LIMITI

In questo capitolo affronteremo lo studio di quella parte dell'analisi che va sotto il nome di *calcolo infinitesimale*, definendo inizialmente il concetto di *limite* di una funzione analitica in un punto (che potrà anche essere l'infinito) ed imparando soprattutto a calcolare i limiti, secondo opportune tecniche.

1 I LIMITI FINITI AL FINITO e LA CONTINUITA'

E' stato detto nei capitoli precedenti che una importante proprietà dei grafici di funzione è quella, molto spesso, di non interrompersi mai, ossia di poter essere tracciati senza alzare mai la penna dal foglio. Abbiamo imparato che tale proprietà si chiama *continuità*.

Essere continuo vuol dire *non avere interruzioni*, ma anche, se ci si pensa bene, fissato un punto sulla curva, potersi avvicinare indefinitamente ad esso. Ed è proprio da tale concetto che inizieremo ad introdurre i limiti.

Consideriamo una porzione di retta, che visualizza opportunamente un dato sottoinsieme di $\mathbb{R}$.

Su questa porzione fissiamo un punto x_0 ed immaginiamo di eseguire un certo movimento di avvicinamento. Algebricamente ciò significa:

1. scegliere una variabile reale x e dare ad essa un valore iniziale. Potrà essere che $x < x_0$ (x si trova alla sinistra di x_0), oppure $x > x_0$ (x si trova alla destra di x_0.

2. incrementare o decrementare i valori x in modo da sceglierli sempre più vicini.

La cosa è fattibile indefinitamente? Ovvero, possiamo dare dei valori infinitamente vicini a x_0 senza però che sia $x = x_0$? La risposta è, evidentemente, affermativa, proprio grazie alla proprietà di continuità della retta.

Per fissare le idee, se $x_0 = 1$, sappiamo che esistono infiniti valori reali vicini a 1 quanto si vuole, ma differenti da 1 stesso (es. $0,99999999$, oppure $1,00000001$, con un numero arbitrariamente fissato di cifre decimali!).

Concordiamo sul fatto che avvicinarsi a x_0 vuol dire fissare dei valori x che sono sempre più vicini a x_0 stesso, ossia la cui differenza da x_0 può essere minimizzata a piacere (vedasi anche il concetto di approssimazione). Il concetto soggettivo di vicinanza va comunque precisato, ossia dobbiamo fissare un criterio che dica quando sono considerato vicino e quando no. Potremmo allora fissare una precisione (di solito indicata con ϵ) che ci dia questo criterio.

Si dirà allora che x si avvicina indefinitamente a x_0, o che x tende a x_0, in simboli $x \to x_0$, quando si può fissare un numero ϵ minimizzabile a piacere, tale che x differisca da x_0 meno di ϵ. In simboli:

$$x \to x_0 \Rightarrow |x - x_0| < \epsilon$$

dove il valore assoluto evita l'ambiguità sul verso dell'avvicinamento (da dx o da sx).

Ricordando le proprietà delle disuguaglianze in modulo, la condizione $|x - x_0| < \epsilon$ equivale a dire che $x_0 - \epsilon < x < x_0 + \epsilon$, ossia che $x \in I_{x_0} = [x_0 - \epsilon; x_0 + \epsilon]$.

L'intervallo I_{x_0} si chiama intorno circolare di centro x_0 (e raggio ϵ).

Sappiamo però che se $x \in D$, ove D è il dominio della funzione, $\forall x$ è possibile calcolare un certo $y = f(x)$ servendoci della definizione analitica di f. Quindi potrebbe essere interessante, una volta appurato che $x \to x_0$, descrivere il comportamento dell'immagine $f(x)$.

Non c'è modo di dubitare, se il grafico non si interrompe, del fatto che se $x \to x_0$, allora $f(x) \to f(x_0)$, come si può anche vedere dal disegno.

Ciò significa anche che se x è infinitamente vicino a x_0, allora $y = f(x)$ è infinitamente vicino a $f(x_0)$. Ciò si esprime dicendo che:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l = f(x_0)$$

(che si legge il limite per x che tende a x_0 di $f(x)$ è uguale a $l = f(x_0)$, ossia al valore che f assume nel punto x_0).

