Soluzioni per la Coppa Gauss 2016

Un enorme ringraziamento va a tutti coloro che quest'anno, con la solita, pura abnegazione, hanno contribuito a preparare i testi di gara:
Matteo Bobbio, Mattia Fecit, Leonardo Gobbi, Francesco Morandin, Alessandro Murchio, Simone Muselli, Franco Obersnel, Maurizio Paolini, Damiano Poletti, Francesco Raspaolo, Edi Rosset, Alberto Saracco.

Un ringraziamento particolare a Tuono Pettinato

che ha disegnato i problemi!

Soluzione del problema 1. Le soluzioni dell'equazione $x^2 - 20x + 2016 = 0$ sono 56 e 36.
La risposta è `6428`.

Soluzione del problema 2. Il caso peggiore è che tutti i gioielli rossi siano lisci, e quelli ruvidi siano tutti verdi. A questo punto affinché si abbia la certezza di pescare uno verde liscio deve essere 4500+5000+1=9501.
La risposta è `9501`.

Soluzione del problema 3. Ricordando la formula per il calcolo del volume di un tronco di cono e che è necessario considerare che possa uscire tutta l'aria interna prima del dentifricio, la soluzione è

$$\left[\frac{1}{3}\pi \cdot 12 \cdot (2^2 + 2 \cdot 1 + 1^2) - 75\right] + 2 \approx 14.9$$

La risposta è `0015`.

Soluzione del problema 4. Un numero, se è divisibile per 5, 7, 8 e 9, è anche divisibile per 1, 2, 3, 4 e 6. $2520 - 2016 = 504$.
La risposta è `0504`.

Soluzione del problema 5. Tentiamo di minimizzare il giorno, poi l'ora. Per ottenere come mese gennaio (01), è necessario usare la cifra 2 per P_1, la cifra 3 è l'unica disponibile per T_1. Ma a quel punto non resta una cifra opportuna per T_2. Per febbraio (02) si ottiene una cosa analoga. Passando a marzo, si trova $17 : 48 : 59$ e 26/03 perché una soluzione $2P_2 : K_1K_2 : V_1V_2$ e $1T_2/03$ è impossibile perché non c'è cifra disponibile per P_2. La risposta da dare è il calcolo dell'espressione $17 + 59 \cdot 26 - 48 \cdot 03 = 1407$.
La risposta è `1407`.

Soluzione del problema 6. Si calcola la seguente tabella:

n	$[2016/n]$
$n = 100$	20
$101 \le n < 107$	19
$107 \le n < 113$	18
$113 \le n < 119$	17
$119 \le n < 127$	16
$127 \le n < 135$	15
$135 \le n < 145$	14
$145 \le n < 156$	13
$156 \le n < 169$	12
$169 \le n < 184$	11
$184 \le n \le 200$	10

Sommando

$$20 \cdot 1 + 19 \cdot 6 + 18 \cdot 6 + 17 \cdot 6 + 16 \cdot 8 + 15 \cdot 8 + 14 \cdot 10 + 13 \cdot 11 + 12 \cdot 13 + 11 \cdot 15 + 10 \cdot 17 = 1366.$$

La risposta è `1366`.

Soluzione del problema 7. Gli unici percorsi completi che il robot può fare sono

- 1 mossa (b), poi 18 mosse (a) (lungo il bordo inferiore della scacchiera;
- 15 mosse (a) lungo il bordo sinistro della scacchiera, poi 2 mosse (b), quindi 14 mosse (a).

Dato che i due percorsi hanno in comune due caselle, il risultato è $20 + 15 \cdot 2 = 50$.
La risposta è `0050`.

