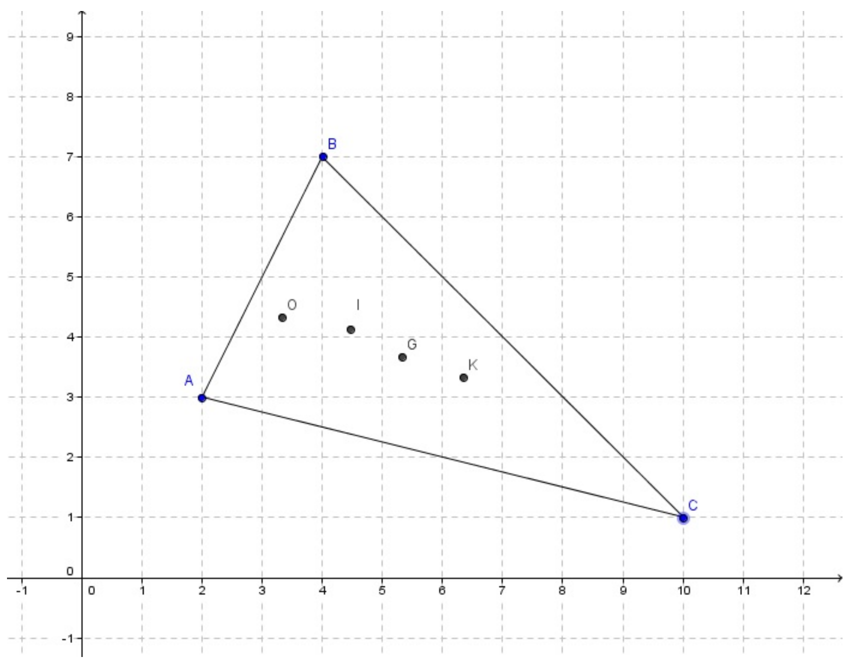
L'ELEGANZA NEI PUNTI NOTEVOLI DI UN TRIANGOLO

Prof. Fabio Breda

Abstract. *Lo scopo di questo articolo è dimostrare le elegantissime formule cartesiane dei quattro punti notevoli del triangolo.*

Il baricentro, l'incentro, il circocentro e l'ortocentro sono punti del triangolo che tutti gli studenti conoscono molto bene. Ci sono delle formule per determinarne le loro coordinate cartesiane molto eleganti che sono meno note e che in questo articolo dimostrerò.

Dato il triangolo ABC in figura



con $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ e $C(x_C; y_C)$, $a = BC$, $b = AC$ e $c = AB$ i tre lati e α, β e γ i tre angoli in A, B e C,

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right) \qquad \text{BARICENTRO}$$

$$I\left(\frac{ax_A + bx_B + cx_C}{a + b + c}; \frac{ay_A + by_B + cy_C}{a + b + c}\right) \qquad \text{INCENTRO}$$

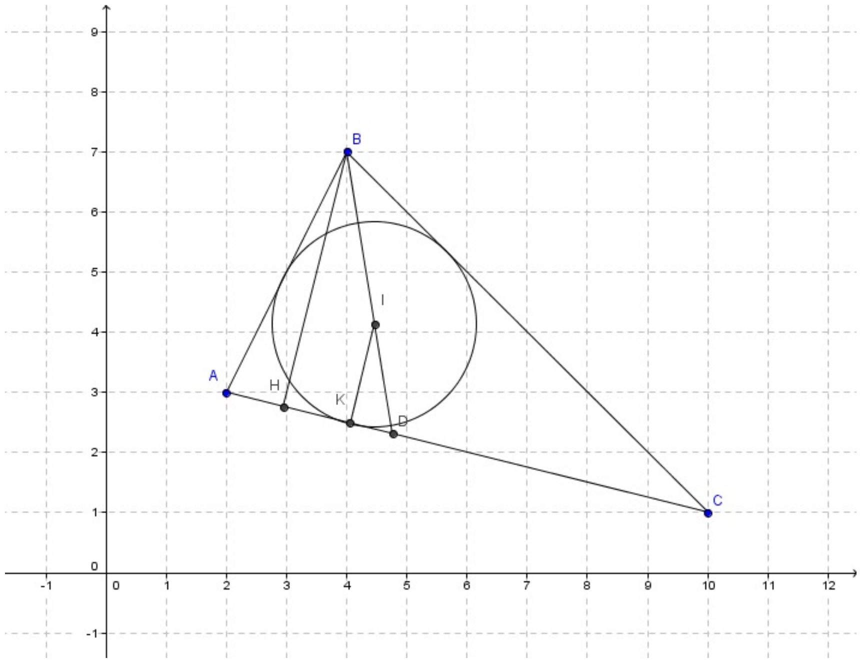
$$K\left(\frac{x_A \sin 2\alpha + x_B \sin 2\beta + x_C \sin 2\gamma}{\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma}; \frac{y_A \sin 2\alpha + y_B \sin 2\beta + y_C \sin 2\gamma}{\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma}\right) \qquad \text{CIRCOCENTRO}$$