Come detto prima, significherà che per ogni precisione ϵ prefissata, tale che $|x - x_0| < \epsilon$, esisterà una precisione δ, tale che $|f(x) - f(x_0)| < \delta$, ovvero che se x appartiene ad un intorno di x_0, allora $f(x)$ apparterrà ad un intorno di $f(x_0)$.

ESEMPI:

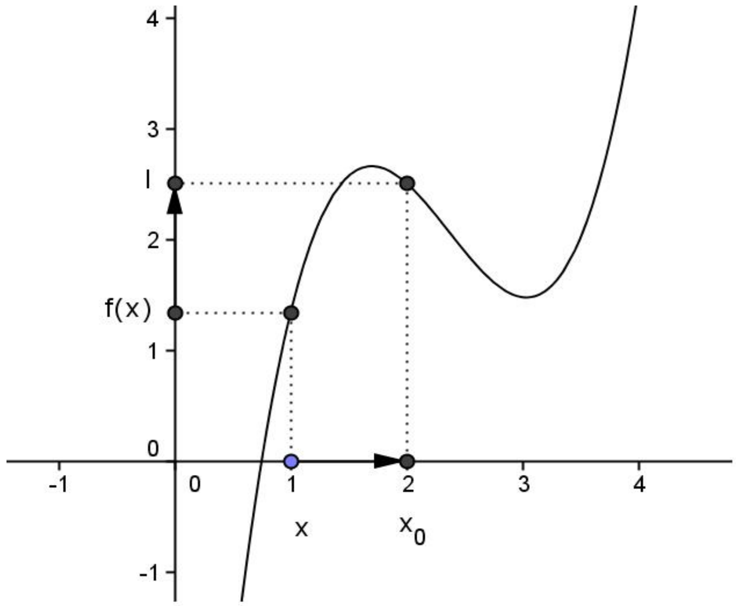

Figura 1: Avvicinamento di x a x_0 nel dominio e conseguente avvicinamento di $f(x)$ a l nel codominio. Effettivamente $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$

$\lim\limits_{x\to 1} 2x+1 = 3$, visto che dando a x valori infinitamente vicini a 1 (nel dominio), $f(x) = 2x+1$ assume valori infinitamente vicini a 3 (nel codominio).

Applicando la definizione, si ha che, fissato un δ, precisione piccola a piacere, tale che $|f(x) - 3| < \delta$, si può fissare anche una precisione ϵ, tale che $x - 1| < \epsilon$. Difatti, se $f(x) = 2x + 1$, allora si avrà che $|2x + 1 - 3| < \delta \Rightarrow |2x - 2| < \delta$.

Risolvendo l'ultima disequazione col valore assoluto, ricordando la metodologia, si ha:

$$-\delta < 2x - 2 < \delta \Rightarrow 2 - \delta < 2x < 2 + \delta \Rightarrow 1 - \frac{\delta}{2} < x < 1 + \frac{\delta}{2} \Rightarrow |x - 1| < \frac{\delta}{2}$$

Se ora si pone che $\epsilon = \dfrac{\delta}{2}$ si ottiene esattamente quanto voluto, perchè si ha che $x \in [1 - \epsilon; 1 + \epsilon]$.

1.1 Limiti e continuità

Abbiamo visto in questo esempio che il calcolo del limite $\lim\limits_{x\to 1} 2x + 1$ è stato tutto sommato agevole: è bastato sostituire alla x il valore 1, ossia calcolare $f(1)$ ed ottenere $2 \cdot 1 + 1 = 3$. Questo è stato possibile perchè la funzione $y = 2x + 1$ ha grafico certamente continuo (è una retta), quindi, ovviamente, se x si avvicina a 1, $f(x)$ si avvicinerà a $f(1) = 3$.

Se ne deduce che un fondamentale criterio di calcolo dei limiti finiti al finito (del tipo $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$) consiste nell'appurare se il grafico di $f(x)$ è continuo e quindi calcolare $f(x_0)$.

La domanda è: quando un grafico è continuo?