Soluzione del problema 8. Se si applica la regola 2, questa continua a essere applicata; le uniche sequenze di tre sportelli sono a partire da 5 e da 10.
Se si applica la regola 3 (dunque il numero non è un multiplo di 5) e allo sportello successivo non si applica la regola 6, quest'ultima deve essere la regola 4 oppure la regola 5. Se si applica la regola 4, allo sportello successivo si applica la regola 3 perché sicuramente la regola 2 non è applicabile. Se al successivo sportello si applica la regola 4, allo sportello dopo questo si applica la regola 3 e si arriva ad uno sportello con numero maggiore di 300. Gli sportelli visitati sono al massimo 5 a patto che il numero sia minore di 100.
Se si applica la regola 4 e non si cade in una delle sequenze precedenti, si applica la regola 5 che produce un numero minore di o uguale a $18 = 1 + 9 + 8 = 2 + 9 + 7$.
Gli sportelli a cui si applica la regola 5 sono quelli numerati $77 = 7 \cdot 11$, $121 = 11 \cdot 11$, $143 = 13 \cdot 11$, $187 = 17 \cdot 11$, $209 = 19 \cdot 11$, $253 = 23 \cdot 11$. Le sequenze più lunghe di sportelli che iniziano da uno di questi portano a 4 sportelli e sono

$$\begin{array}{l}
121 \to 4 \to 3 \to 103 \\
187 \to 16 \to 15 \to 225 \\
209 \to 11 \to 2 \to 1 \\
253 \to 10 \to 100 \to 10000
\end{array}$$

A questo punto, resta da cercare quali sequenze di sportelli conducono ad uno di questi:

- L'unico sportello che manda a 121 è il 21 e l'unico che manda a 21 è il 22.
- Gli unici sportelli che mandano a 187 sono 188, che non è raggiungibile da nessuno sportello, e 87 che è raggiungibile soltanto da 88.
- Lo sportello 209 non è raggiungibile da nessuno sportello.
- Lo sportello 253 è raggiungibile dallo sportello 254, che non è raggiungibile da nessuno sportello, e dallo sportello 153, raggiungibile da 154, a sua volta raggiungibile da 54.

La sequenza più lunga di sportelli è

$$54 \to 154 \to 153 \to 253 \to 10 \to 100 \to 10000.$$

La risposta è `0054`.

Soluzione del problema 9. Per prima cosa Kaylee si occuperà di attivare tutti gli interruttori con un numero primo. i numeri primi tra 1 e 100;

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 2 & 3 & 5 & 7 & 11 & 13 & 17 & 19 & 23 & 29 & 31 & 37 & 41 \\ 43 & 47 & 53 & 59 & 61 & 67 & 71 & 73 & 79 & 83 & 89 & 97 \end{array}$$

sono 25. Quindi muove 25 interruttori. Le lampadine che rimangono sicuramente accese sono quelle che hanno come numero uno scomponibile con esattamente 2 numeri primi diversi; le combinazioni di 2 numeri primi diversi tali che il loro prodotto sia più piccolo di 100 sono le seguenti: al numero 2 corrispondono i primi diversi da 2 e minori di 50 che sono 14; al numero 3 quelli compresi tra 4 e 33 che sono 9; al numero 5 quelli compresi tra 6 e 20 che sono 5; al numero 7 quelli compresi tra 8 e 14 che sono 2. Tra questi si osserva che rimangono accesi quelli scomponibili nel prodotto di 3 numeri primi diversi, poiché tali lampadine vengono mosse 6 volte, quindi lasciando inalterato lo stato iniziale. Si ripete quindi il procedimento precedente cercando terne di numeri primi differenti tali che il loro prodotto non sia maggiore di 100. Fissati 2 e 3, si cercano i numeri primi compresi tra 4 e 16 che sono 4. Fissati 2 e 5, si trova il numero primo 7, poi nient'altro. Quindi, tutti i numeri compresi tra 2 e 100 si possono dividere per almeno uno dei numeri così costruiti, quindi a questo punto il sistema elettronico vede la sola lampadina numero 1 accesa. Si attiva l'interruttore numero 100. Quindi il minor numero di movimenti di interruttori è dato dalla seguente somma: 25+30+5+1=61.
La risposta è `0061`.