$$O\left(\frac{x_A \tan\alpha + x_B \tan\beta + x_C \tan\gamma}{\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma}; \frac{y_A \tan\alpha + y_B \tan\beta + y_C \tan\gamma}{\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma}\right) \qquad \text{ORTOCENTRO}$$

Si nota subito una straordinaria similitudine di forma delle quattro formule. La formula e la dimostrazione del baricentro sono note a tutti in quanto riportata in tutti i libri di testo, procediamo invece a dimostrare le altre tre.

1 L'INCENTRO

Dato il triangolo ABC in figura



con $A(x_A; y_A)$, $A(x_B; y_B)$ e $A(x_C; y_C)$ vertici del triangolo, $D(x_D; y_D)$ piede della bisettrice sul lato AC, $I(x_I; y_I)$ incentro del triangolo, $H(x_H; y_H)$ piede della perpendicolare condotta da B al lato AC e $K(x_K; y_K)$ piede della perpendicolare condotta da I al lato AC. Chiamiamo $AB = c$, $AC = b$ e $BC = a$ i lati del triangolo.

Per il teorema delle bisettrici possiamo dire che $\dfrac{AD}{DC} = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{c}{a}$. Ma vale anche $\dfrac{AD}{DC} = \dfrac{x_D - x_A}{x_C - x_D}$ per il teorema di Talete, quindi, confrontando i due risultati, otteniamo

$$\frac{x_D - x_A}{x_C - x_D} = \frac{c}{a} \qquad \Rightarrow \qquad x_D = \frac{ax_A + cx_C}{a + c}$$

in modo analogo possiamo ricavare l'ordinata di D e quindi concludere che

$$\begin{cases} x_D = \dfrac{ax_A + cx_C}{a + c} \\ y_D = \dfrac{ay_A + cy_C}{a + c} \end{cases}$$

Si osserva, poi, che BH risulta essere l'altezza del triangolo ABC e quindi, chiamata A l'area di ABC, si ha che $BH = \dfrac{2A}{b}$. Si osserva anche che IK è il raggio della circonferenza inscritta al triangolo e quindi, chiamato p il perimetro di ABC si ha $IK = \dfrac{2A}{p}$. I triangoli BHD e IKD sono simili e quindi vale $\dfrac{BD}{ID} = \dfrac{BH}{IK} = \dfrac{2A}{b} : \dfrac{2A}{p} = \dfrac{p}{b}$. Ora

$$\frac{BI}{ID} = \frac{BD - ID}{ID} = \frac{BD}{ID} - 1 = \frac{p}{b} - 1 = \frac{p - b}{b} = \frac{a + c}{b}$$

Per il teorema di Talete vale $\dfrac{BI}{ID} = \dfrac{x_I - x_B}{x_D - x_I}$ quindi, confrontando i due risultati otteniamo

$$\frac{x_I - x_B}{x_D - x_I} = \frac{a + c}{b} \qquad \Rightarrow \qquad x_I = \frac{(a + c)x_D + bx_B}{a + b + c}$$

ora sostituendo i valori ci x_D trovati sopra otteniamo:

$$x_I = \frac{(a+c)x_D + bx_B}{a+b+c} = \frac{(a+c)\left(\dfrac{ax_A + cx_C}{a+c}\right) + bx_B}{a+b+c} \qquad \Rightarrow \qquad x_I = \frac{ax_A + bx_B + cx_C}{a+b+c}$$