Potremmo rispondere, oltre alla solita proprietà del non interrompersi mai, che un grafico è continuo se per ogni valore di x si può calcolare un valore $y = f(x)$. Una funzione che gode di questa proprietà si dice *funzione continua*. Banalmente, possiamo dire che tutte le funzioni sono continue nel proprio dominio D, perchè se $x \in D$ allora può essere calcolata $f(x)$. Ma se è possibile calcolare questi valori, sussiste anche la proprietà dell'avvicinamento indefinito. Usando quindi la nozione di limite possiamo enunciare la seguente definizione

Definizione 1 *Sia data una funzione $y = f(x)$ ed un $x_0 \in \mathbb{R}$. Si dice che f è continua in x_0 se e solo se $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.*

La cosa è ovvia se $x_0 \in D$, quindi si dirà che la funzione è continua su tutto il dominio D. La definizione dà allora giustificazione del criterio suesposto per il calcolo dei limiti per x che tende a $x_0 \in D$.

ESEMPI

$\lim_{x\to 5}\sqrt{x^2-25}=0$, visto che il dominio della funzione è $D=]-\infty;-5]\cup[5;+\infty[$ e $5\in D$. E' bastato calcolare, allora $f(5)=\sqrt{5^2-25}=0$.

2 Limiti destri e limiti sinistri

Spesso può essere che il comportamento di una funzione cambi a seconda che l'avvicinamento di x a x_0 avvenga da destra (dando a x valori iniziali più grandi di x_0) oppure da sinistra (dando a x dei valori iniziali più piccoli di x_0). La cosa assume una certa rilevanza spesso se è coinvolto il valore $f(x)=0$, visto che lo zero separa i due sottoinsiemi $\mathbb{R}^+$ e $\mathbb{R}^-$.

Diremo allora che x sta in un intorno destro di x_0 se $x-x_0<\epsilon$, ovvero che x tende a x_0 da destra (in simboli: $x\to x_0^+$).

In caso contrario, x sta in un intorno sinistro di x_0 se $x-x_0>-\epsilon$, ovvero che x tende a x_0 da sinistra (in simboli $x\to x_0^-$).

Ovviamente anche la funzione (se continua) potrà avvicinarsi a $f(x_0)$ da sinistra o da destra, in simboli $f(x)\to f(x_0)^+$ oppure $f(x)\to f(x_0)^-$.

ESEMPIO

Quanto vale il $\lim\limits_{x\to 0^+}\sin x$?

Sappiamo che $\sin 0=0$, ma qui è importante notare che se diamo a x dei valori vicini a 0, ma positivi (poco più grandi di zero), i valori della funzione $y=\sin x$ si mantengono sempre vicini a zero e positivi, quindi:

$$\lim_{x\to 0^+}\sin x=0^+$$

Semplice notare anche che

$$\lim_{x\to 0^-}\sin x=0^-$$

3 LIMITI INFINITI AL FINITO

Abbiamo visto cosa accade se facciamo tendere x ad un valore (finito, ben preciso) del dominio. Ma è ancora più interessante esaminare il comportamento di una funzione se x tende ad un valore che è invece escluso dal dominio, per così dire, violando le C.E.

Per fissare le idee, consideriamo la funzione $y=\dfrac{1}{x}$. Sappiamo che il suo dominio è costituito dall'insieme $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, quindi il valore $x=0$ è escluso dal dominio stesso. Abbiamo sempre saputo che non possiamo dare a x il valore 0, perchè l'espressione

$$\frac{1}{0}$$

risulta priva di significato. Ma cosa accade se si danno alla variabile x dei valori infinitamente vicini a 0 (senza che siano esattamente 0)?.

Possiamo provare a dare, per esempio (nell'ipotesi che $x\to 0^+$) dei valori piccolissimi e positivi, per esempio $x=0,00001$). L'immagine della funzione sarà:

$$\frac{1}{0,00001}=100.000$$

E' facile accorgersi che più vicino a zero è il valore x e più grande sarà il corrispondente $f(x)$. Ossia, fissato un $\epsilon>0$ come sempre, tale che sia $x<\epsilon$, si nota che $\dfrac{1}{x}$ diviene sempre più grande, ossia è definibile un valore $M>0$ e grandissimo tale che

$$\frac{1}{x}>M$$

.