Soluzione del problema 10. Sia d_n il numero dei divisori (interi positivi) di n intero positivo < 100 e p_n il prodotto delle sue cifre. Diciamo che n è *accettabile* se $d_n = p_n$.
Ricordiamo che se $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{e_i}$ con p_i primi distinti, $d_n = \prod_{i=1}^{k} (e_i + 1)$.
Se $d_n = 1$ allora $n = 1$, che è accettabile.
Se $d_n = 2$ allora n è primo; l'unico naturale accettabile è 2 stesso.
Se $d_n = 3$, n deve essere un quadrato perfetto. Ma il prodotto delle cifre deve essere 3 quindi se $d_n = 3$ non esistono numeri accettabili.
Se $p_n = 4$, allora $n = 4$ o $n = 14$ o $n = 22$ o $n = 41$. Gli unici accettabili sono $n = 14$ e $n = 22$.
Se $p_n = 5$, allora $n = 5$ o $n = 15$ o $n = 51$. Nessuno accettabile.
Se $p_n = 6$, allora $n = 6$ o $n = 16$ o $n = 23$ o $n = 32$ o $n = 61$. 32 è l'unico accettabile.
Se $p_n = 7$, allora $n = 7$ o $n = 17$ o $n = 71$. Nessuno è accettabile.
Se $p_n = 8$, allora $n = 8$ o $n = 18$ o $n = 24$ o $n = 42$ o $n = 81$. 24 e 42 sono accettabili.
È facile osservare che per $d_n \geq 9$ non esistono altri n accettabili < 100.
La risposta è `0007`.

Soluzione del problema 11. I paletti numerati con numeri multipli di 3 e il paletto 1 sono allineati; la distanza tra due successivi è $\frac{2016}{\sqrt{3}}$ m. La distanza tra il paletto 1 e il paletto 3 è uguale all'altezza di un triangolo equilatero di lato 2 m ed è lunga $\sqrt{3}$ m. La retta passante per i paletti 1 e 2 interseca il segmento congiungente i paletti 5 e 6, sia A tale intersezione. Si ha che che la distanza da A al paletto 6 è 4 m e quella da A al paletto 1 è 2 m. Applicando il teorema di Pitagora, la distanza tra i paletti 1 e 6 è $2\sqrt{3}$ m. A questo punto si trova per induzione che la distanza tra 1 e $3k$ è $k\sqrt{3} = \frac{3k}{\sqrt{3}}$. Perciò la distanza richiesta è $\frac{2016}{\sqrt{3}} = 1163.938\ldots$
La risposta è `1163`.

Soluzione del problema 12. Supponiamo che il contadino utilizzi la strategia migliore, cioè quella che massimizza la somma richiesta. Osserviamo che ogni giorno la somma delle altezze cresce di $\frac{p}{n}$ m dove p rappresenta il numero di piante e n come da testo. La strategia migliore risulta essere:

giorno	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
azione	PC	P	P	P	P	C	P	C	C	C	C
p	1	2	3	4	5	5	6	6	6	6	6
n	1	2	3	4	5	1	2	1	1	1	1
$\frac{p}{n}$	1	1	1	1	1	5	3	6	6	6	6

dove C rappresenta l'azione "concimare" e P l'azione "piantare una nuova pianta". Il fatto che questa sia la migliore soluzione è facilmente osservabile cercando di modificarla aumentando l'altezza: sia cercare di raggiungere 7 piante, sia fermarsi a 5 risulta fallimentare. Non esistono poi, evidentemente strategie migliori arrivando a 6 piante. Sommando si ottiene

$$(1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 5 + 3 + 6 + 6 + 6 + 6) \cdot 100 = 3700.$$

La risposta è 3700.

Soluzione del problema 13. La somma dei coefficienti di $P(x)$ è $P(1) = 2017!$. Perciò il numero da trovare è il minimo numero primo maggiore di 2017, cioè 2027.
La risposta è 2027.