Si procede in modo analogo per trovare anche l'ordinata dell'incentro concludendo così che

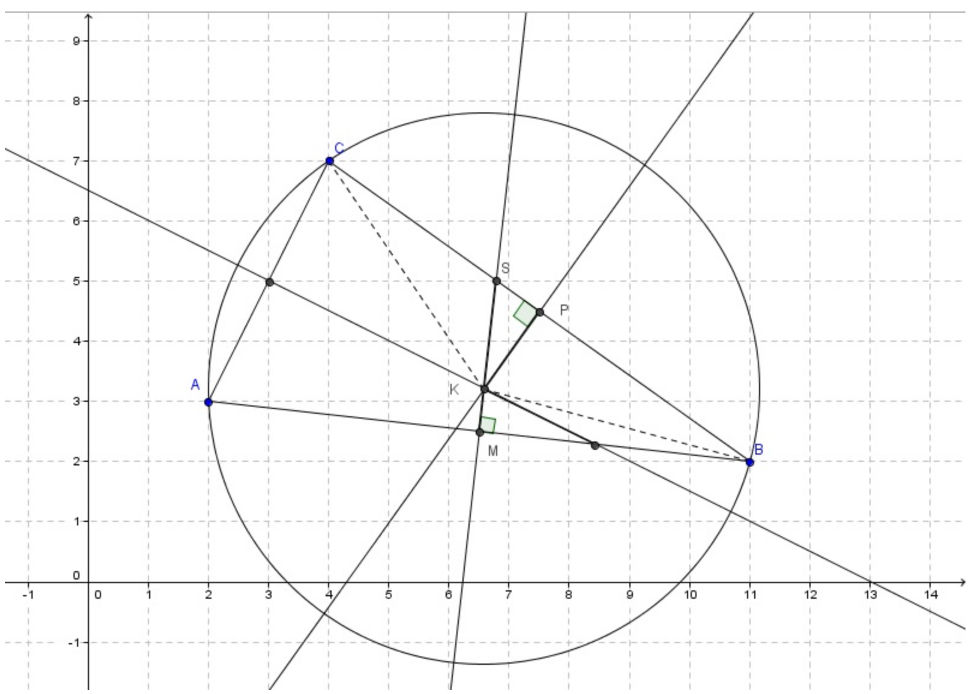
$$\begin{cases} x_I = \dfrac{ax_A + bx_B + cx_C}{a+b+c} \\ \\ y_I = \dfrac{ay_A + by_B + cy_C}{a+b+c} \end{cases}$$

cioè

$$I\left(\frac{ax_A + bx_B + cx_C}{a+b+c}; \frac{ay_A + by_B + cy_C}{a+b+c}\right)$$

2 IL CIRCOCENTRO

Dato il triangolo ABC in figura



con A, B, C, M, S, K, P come in figura, $AB = c$, $AC = b$ e $BC = a$ i lati del triangolo ed α, β e γ i tre angoli in A, B e C. Cerchiamo le coordinate del circocentro che risulta essere il punto di intersezione degli assi dei lati del triangolo e anche il centro della circonferenza circoscritta al triangolo. Cominciamo osservando che l'angolo COB misura 2α poichè è un angolo al centro che insiste sulla corda CB e quindi è il doppio dell'angolo $CAB = \alpha$ che un suo corrispondente angolo alla circonferenza. Quindi l'angolo PKB misura α poichè il triangolo CKB è isoscele.

L'angolo SKP misura β in quanto il triangolo SKP è simile al triangolo MSB.