Accadendo ciò, si scrive che

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$$

Possiamo enunciare la seguente

Definizione 2 *Si dice che* $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ *se* $\forall \epsilon > 0$ *piccolo a piacere tale che* $|x - x_0| < \epsilon$, $\exists M > 0$ *grande a piacere tale che* $f(x) > M$.

E' facile rendersi conto, invece, che se $x \to= 0^-$, allora $f(x) = \frac{1}{x}$ tende ad assumere valori infinitamente negativi. Difatti possiamo provare a dare, per esempio (nell'ipotesi che $x \to 0^-$) dei valori piccolissimi e negativi, per esempio $x = -0,00001$). L'immagine della funzione sarà:

$$\frac{1}{-0,00001} = -100.000$$

E' facile accorgersi che più vicino a zero è il valore x e più negativo sarà il corrispondente $f(x)$. Ossia, fissato un $\epsilon > 0$ come sempre, tale che sia $x < \epsilon$, si nota che $\frac{1}{x}$ diviene sempre più negativo, ossia è definibile un valore $M > 0$ e grandissimo tale che

$$\frac{1}{x} < -M$$

.

Accadendo ciò, si scrive che

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Possiamo enunciare la seguente

Definizione 3 *Si dice che* $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ *se* $\forall \epsilon > 0$ *piccolo a piacere tale che* $|x - x_0| < \epsilon$, $\exists M > 0$ *grande a piacere tale che* $f(x) < -M$.

3.1 L'asintoto verticale

Il fatto che sia $f(x) \to \infty$ per $x \to x_0$ ha una importante interpretazione grafica.

Abbiamo visto nel capitolo precedente la proprietà dell'asintoticità, imparando che una funzione presenta asintoto verticale di equazione $x = x_0$ allorquando il grafico si incurva verticalmente (verso l'alto o il basso) assumendo, se x è infinitamente vicino a x_0 un andamento pressochè rettilineo.

E' come se il grafico dovesse evitare di intersecare la retta verticale $x = x_0$ e si dovesse a tale scopo piegare, volgendosi verso l'alto o il basso, ossia facendo in modo che $f(x) \to \infty$, come visto nel paragrafo precedente.

Possiamo allora enunciare la seguente definizione:

Definizione 4 *Si dice che la funzione* $f(x)$ *presenta un asintoto verticale di equazione* $x = x_0$ *allorquando è* $\lim_{x \to x_0} = \infty$

Si noti che la definizione prescinde dal segno dell'infinito.

Una funzione che ammette asintoto per $x \to x_0$ si dice *divergente* in x_0, presentando un limite infinito al finito.

Il grafico dell'iperbole $y = \frac{1}{x}$ chiarisce graficamente la presenza dell'asintoto verticale $x = 0$, visto che $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$.

3.2 Applicazioni dei limiti infiniti al finito

1. Si ha che $\lim_{x \to 0} \frac{K}{x} = \pm\infty$, essendo $K \in \mathbb{R}$, ove il segno dell'infinito dipende dal segno di K e dal fatto che sia $x \to 0^+$ oppure $x \to 0^-$ (secondo la regola del prodotto dei segni).

   Dimostriamo, ma senza perdere in generalità, ad esempio che è:

   $$\lim_{x \to 0^+} \frac{K}{x} = +\infty, \quad K > 0$$

   Se è così, fissiamo un $M > 0$ grande a piacere tale che sia $\frac{K}{x} > M$. Visto che è $K > 0$ per ipotesi, allora sarà possibile affermare che:

$$\frac{x}{K} < \frac{1}{M}$$

Quindi $x < \frac{K}{M}$ e se si pone $\frac{K}{M} = \epsilon$ significa che $x < \epsilon$, quindi vuol dire che x si trova in un intorno destro di 0 e quindi $x \to 0^+$.

In virtù di questo fatto, effettivamente se x è infinitamente vicino a 0 da destra, allora la funzione $f(x) = \frac{K}{x}$ assume valori arbitrariamente grandi e quindi $f(x) \to +\infty$.