Soluzione del problema 14. La prima volta che si preme il pulsante, solo il primo dipositivo di accende e tutti gli altri rimangono spenti. La seconda volta, visto che il primo è nello stato $\boxed{\text{ON}}$, cambia il suo stato in $\boxed{\text{OFF}}$ e passa corrente al secondo, che da $\boxed{\text{OFF}}$ cambia in $\boxed{\text{ON}}$. Quindi la situazione è la seguente: $dispositivo_1$ stato $\boxed{\text{OFF}}$, $dispositivo_2$ stato $\boxed{\text{ON}}$, $dispositivo_3$ stati $\boxed{\text{OFF}}$, e tutti gli altri saranno in stato $\boxed{\text{OFF}}$. La terza volta, la situazione sarà la seguente: $dispositivo_1$ stato $\boxed{\text{ON}}$, $dispositivo_2$ stato $\boxed{\text{ON}}$, $dispositivo_3$ stato $\boxed{\text{OFF}}$, visto che il dispositivo 1 era in stato $\boxed{\text{OFF}}$ ha mutato il suo stato in $\boxed{\text{ON}}$ e non ha trasmesso corrente al secondo. La quarta volta, otteniamo: $dispositivo_1$ stato $\boxed{\text{OFF}}$, $dispositivo_2$ stato $\boxed{\text{OFF}}$, $dispositivo_3$ stati $\boxed{\text{ON}}$. Visto che il primo ha passato corrente al secondo e si è spento, il secondo ha ricevuto corrente e si è spento passando corrente al terzo che si è acceso. Si può notare che questo procedimento è uno dei possibili procedimenti per convertire un numero decimale in un numero binario. Infatti, prendendo $\boxed{\text{ON}}$ $=1$ e $\boxed{\text{OFF}}$ $=0$, con 1 si ottiene 1, con 2 si ottiene 10, con 3 si ottiene 11, con 4 si ottiene 100 e così via. Per dare la risposta, quindi, basta convertire in binario il numero 2016 e contare quanti 1 vi sono. 2016 in base 2 è 11111100000, in quanto $2016 = 1024 + 512 + 256 + 128 + 64 + 32$. Quindi tutti i dispositivi accesi sono 6.
La risposta è 0006.

Soluzione del problema 15. I primi termini della successione sono $A_0 = 2016 = a$, $A_1 = b$ e $A_2 = 2016 - b$; in generale,

$$A_{n+1} = (-1)^n bF_{n+1} + (-1)^{n+1} aF_n$$

dove $(F_n)_n$ è la successione di Fibonacci con dati iniziali $F_0 := 0$ e $F_1 := 1$. Infatti, per $n > 0$, si ha che

$$\begin{aligned} A_{n+2} &= A_n - A_{n+1} \\ &= (-1)^{n-1} bF_n + (-1)^n aF_{n-1} + (-1)^{n+1} bF_{n+1} + (-1)^n aF_n \\ &= (-1)^{n-1} b(F_n + F_{n+1}) + (-1)^n a(F_{n-1} + aF_n) \\ &= (-1)^{n+1} bF_{n+2} + (-1)^{n+2} aF_{n+1}. \end{aligned}$$

La condizione che A_n sia positivo corrisponde a due richieste sul rapporto tra b e a a seconda della parità di n:

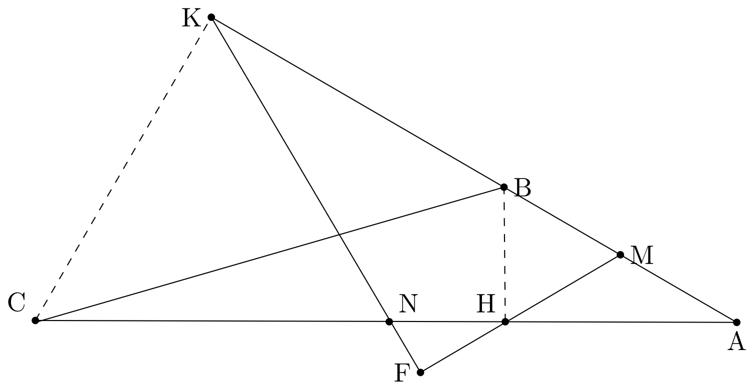
$$\frac{F_{2i}}{F_{2i+1}} < \frac{b}{a} < \frac{F_{2i+1}}{F_{2i+2}}.$$

Dato che entrambe le successioni convergono (crescendo e decrescendo, rispettivamente) a $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ e $2016 \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 1245.9$, per $b = 1246$ esiste un i tale che, da quell'indice in poi, la successione A_{2i+2} è a termini negativi. Si trova del resto che

$$a\frac{F_{11}}{F_{12}} = \frac{2016 \cdot 89}{144} = 1246 < \frac{2016 \cdot 34}{55} = a\frac{F_9}{F_{10}} = 1246.2\overline{54}.$$

La risposta è `1246`.