Quindi $\dfrac{PS}{PB} = \dfrac{KP\tan\beta}{KP\tan\alpha} = \dfrac{\tan\beta}{\tan\alpha}$. Per il teorema di Talete $\dfrac{PS}{PB} = \dfrac{x_P - x_S}{x_B - x_P}$ e confrontando i due risultati abbiamo che $\dfrac{x_P - x_S}{x_B - x_P} = \dfrac{\tan\beta}{\tan\alpha}$ e da questa uguaglianza otteniamo

$$x_S = \frac{x_B(\tan\alpha - \tan\beta) + x_C(\tan\alpha + \tan\beta)}{2\tan\alpha}$$

Ora si osserva che $KP = \dfrac{a}{2\tan\alpha}$, questo perchè l'area del triangolo CKB la si può calcolare sia con la formula $\dfrac{1}{2}CK^2\sin 2\alpha$ sia con la formula $\dfrac{1}{2}aKP$. Quindi $KP = \dfrac{CK^2\sin 2\alpha}{a}$. Ma CK è il raggio della circonferenza circoscritta al triangolo e quindi per una nota formula $CK = \dfrac{abc}{4A}$ con A area del triangolo ABC e si può calcolare con la formula $A = \dfrac{1}{2}bc\sin\alpha$. Dunque

$$KP = \frac{CK^2\sin 2\alpha}{a} = \frac{\sin 2\alpha}{a}\cdot\frac{a^2b^2c^2}{16A^2} = \frac{a}{2\tan\alpha}$$

In modo analogo posso ricavare $KM = \dfrac{c}{2\tan\gamma}$

Ora, $SK = \dfrac{KP}{\cos\beta} = \dfrac{a}{2\tan\alpha\cos\beta}$. Si osserva, quindi, che $\dfrac{SK}{KM} = \dfrac{a\tan\gamma}{c\tan\alpha\cos\beta}$, mentre per il teorema di Talete $\dfrac{SK}{KM} = \dfrac{x_S - x_K}{x_K - x_M}$ e confrontando i due risultati abbiamo che $\dfrac{x_S - x_K}{x_K - x_M} = \dfrac{a\tan\gamma}{c\tan\alpha\cos\beta}$ e da questa uguaglianza otteniamo

$$x_K = \frac{cx_S\tan\alpha\cos\beta + ax_M\tan\gamma}{c\tan\alpha\cos\beta + a\tan\gamma}$$

Ricordando il valore di x_S ottenuto sopra e che $x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2}$ e sostituendo otteniamo la formula finale:

$$x_K = \frac{c\cdot\dfrac{x_B(\tan\alpha - \tan\beta) + x_C(\tan\alpha + \tan\beta)}{2\tan\alpha}\cdot\tan\alpha\cos\beta + a\cdot\dfrac{x_A + x_B}{2}\cdot\tan\gamma}{c\tan\alpha\cos\beta + a\tan\gamma}$$

$$= \frac{x_A(a\tan\gamma) + x_B(c\tan\alpha\cos\beta + a\tan\gamma - c\sin\beta) + x_C(c\sin\beta + c\tan\alpha\cos\beta)}{2c\tan\alpha\cos\beta + 2a\tan\gamma}$$

Questa formula fornisce l'ascissa del circocentro del triangolo noti i lati e gli angoli, ma risulta essere evidentemente un po' complessa. Vediamo, però, che può essere decisamente semplificata e che risulterà alla fine molto elegante.

Cominciamo dividendo numeratore e denominatore per c e sostituendo $\dfrac{a}{c} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$ per il teorema dei seni; si ottiene:

$$x_K = \frac{x_A\dfrac{\sin\alpha}{\cos\gamma} + x_B\left(\tan\alpha\cos\beta + \dfrac{\sin\alpha}{\cos\gamma} - \sin\beta\right) + x_C(\sin\beta + \tan\alpha\cos\beta)}{2\tan\alpha\cos\beta + 2\,\dfrac{\sin\alpha}{\cos\gamma}}$$

Ora moltiplichiamo numeratore e denominatore per $2\cos\alpha\cos\gamma$ e otteniamo:

$$x_K = \frac{x_A\sin 2\alpha + x_B\left(2\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma + \sin 2\alpha - 2\sin\beta\cos\alpha\cos\gamma\right) + x_C(2\sin\beta\cos\alpha\cos\gamma + 2\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma)}{4\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma + 2\sin 2\alpha}$$

