pm\sqrt{a} = \pm 1$, $B = -\dfrac{b}{2\sqrt{a}} = \mp 2$ e $C = \dfrac{\Delta}{8a\sqrt{a}} = \pm 1$.

Osservazione 1.

La condizione $d = -\dfrac{b}{2a} \cdot \dfrac{\Delta}{4a}$ rappresenta la condizione di simmetria rispetto ad un asse verticale. Pertanto è soddisfatta dai polinomi di quarto grado il cui grafico sia simmetrico rispetto ad un asse verticale, indipendentemente dal fatto che siano lo sviluppo del un quadrato di polinomio di secondo grado.

Esempio 8.

L'equazione $x^4 - 12x^3 + 49x^2 - 78x + 40 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)(x-2)(x-4)(x-5) = 0$ è associata ad una funzione polinomiale di quarto grado con grafico simmetrico rispetto alla retta $x = 3$ come si vede nella figura 2. Svolgendo i calcoli si vede che la condizione su d è soddisfatta dai coefficienti mentre quella su e non lo è.

$$-\frac{b}{2a} \cdot \frac{\Delta}{4a} = \frac{12}{2}\frac{-52}{4} = -78 = d \qquad \text{e} \qquad \frac{(\Delta)^2}{(4a)^3} = \frac{(-52)^2}{4^3} = \frac{169}{4} \neq 40 = e$$

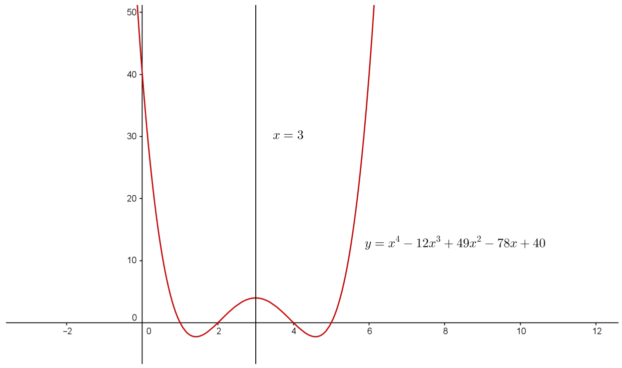

Figura 2: Grafico della funzione $y = x^4 - 12x^3 + 49x^2 - 78x + 40 = 0$ simmetrica rispetto l'asse $x = 3$.

Osservazione 2.

Consideriamo la relazione (2) e proviamo a scomporre il coefficiente del termine di primo grado dividendolo per $b - 4av$.

$$
\begin{array}{cccc|l}
-4av^3 & +3bv^2 & -2cv & +d & -4av \quad +b \\ \cline{5-5}
+4av^3 & -bv^2 & & & v^2 \quad -\dfrac{b}{2a}v \quad -\dfrac{1}{4a}\dfrac{b^2-4ac}{2a} \\ \cline{1-4}
 & 2bv^2 & -2cv & +d & \\
 & -2bv^2 & +\dfrac{b^2}{2a}v & & \\ \cline{2-4}
 & & \dfrac{b^2-4ac}{2a}v & +\mathrm{d} & \\
 & & -\dfrac{b^2-4ac}{2a}v & \dfrac{b}{4a}\dfrac{b^2-4ac}{2a} & \\ \cline{3-4}
 & & & d+\dfrac{b}{4a}\dfrac{b^2-4ac}{2a} &
\end{array}
$$

Si osserva che la divisione è esatta se e solo se $d = -\dfrac{b}{2a}\dfrac{\Delta}{4a}$, cioè il valore da attribuire a d trovato nel teorema 1 che corrisponde alla condizione di simmetria.
Si ha quindi

$$
\begin{aligned}
Y \quad = \quad & aX^4 + (b-4av)X^3 + (6av^2 - 3bv + c)X^2 + (b-4av)\left(v^2 + \frac{b}{2a}v - \frac{1}{4a}\frac{b^2-4ac}{2a}\right)X + \\
& + av^4 - bv^3 + cv^2 - dv + e.
\end{aligned}
$$