Soluzione del problema 16. La situazione descritta è rappresentata più accuratamente come segue



È $A\widehat{C}K = H\widehat{B}A = 60°$ perché complementari di $B\widehat{A}C$. Dunque, dato che $C\widehat{K}A$ è retto, $CK = CN$, cosi' come $BH = BM$ dato che $B\widehat{H}A$ è retto. Quindi i triangoli BHM e CNK sono equilateri, da cui $B\widehat{H}M = B\widehat{M}H = 60°$. Inoltre, AKN è isoscele, così $N\widehat{K}A = 30°$ e $M\widehat{F}k = 90°$. La frazione richiesta, quindi, risulta essere $\dfrac{N\widehat{F}M}{B\widehat{H}M} = \dfrac{90}{60} = \dfrac{3}{2} = 1.5$.
La risposta è `1500`.

Soluzione del problema 17. Si osserva innanzitutto che la probabilità che esca un numero dispari è $\frac{1}{4}$ mentre quella che esca un numero pari è $\frac{1}{12}$. Si osserva anche che un numero pari si ottiene sommando 3 numeri pari oppure sommando 1 pari e 2 dispari. Si osserva poi che la probabilità che esca una terna di numeri pari è $\alpha := (\frac{1}{12})^3$, mentre quella che esca un pari e 2 dispari è $\beta := (\frac{1}{4})^2 \frac{1}{12}$. Si considerano ora tutte le terne di lanci che soddisfano la richiesta separandole per tipologia:
$(1, 3, 6), (1, 4, 5), (1, 5, 4), (1, 6, 3) = 4\beta$
$(2, 2, 6), (2, 5, 3), (2, 4, 4), (2, 3, 5), (2, 6, 2) = 3\alpha + 2\beta$
$(3, 1, 6), (3, 2, 5), (3, 3, 4), (3, 4, 3), (3, 5, 2), (3, 6, 1) = 6\beta$
$(4, 1, 5), (4, 2, 4), (4, 3, 3), (4, 4, 2), (4, 5, 1) = 2\alpha + 3\beta$
$(5, 1, 4), (5, 2, 3), (5, 3, 2), (5, 4, 1) = 4\beta$
$(6, 1, 3), (6, 2, 2), (6, 3, 1) = \alpha + 2\beta$.
La soluzione del problema è

$$21\left(\frac{1}{4}\right)^2 \frac{1}{12} + 6\left(\frac{1}{12}\right)^3 = \frac{21}{192} + \frac{1}{288} = 0.112847\ldots$$

La risposta è 1128. La risposta è `1128`.

Soluzione del problema 18. Dato che $f(x) = f(x) \cdot f(0)$ si trova che $f(x) = f(x) \cdot f(0)$, dunque $f(0) = 1$ oppure $f(0) = 0$. Ma il secondo caso non può avvenire, altrimenti per ogni x sarebbe $f(x) = 0$, da cui per ogni x si avrebbe $x^2 = f(2x) - f(x)^2 = 0$ che è assurdo. Sia $a := f(1)$. Ne segue che

$$1 = f(1-1) = f(1) \cdot f(-1) + 1 = a \cdot f(-1) + 1$$

da cui $f(-1) = 0$ se $a \neq 0$. Si trova poi che

$$\begin{aligned} f(2) &= f(1) \cdot f(1) - 1 = a^2 - 1 \\ f(3) &= f(2) \cdot f(1) - 2 = a^3 - a - 2 \\ f(4) &= f(2) \cdot f(2) - 4 = a^4 - 2a^2 - 3 \\ f(4) &= f(1) \cdot f(3) - 3 = a^4 - a^2 - 2a - 3 \end{aligned}$$