Con un abuso (ma non troppo!) di linguaggio, possiamo allora, E SOLO IN TALE CONTESTO, affermare che

$$\boxed{\frac{K}{0} = \infty}$$

Precisiamo inoltre che se $K > 0$, $\frac{K}{0^+} = +\infty$, mentre $\frac{K}{0^-} = -\infty$ e viceversa se $K < 0$.

Affermiamo altresì che le funzioni del tipo $\frac{K}{x}$ presentano asintoto verticale di equazione $x = x_0$.

2. Sia data la funzione razionale fratta $f(x) = \frac{1}{x-1}$. Provare che si ha:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \pm\infty$$

ove il doppio segno si riferisce al caso in cui $x \to 1^+$ oppure $x \to 1^-$.

Supponiamo che sia $x \to 1^+$, quindi dovremo provare che $\frac{1}{x-1} \to +\infty$.

Notiamo che la scelta del punto $x = 1$ non è stata casuale, visto che la funzione in questione non è continua proprio per tale valore.

Tuttavia, notiamo che il denominatore $x - 1 \to 0^+$ se $x \to 1^+$, difatti se diamo a x dei valori vicini ma maggiori di 1, l'espressione $x - 1$ tende ad assumere valori vicini a zero, ma positivi. Possiamo allora scrivere che:

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

per quanto dimostrato sopra.

La retta $x = 1$ sarà allora asintoto verticale per il grafico di $\frac{1}{x-1}$. Estendiamo la regola anche al caso in cui si abbia $f(x) = \frac{K}{g(x)}$, precisando che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow g(x_0) = 0$$

3. Essendo $f(x) = \ln x$ la funzione logaritmo naturale, definita in $\mathbb{R}_0^+$, possiamo dire che

$$\lim_{x \to 0^-} \ln x = -\infty$$

Il grafico della funzione $f(x)$ viene a conforto della nostra tesi, ma l'asserto si può facilmente dimostrare.

Difatti, se è vero che $\ln x \to -\infty$ deve esistere un $M > 0$ molto grande tale che $\ln x < -M$

Esponenziando membro a membro in base $e > 0$ possiamo dire che:

$$\ln x < -M \Rightarrow e^{\ln x} < e^{-M} \Rightarrow x < e^{-M}$$

Notiamo che se M è grandissimo $e^{-M} = \frac{1}{e^M} > 0$ è viceversa un numero piccolissimo, quindi se poniamo $\epsilon = e^{-M}$ sarà allora che $x < \epsilon$, quindi effettivamente $x \to 0^+$.

La retta $x = 0$ è allora asintoto verticale per la funzione $y = \ln x$

4 LIMITI FINITI ALL'INFINITO

Ora che abbiamo chiarito il significato di $x \to \infty$, possiamo esaminare il prossimo caso, ossia quello di una funzione che tenda ad un limite (valore) finito, benchè sia $x \to \infty$.

A tale proposito esaminiamo ancora una volta il grafico della funzione $y = \frac{1}{x}$, osservando che, se ci spostiamo infinitamente verso destra sull'asse x, il grafico della funzione sembra scendere verso il valore $y = 0$.

In altre parole, dando a x un valore grande a piacere, il corrispondente $f(x)$ tenderà ad avvicinarsi indefinitamente al valore FINITO $l = 0$, ossia, come abbiamo visto, potrà essere definita una precisione $\epsilon > 0$ tale che $f(x) - 0 < \epsilon$.

la cosa è sensata, in quanto è intuibile che se divido 1 per un numero enorme, ottengo un numero praticamente pari a zero[1].

Possiamo allora enunciare la seguente definizione:

Definizione 5 *Sia data una funzione $y = f(x)$ ed un $l \in \mathbb{R}$. Si dice che*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$$

se $\forall M > 0$ tale che $x > M$ $\exists \epsilon > 0$ tale che $|f(x) - l| < \epsilon$.

Analoga definizione valgono per il caso $x \to -\infty$, esempio della quale è sempre costituito dal ramo sinistro (per $x < 0$) del grafico di $y = \frac{1}{x}$.