Se supponiamo che valga anche la condizione $e = \dfrac{\Delta^2}{(4a)^3}$, allora possiamo scrivere per il teorema 2

$$
\begin{aligned}
Y \quad = \quad & aX^4 + (b-4av)X^3 + (6av^2 - 3bv + c)X^2 + \frac{1}{\sqrt{a}}(b-4av)\left(\sqrt{a}v^2 + \frac{b}{2\sqrt{a}}v - \frac{b^2-4ac}{8a\sqrt{a}}\right)X + \\
& + \left(\sqrt{a}v^2 + \frac{b}{2\sqrt{a}}v - \frac{b^2-4ac}{8a\sqrt{a}}\right)^2.
\end{aligned}
$$

Quindi se il polinomio di quarto grado è lo sviluppo del quadrato di un polinomio di secondo grado, allora quest'ultimo compare come fattore nel coefficiente del termine di primo grado del polinomio traslato.

Esempio 9.

Consideriamo la funzione polinomiale di quarto grado $y = 9x^4 - 12x^3 + 28x^2 - 16x + 16 = (3x^2 - 2x + 4)^2$ e applichiamo la traslazione τ definita dalla (1). Abbiamo che

$$Y = 9X^4 + 12X^3(3v - 1) + 2X^2(27v^2 - 18v + 14) + 4X(3v - 1)(3v^2 - 2v + 4) + 9v^4 - 12v^3 + 28v^2 - 16v + 16.$$

In questo caso il polinomio di secondo grado compare nella scomposizione del coefficiente del termine di primo grado.

Esempio 10.

Consideriamo la funzione $y = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 = (x^2 - 2x + 1)^2 = (x - 1)^2$ e applichiamo la traslazione τ definita dalla (1). Abbiamo che

$$Y = X^4 + 4X^3(v - 1) + 6X^2(v - 1)^2 + 4X(v - 1)^3 + (v - 1)^4.$$

Anche in questo caso il polinomio di secondo grado compare nella scomposizione del coefficiente del termine di primo grado.

Esempio 11.

Consideriamo la funzione $y = x^4 - 8x^3 + 26x^2 - 40x + 24 = (x^2 - 4x + 6)(x - 2)^2$ e applichiamo la traslazione τ definita dalla (1). Abbiamo che

$$Y = X^4 + 4X^3(v - 2) + 2X^2(3v^2 - 12v + 13)^2 + 4X(v - 2)(v^2 - 4v + 5) + v^4 - 8v^3 + 26v^2 - 40v + 24.$$

In questo caso il polinomio di quarto grado non è lo sviluppo del quadrato di un polinomio di secondo grado.

3 Conclusioni e possibili sviluppi

Nell'articolo abbiamo trovato un criterio per stabilire se un polinomio di quarto grado a coefficienti reali è lo sviluppo del quadrato di un polinomio di secondo grado. Dall'analisi fatta e dagli esempi sono emerse anche interessanti osservazioni fra la simmetria dei grafici e la corrispondente parte algebrica.

I risultati ottenuti sollevano una serie di questioni che possono servire da spunto per lavori futuri.

- La teoria è presentata per polinomi completi ma sarebbe interessante capire se succede qualcosa di particolare per i polinomi incompleti.
- Nell'impostazione del problema cosiderato abbiamo determinato delle condizioni per d ed e in funzione dei coefficienti a, b e c; potrebbe essere interessante vedere se è possibile esprimere facilmente le stesse condizioni per a e b in funzione dei coefficienti c, d ed e per valutare qual è la formulazione migliore.
- Si potrebbe cercare una relazione più diretta fra le caratteristiche della parabola (vertice, asse, ...) e le condizioni trovate sui coefficienti.
- Si può approfondire l'osservazione 2 cercando di interpretare più esplicitamente delle relazioni con il grafico della parabola.
- Sembra fattibile lo studio di potenze dispari di trinomi di secondo grado cercando di sfruttare le simmetrie del grafico delle funzioni dispari.
- E' naturale chiedersi come il risultato ottenuto si possa adattare a polinomi di quarto grado a coefficienti in $\mathbb{C}$.
- Infine si potrebbe analizzare il caso più generale di potenze pari di trinomi di secondo grado.

Sitografia

http://www.archimedeproject.isisspieve.it/archimede/archivio/problema_del_mese/file/razvan_marzo14.pdf