Dunque $a^2 - 2a = 0$, da cui $a = 2$ oppure $a = 0$. Quando $a = 0$, si ha $f(x) = f((x-1)+1) = f(x-1) \cdot f(1) - x + 1 = 1 - x$. Quando $a = 2$, si ha $f(x) = f((x+1)-1) = f(x+1) \cdot f(-1) + x + 1 = 1 + x$. Quindi $n = 2$, $F(x) = (1+x) \cdot (1-x) = 1 - x^2$. A questo punto rimane solo da calcolare $|F(2016)| = 4064255$.
La risposta è 4255.

Soluzione del problema 19. L'informazione che Jayne conosce terza e quarta cifra dice che, con la sola somma della terza e della quarta cifra, si riesce ad identificarle univocamente. Ciò vuol dire che la somma è 0 o 18, quindi le ultime due cifre sono 00 o 99. Queste informazioni possono essere ricavate anche da Book, che però non riesce a determinare l'intera combinazione. Se i due numeri che conosce fossero diversi da 0 saprebbe che le ultime due cifre sono 99 (e determinerebbe l'intera combinazione). Dunque il prodotto che conosce è 0 e la somma che conosce è minore di 9 perché, se tale somma fosse 9 (o maggiore di 9), allora Book non sarebbe in grado di concludere nulla sulle cifre della combinazione (il prodotto potrebbe essere 0 perché la prima cifra è 0). Dunque, dato che Book determina tre cifre della combinazione, il prodotto che ha Book è 0 e la somma che ha è un numero minore di 9. Zoe, quindi, sa che le ultime due cifre sono 00 e che la prima cifra è minore di 9. Perché possa sapere la combinazione per intero deve essere in condizioni tali da avere una possibilità che soddisfi tutte le richieste. Questo accade soltanto quando la somma che legge Zoe è 17 dove la combinazione 9800 è da escludere per quanto determinato da Book sulla somma di prima e terza cifra.
La risposta è 8900.

Soluzione del problema 20. Il massimo contributo di facce "scoperte", ottenibile estrando un cubetto, è 4: deve essere un cubetto interno a una faccia. Il modo migliore per estrarne da una faccia è il seguente

	X		X		X	
		X		X		
	X		X		X	
		X		X		
	X		X		X	

Sono 13 cubetti per faccia, in totale $13 \times 6 = 78$. A questo punto si possono togliere cubetti a un livello più interno facendo attenzione che i cubetti tolti più vicino ai vertici, hanno già un vertice in comune con un cubetto tolto da un'altra faccia. Si possono togliere quelli marcati con Y nel riquadro sotto

	X		X		X	
		Y		Y		
	X		Y		X	
		Y		Y		
	X		X		X	

Sono 5 per faccia, in totale 30. Come prima, si può togliere ulteriormente un cubetto al livello ancora più interno per ciascuna faccia, in totale 6. I cubetti estratti fiora soo 114. Gli ultimi due non permettono di "guadagnare" 4 facce, ma soltanto 2, basta toglierli in punti opportuni lungo gli spigoli del cubo esterno. In totale la superficie esposta è

$$6 \times 7 \times 7 + 4 \times 114 + 2 \times 2 = 754.$$

La risposta è 0754.

Soluzione del problema 21. L'idea risolutiva è notare che, una volta che il robot ha lasciato una linea di celle che stava percorrendo per girare a destra, non può più farvi ritorno. A questo punto, il problema da risolvere è lo stesso di prima, ma con una linea di celle in meno e ruotato di 90°. In generale, quindi, si può pensare di risolvere il problema in modo ricorsivo tramite la seguente relazione. Sia $\mathrm{path}(r, c)$ il numero di possibili percorsi fattibili dal robot una volta dati il numero r di righe davanti al robot e il numero c di colonne alla destra del robot; per le considerazioni precedenti