Ora sfruttiamo le formule di Werner e otteniamo:

$$2\cos\beta\cos\gamma = \cos(\beta+\gamma) + \cos(\beta-\gamma) = \cos(\pi-\alpha) + \cos(\beta-\gamma) = -\cos\alpha + \cos(\beta-\gamma)$$

$$2\sin\beta\cos\gamma = \sin(\beta+\gamma) + \sin(\beta-\gamma) = \sin(\pi-\alpha) + \sin(\beta-\gamma) = \sin\alpha + \sin(\beta-\gamma)$$

e sostituendo, a numeratore otteniamo

$$x_K = x_A \sin 2\alpha + x_B \left[-\cancel{\sin\alpha\cos\alpha} + \sin\alpha\cos(\beta-\gamma) + \cancel{\sin 2\alpha} - \cancel{\sin\alpha\cos\alpha} - \cos\alpha\sin(\beta-\gamma)\right] +$$
$$+ x_C \left[\cancel{\sin\alpha\cos\alpha} + \cos\alpha\sin(\beta-\gamma) - \cancel{\sin\alpha\cos\alpha} + \sin\alpha\cos(\beta-\gamma)\right]$$

e a denominatore

$$-2\sin\alpha\cos\alpha + 2\sin\alpha\cos(\beta-\gamma) + 2\sin 2\alpha$$

Ora, sempre grazie a Werner,

$$\sin\alpha\cos(\beta-\gamma) = \sin(\beta+\gamma)\cos(\beta-\gamma) = \frac{1}{2}\sin 2\beta + \frac{1}{2}\sin 2\gamma$$

$$\cos\alpha\sin(\beta-\gamma) = -\cos(\beta+\gamma)\sin(\beta-\gamma) = \frac{1}{2}\sin 2\gamma - \frac{1}{2}\sin 2\beta$$

e quindi sostituendo sia a numeratore che a denominatore si ottiene:

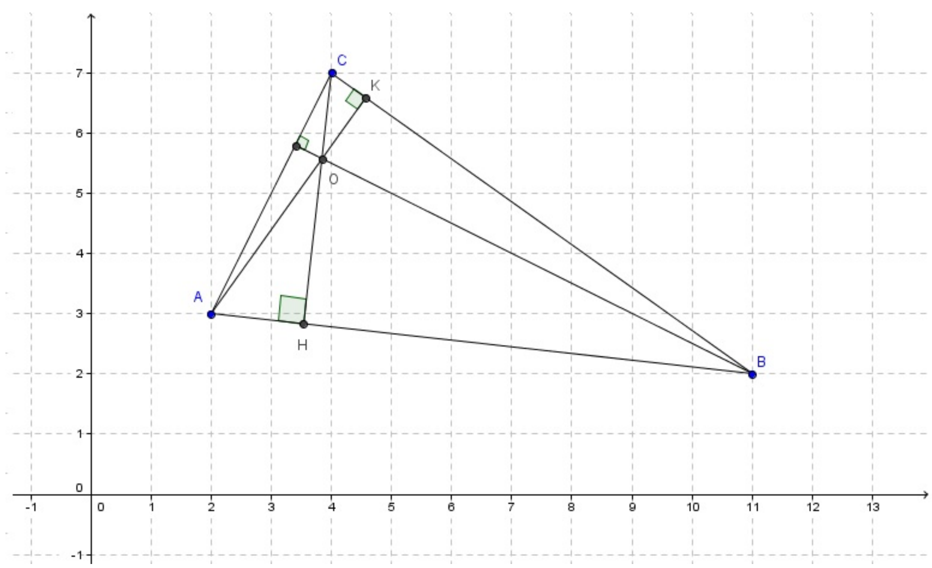
$$x_K = \frac{x_A \sin 2\alpha + x_B \sin 2\beta + x_C \sin 2\gamma}{\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma}$$

e, poichè il procedimento è analogo per le ordinate,

$$K\left(\frac{x_A \sin 2\alpha + x_B \sin 2\beta + x_C \sin 2\gamma}{\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma}; \frac{y_A \sin 2\alpha + y_B \sin 2\beta + y_C \sin 2\gamma}{\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma}\right)$$