La cosa si può riassumere nella notazione (usata senza eccessivo abuso di linguaggio), secondo cui, se $K \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\frac{K}{\infty} = 0}$$

La dimostrazione è abbastanza semplice: se $1/x \to 0$, allora abbiamo detto che è $1/x < \epsilon$, ove ϵ è una precisione piccola a piacere.

Visto che $x \to +\infty$, sarà sicuramente $x > 0$, per cui nella disuguaglianza

$$\frac{1}{x} < \epsilon$$

possiamo passare ai reciproci, avendosi che:

$$\frac{x}{1} > \frac{1}{\epsilon}$$

Se ϵ è piccolo a piacere, allora chiamando il suo reciproco M, esso sarà grande a piacere e quindi avremo che $x > M$, cioè effettivamente $x \to +\infty$

4.1 Asintoti orizzontali

Il fatto che sia $f(x) \to l$ per $x \to \infty$ ha una importante interpretazione grafica.

Abbiamo visto nel capitolo precedente la proprietà dell'asintoticità, imparando che una funzione presenta asintoto orizzontale di equazione $y = l$ allorquando il grafico segue la retta orizzontale e sembra avvicinarsi a questa spostandosi (infinitamente!) verso destra o verso sinistra.

Possiamo allora enunciare la seguente definizione:

Definizione 6 *Si dice che la funzione $f(x)$ presenta un asintoto orizzontale di equazione $y = l$ allorquando è $\lim_{x \to \infty} = l$*

Si noti che la definizione si scinde in due casi, a seconda che sia $x \to +\infty$ con $y \to l_1$ (in tal caso si parla di asintoto orizzontale destro) o $x \to -\infty$ con $y \to l_2$ (in tal caso, avremo l'asintoto orizzontale sinistro).

Può essere che sia $l_1 = l_2$, in tal caso si parlerà di asintoto orizzontale bilaterale.

Il grafico dell'iperbole $y = \frac{1}{x}$ chiarisce graficamente, ancora una volta, la presenza dell'asintoto orizzontale bilaterale $y = 0$, visto che $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$.

[1]Qualcuno aggiunge, a chiosa dell'affermazione che se divido una torta per un miliardo di persone, ciascuna ne ha una parte praticamente invisibile!

5 LIMITI INFINITI ALL'INFINITO

Analizziamo ora l'ultimo caso che resta, che è quello più frequente, per le funzioni che tendono all'infinito, al tendere di x all'infinito.

Possiamo prendere come esempio una retta, come $y = x + 1$.

Se $x \to +\infty$, sappiamo che possiamo definire un $M > 0$ arbitrariamente grande, in modo che $x > M$.

Cosa farà y? Sarà sicuramente $y = M + 1$, comunque arbitrariamente grande, per cui sarà possibile allora, in corrispondenza della scelta di M, definire un $N > 0$ (che nel nostro caso vale $N = M + 1$), in modo tale che sia $f(x) > N$. In altri termini, $f(x) \to +\infty$.

Si può allora dare la definizione seguente.

Definizione 7 *Si dice che*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

se $\forall\, M > 0$ *tale che* $x > M$*,* $\exists N > 0$ *tale che* $f(x) > N$*.*

Analoghe definizioni si possono scrivere a seconda del segno dell'infinito.

Un classico esempio di funzioni che tendono all'infinito, per $x \to \infty$ sono i polinomi.

6 CALCOLO DI LIMITI

In questa sezione prenderemo in esame il vero scopo di tutta la nostra trattazione: calcolare un limite. Per fare questo è necessario conoscere l'espressione della funzione $f(x)$ ed il punto a cui far tendere la variabile indipendente (anche l'infinito).

Preliminarmente, è necessario ribadire alcune premesse piuttosto ovvie, inerenti le operazioni sui limiti.

L'operazione di passaggio al limite fortunatamente gode della fondamentale proprietà della linearità, per cui si può tranquillamente affermare che:

- il limite della somma è la somma dei limiti, ossia $\lim_{x\to x_0}(f_1 + f_2) = \lim_{x\to x_0} f_1 + \lim_{x\to x_0} f_2$
- il limite del prodotto/quoziente è il prodotto/(quoziente dei limiti, ossia $\lim_{x\to x_0}(f_1 \cdot f_2) = \lim_{x\to x_0} f_1 \cdot \lim_{x\to x_0} f_2$, e anche che $\lim_{x\to} k \cdot f(x) = k \cdot \lim_{x\to} f(x)$

Tuttavia queste proprietà, ovvie per i limiti finiti, devono essere riviste nel caso dei limiti infiniti, per cui sarà necessario precisare le cosiddette regole di calcolo con l'infinito.

