TRIANGOLI CONGRUENTI

Prof.ssa Valentina Fabbro

Abstract. *L'articolo presenta una dimostrazione della seguente affermazione: due triangoli sono congruenti se hanno congruenti due lati e la bisettrice dell'angolo compreso. L'esigenza di questa dimostrazione è nata da un test trovato in un testo di geometria per il biennio che riporta un errore.*

L'anno scorso, mentre stavamo correggendo in classe gli esercizi di geometria assegnati per casa su un libro per il biennio, ci siamo imbattuti nel seguente test.

Due triangoli sono congruenti se hanno congruenti
A) un'altezza e la base corrispondente.
B) gli angoli.
C) un lato e la mediana relativa ad esso.
D) due lati e la bisettrice dell'angolo compreso.
E) un lato, un angolo ad esso adiacente e la corrispondente bisettrice.

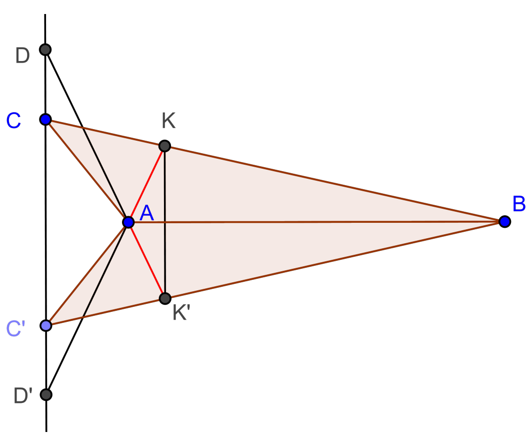
La soluzione riportata dal libro è la E, facilmente dimostrabile con l'utilizzo dei criteri di congruenza dei triangoli. Ma anche la D è corretta ed è questo il risultato che dimostriamo di seguito.

Proposizione 1. *Se due triangoli hanno due lati corrispondenti congruenti e la bisettrice dell'angolo fra essi compreso congruente allora i triangoli sono congruenti.*

Ipotesi	ABC, $A'B'C'$ triangoli	*Tesi*	$ABC \cong A'B'C'$
	$AB \cong A'B'$		
	$AC \cong A'C'$		
	AK e $A'K'$ bisettrici		
	$AK \cong A'K'$		

Dimostrazione. Per provare la tesi dimostriamo che l'angolo compreso tra i lati corrispondenti congruenti è congruente in modo da poter applicare il primo criterio di congruenza dei triangoli.

Rappresentiamo i due triangoli in modo che $A \equiv A'$ e $B \equiv B'$ e i triangoli si trovino da parti opposte rispetto ad al lato comune AB. Si presentano tre casi a seconda che l'angolo $C\hat{A}B$ sia ottuso, acuto o retto. Tracciamo le due rette KK' e CC'. Prolunghiamo le bisettrici AK e AK' fino ad incontrare la retta CC' rispettivamente nei punti D' e D (vedi figura 1).



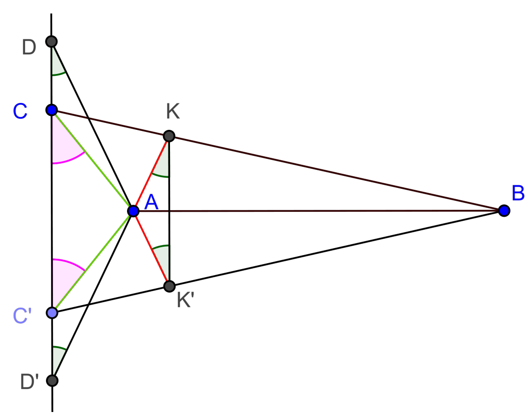


Figura 1: Primo caso: $C\widehat{A}B$ ottuso

Applichiamo il teorema della bisettrice al triangolo ABC; abbiamo che $\frac{BK}{KC} = \frac{AB}{AC}$.
Analogamente dal teorema della bisettrice applicato al triangolo ABC' si ha che $\frac{AB}{AC'} = \frac{BK'}{K'C'}$.
Per ipotesi $AC \cong AC'$ e AB in comune ai triangoli per costruzione; quindi possiamo scrivere $\frac{BK}{KC} = \frac{BK'}{K'C'}$.
Consideriamo il triangolo BCC'. Sappiamo che se una retta stacca su due lati di un triangolo segmenti proporzionali, allora è parallela al terzo lato. Nel nostro caso le rette KK' e CC' sono parallele perchè staccano sui lati BC e BC' segmenti proporzionali. Di conseguenza, $C\widehat{D}K' \cong D\widehat{K'}K$ e $C'\widehat{D'}K \cong D'\widehat{K}K'$ perchè angoli alterni interni di rette parallele tagliate da trasversali.
Consideriamo il triangolo AKK': è isoscele perchè $AK \cong AK'$ per ipotesi; in particolare $A\widehat{K'}K \cong A\widehat{K}K'$. Per la proprietà transitiva si ha quindi che $C\widehat{D}A \cong C'\widehat{D'}A$.

Consideriamo ora il triangolo ACC': è isoscele perché $AC \cong AC'$ per ipotesi; in particolare $C\widehat{C'}A \cong C'\widehat{C}A$. Ne segue che $D\widehat{C}A \cong D'\widehat{C'}A$ perchè angoli esterni di angoli congruenti.
Consideriamo ora i triangoli ACD e $AC'D'$. Essi hanno due angoli corrispondenti congruenti ($C'\widehat{D'}A \cong C\widehat{D}A$ e $D\widehat{C}A \cong D'\widehat{C'}A$), pertanto anche $C\widehat{A}D \cong C'\widehat{A}D'$ perchè la somma degli angoli interni di un triangolo è 180°.