3 L'ORTOCENTRO

Dato il triangolo ABC in figura



e con le stesse notazioni sopra. Possiamo osservare che $\dfrac{HC}{HB} = \tan\beta$ e che $\dfrac{HC}{HA} = \tan\alpha$ quindi $\dfrac{HB}{HA} = \dfrac{\tan\alpha}{\tan\beta}$. Per il teorema di Talete $\dfrac{HB}{HA} = \dfrac{x_B - x_H}{x_H - x_A}$ e confrontando le due uguaglianze otteniamo

$$\frac{x_B - x_H}{x_H - x_A} = \frac{\tan\alpha}{\tan\beta} \qquad \Rightarrow \qquad x_H = \frac{x_B\tan\beta + x_A\tan\alpha}{\tan\beta + \tan\alpha}$$

I triangoli CKO e CHB sono simili quindi l'angolo $COK = \beta$ e così anche l'angolo $AHO = \beta$. Grazie a questo possiamo dire che $\frac{CO}{OH} = \frac{CH}{OH} - 1 = \frac{AH\tan\alpha}{AH\tan(\pi/2-\beta)} - 1 = \tan\alpha\tan\beta - 1$. Per il teorema di Talete $\frac{CO}{OH} = \frac{x_C - x_O}{x_O - x_H}$ e confrontando le due uguaglianze otteniamo

$$\frac{x_C - x_O}{x_O - x_H} = \tan\alpha\tan\beta - 1 \qquad \Rightarrow \qquad x_O = \frac{x_C + x_H(\tan\alpha\tan\beta - 1)}{\tan\alpha\tan\beta}$$

e sostituendo il valore di x_H sopra trovato

$$\begin{aligned} x_O &= \frac{x_C + x_H(\tan\alpha\tan\beta - 1)}{\tan\alpha\tan\beta} \\ &= \frac{x_C + \dfrac{x_B\tan\beta + x_A\tan\alpha}{\tan\beta + \tan\alpha}(\tan\alpha\tan\beta - 1)}{\tan\alpha\tan\beta} \\ &= \frac{x_A\tan\alpha(\tan\alpha\tan\beta - 1) + x_B\tan\beta(\tan\alpha\tan\beta - 1) + x_C(\tan\alpha + \tan\beta)}{\tan\alpha\tan\beta(\tan\alpha + \tan\beta)} \end{aligned}$$

dividendo numeratore e denominatore per $\tan\alpha\tan\beta - 1$ si ottiene

$$x_O = \frac{x_A\tan\alpha + x_B\tan\beta + x_C\dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{\tan\alpha\tan\beta - 1}}{\tan\alpha\tan\beta\dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{\tan\alpha\tan\beta - 1}}$$

per la formula dell'addizione $\frac{\tan\alpha + \tan\beta}{\tan\alpha\tan\beta - 1} = -\tan(\alpha+\beta) = -\tan(\pi - \gamma) = \tan\gamma$ quindi:

$$x_O = \frac{x_A\tan\alpha + x_B\tan\beta + x_C\tan\gamma}{\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma}$$

per chiudere la dimostrazione basta osservare che

$$\begin{aligned} \tan\alpha\tan\beta\tan\gamma &= -\tan\alpha\tan(\alpha+\gamma)\tan\gamma = -\tan\alpha\tan(\alpha+\gamma)\tan\gamma + \tan(\alpha+\gamma) - \tan(\alpha+\gamma) \\ &= -\tan(\alpha+\gamma)\,(\tan\alpha\tan\gamma - 1 + 1) = -\tan(\alpha+\gamma)\,(\tan\alpha\tan\gamma - 1) - \tan(\alpha+\gamma) \\ &= \tan\alpha + \tan\gamma - \tan(\alpha+\gamma) = \tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma \end{aligned}$$

relazione che sembra strana ma è vera e che ci porta a concludere che

$$x_O = \frac{x_A\tan\alpha + x_B\tan\beta + x_C\tan\gamma}{\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma}$$

e per analogia delle ordinate

$$O\left(\frac{x_A\tan\alpha + x_B\tan\beta + x_C\tan\gamma}{\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma};\frac{y_A\tan\alpha + y_B\tan\beta + y_C\tan\gamma}{\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma}\right)$$