6.1 Regole di calcolo per l'infinito

Innanzitutto si deve tenere presente che l'infinito è un simbolo e non una quantità precisa, per cui è necessario rivedere le usuali regole di calcolo che valgono solo per i numeri, scontrandosi, talvolta, con risultati che possono apparire contro intuitivi. Ma iniziamo coi risultati più semplici.

1. SOMMA DI INFINITI. La somma di termini infiniti è infinita, risultato che si esprime dicendo $\infty + \infty = \infty$ ovvero $-\infty - \infty = -\infty$.
2. INFINITO + FINITO. Se si somma un termine finito con uno infinito, il risultato è ancora finito (piuttosto ovvio). Ciò si esprime dicendo $\infty + k = \infty$
3. INFINITO$\cdot$ FINITO. Moltiplicando/dividendo un termine infinito per un fattore finito, il risultato è ancora infinito. Quindi: $k\infty = \infty$ e $\dfrac{\infty}{k} = \infty$.
4. INFINITO A POTENZA. Il risultato dell'elevamento a potenza di un infinito è ancora infinito, regolandosi per il segno con le usuali regole delle potenze. Per esempio: $\infty^2 = \infty$ e $-\infty^3 = -\infty$

Ben diverso è il caso della differenza di due termini infiniti, che richiede una maggiore attenzione.

6.1.1 INFINITO - INFINITO

Se sottraiamo due quantità infinite cosa si ottiene?Possiamo dire che il risultato sia ancora infinito? Notiamo che il risultato $\infty - \infty$ potrebbe essere differente a seconda del *grado di infinità*, una proprietà che va anche sotto il nome di *cardinalità* o potenza.

Tale proprietà ha a che fare con la rapidità con cui una funzione tende all'infinito ed è particolarmente semplice da definire per le funzioni polinomiali. Se l'infinito risulta dall'elevamento a potenza, il suo grado di infinità sarà pari alla potenza stessa, per cui, per esempio:

- La funzione $f(x) = x$ è un infinito di primo grado, visto che $\lim_{x\to+\infty} = \infty^1 = \infty$
- La funzione $f(x) = x^2$ è un infinito di secondo, visto che $\lim_{x\to+\infty} = \infty^2 = \infty$
- La funzione $f(x) = \sqrt{x}$ è un infinito di grado $1/2$, visto che $\lim_{x\to+\infty} = \sqrt{\infty} = \infty$

Quindi, possiamo dire che la forma $\infty - \infty$ avrà come risultato:

- $+\infty$ se la cardinalità del primo termine è maggiore di quella del secondo;
- $-\infty$ se la cardinalità del primo termine è minore di quella del secondo;
- zero se le due cardinalità sono uguali

In virtù di questo fatto, possiamo concludere che, se si ha una somma algebrica di infiniti, il risultato dipende da quello di cardinalità maggiore, e quindi possiamo trascurare le quantità di cardinalità inferiore. E' ciò che va sotto il nome di *principio di sostituzione degli infiniti.*

Per esempio, nel calcolare:

$$\lim_{x\to+\infty} 2x^2 + 4x - 5$$

notiamo che il polinomio è di secondo grado e quindi i termini lineari e noto pesano sempre meno man mano che $x \to +\infty$, quindi è come se il nostro limite fosse equivalente a:

$$\lim_{x\to+\infty} 2x^2 = +\infty$$

Di fatto, abbiamo sostituito la funzione $2x^2+4x-5$ con $2x^2$, visto che il loro comportamento all'infinito è lo stesso.

Con un'espressione più corretta, diremo allora che per $x \to +\infty$ il polinomio $2x^2 + 4x - 5$ è asintotico a $2x^2$, in simboli:

$$2x^2 + 4x - 5 \sim 2x^2$$