Infine, gli angoli $D\widehat{A}K$ e $D'\widehat{A}K'$ sono congruenti perché opposti al vertice. Di conseguenza $C\widehat{A}K' \cong C'\widehat{A}K$ perchè somma di angoli congruenti. Per ipotesi AK e AK' sono bisettrici, pertanto $C\widehat{A}K \cong K\widehat{A}B$ e $C'\widehat{A}K' \cong K'\widehat{A}B$. Per la proprietà transitiva si può quindi scrivere che $C\widehat{A}K \cong K\widehat{A}B \cong C'\widehat{A}K' \cong K'\widehat{A}B$ e di conseguenza si ha che $C\widehat{A}B \cong C'\widehat{A}B$. Quindi i triangoli ABC e ABC' sono congruenti per il primo criterio di congruenza. Da questo segue la tesi.

Consideriamo ora il secondo caso, riportato in figura 2. La dimostrazione si basa su alcune delle

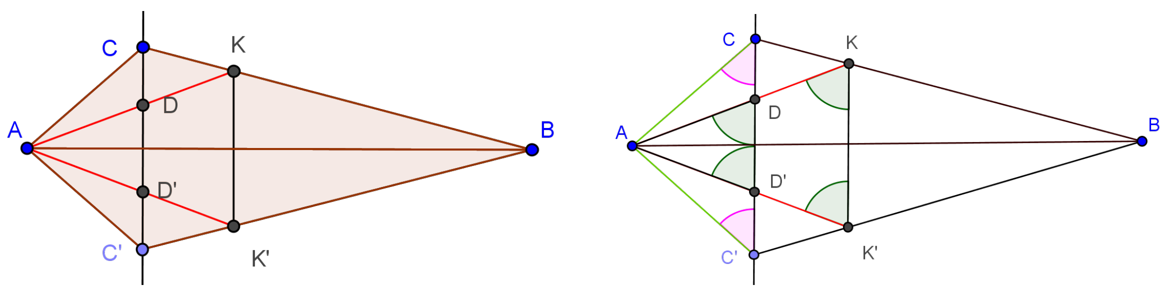


Figura 2: Secondo caso: $C\widehat{A}B$ acuto

osservazioni svolte nel primo caso. Dal parallelismo delle rette KK' e CC' (dimostrabile come nel primo caso) segue che $D\widehat{K}K' \cong A\widehat{D}D'$ e $D'\widehat{K'}K \cong A\widehat{D'}D$. Il triangolo AKK' è isoscele perchè $AK \cong AK'$ per ipotesi, quindi $A\widehat{K}K' \cong A\widehat{K'}K$; per la proprietà transitiva si ha quindi che $A\widehat{D}D' \cong A\widehat{D'}D$. Di conseguenza si ha che $A\widehat{D}C \cong A\widehat{D'}C'$ perchè angoli esterni degli angoli congruenti $A\widehat{D}D'$ e $A\widehat{D'}D$.

Consideriamo ora il triangolo ACC': è isoscele perché $AC \cong AC'$ per ipotesi; in particolare $C\widehat{C'}A \cong C'\widehat{C}A$.

Si ha quindi che $C\widehat{A}D \cong C'\widehat{A}D'$ perchè la somma degli angoli interni dei triangoli ADC e $AD'C'$ deve essere 180°. Ma $C\widehat{A}D$ e $C'\widehat{A}D'$ sono entrambi metà dei rispettivi angoli $C\widehat{A}B$ e $C'\widehat{A}B$ perchè AK e AK' sono bisettrici per ipotesi. Ne segue quindi che $C\widehat{A}B \cong C'\widehat{A}B$ e che i triangoli ABC e ABC' sono congruenti per il primo criterio di congruenza. Da questo segue la tesi.

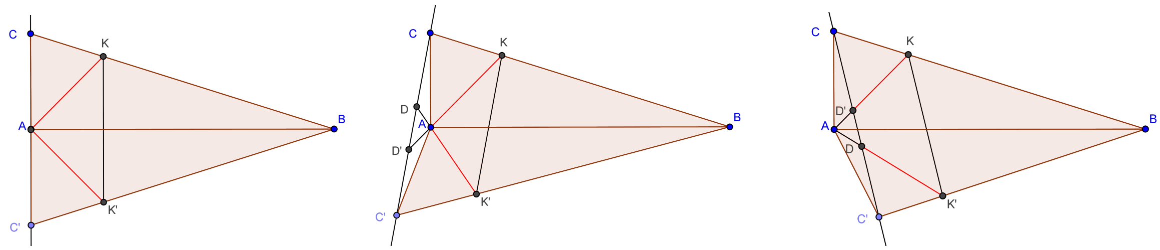


Figura 3: Terzo caso: $C\widehat{A}B$ retto

Consideriamo infine il terzo caso. L'angolo $C\widehat{A}B$ è retto e si vuole dimostrare che anche $C'\widehat{A}B$ è retto per dedurre la tesi come nei casi precedenti. Questo caso si riconduce ai precedenti in quanto a priori non si sa che $A \in CC'$ (altrimenti si dà per scontato che $CC' \perp AB$ e quindi che $C'\widehat{A}B$ sia retto); quindi si ricade nel primo caso se si suppone che l'angolo $C'\widehat{A}B$ sia ottuso o nel secondo caso se si suppone che l'angolo $C'\widehat{A}B$ sia acuto (vedi figura 3). In tutti i casi si dimostra quindi che $C\widehat{A}B \cong C'\widehat{A}B$ da cui segue la congruenza dei triangoli ABC e ABC'.

$\square$