$$\mathrm{path}(r, c+1) = \sum_{h=1}^{r} \mathrm{path}(c, h)$$

dove i casi base sono che $\mathrm{path}(r, 1) = \mathrm{path}(1, c) = 1$. A questo punto, rimane solamente da svolgere i conti per la richiesta del problema (ricordando che facendo i conti si deve operare modulo 10000) il risultato ottenuto è 1440.
Si può anche notare che $\mathrm{path}(\ell+1, k+1) = \binom{\ell+k}{k}$ per induzione su $\ell + k$ dato che

$$\mathrm{path}(\ell+1, k+2) = \sum_{h=1}^{\ell+1} \mathrm{path}(k+1, h) = \sum_{h=0}^{\ell} \binom{k+h}{h} = \binom{k+\ell+1}{\ell} = \binom{\ell+k+1}{k+1}$$

e

$$\mathrm{path}(\ell+2, k+2) = \sum_{h=1}^{\ell+2} \mathrm{path}(k+1, h) = \sum_{h=0}^{\ell+1} \binom{k+h}{k} = \binom{k+\ell+1}{k}$$

per $k \leq \ell$.
La risposta è 1440.

Soluzione del problema 22. Sia O il centro della circonferenza, sia H l'intersezione tra le diagonali del quadrilatero. Sia $r = 12\,\mathrm{cm}$. Siccome $AD = r$ è $\widehat{AOD} = 60^o$. Avremo quindi che $\widehat{ACD} = 30^o$. Inoltre sappiamo che $\widehat{ACD} = \widehat{ABD}$ quindi abbiamo che ABH e DCH sono triangoli rettangoli simili con angoli 30^o e 60^o. Dato che $AB = \frac{3}{4}r$, si ha che $AH = \frac{3}{8}r$ e $BH = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{3}{4}r = \frac{3\sqrt{3}}{8}r$. D'altra parte abbiamo che il triangolo ADH è rettangolo con ipotenusa $AD = r$ e cateto minore $AH = \frac{3}{8}r$. Quindi $HD = \frac{\sqrt{55}}{8}r$. Infine $CH = \sqrt{3}HD = \frac{\sqrt{3}\sqrt{55}}{8}r$.
La richiesta è il rapporto $\dfrac{BH + HD}{AH + HC}$ se è minore di 1, altrimenti il reciproco:

$$\frac{BH + HD}{AH + HC} = \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{55}}{8} \frac{8}{3 + \sqrt{3}\sqrt{55}} = \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{55}}{3 + \sqrt{3}\sqrt{55}} = 0.795971\ldots$$

Con le approssimazioni iniziali il risultato è $0.7959611\ldots$.
La risposta è 7959.

Soluzione del problema 23. Osserviamo innanzitutto che Mal vince se e solo se, dopo aver pescato 5 carte, il prodotto di queste è divisibile per il valore della carta di Inara. Questo ci permette di non preoccuparci del fatto che si fermi alla prima carta se ha già vinto, ci possiamo tranquillamente concentrare sulle 5 carte insieme. Le combinazioni di carte possibili pescate da Mal sono $\dbinom{12}{5} = 792$. Ora costruiamo la seguente tabella distinguendo le possibili pescate dal banco e mostra i casi favorevoli in ogni pescata.

carta pescata da Inara	combinazioni favorevoli a Mal
1	792
2	792 - 1 $=$ 791
3	$792 - \binom{10}{5} = 540$
4	$792 - 1 - 6\binom{5}{4} = 761$
5	$792 - \binom{8}{5} = 736$
6	$792 - \binom{10}{5} - 1 = 539$
7	0
8	$792 - 1 - 6\binom{5}{4} - 5 - \binom{6}{2}\binom{5}{3} = 606$
9	$\binom{10}{3} = 120$
10	$792 - 1 - \binom{8}{5} = 735$

Di conseguenza la probabilità di vittoria è

$$\frac{1}{13}\Big(1 + \frac{791}{792} + \frac{540}{792} + \frac{761}{792} + \frac{736}{792} + \frac{539}{792} + \frac{606}{792} + \frac{120}{792} + \frac{4 \cdot 735}{792}\Big) = \frac{7825}{10296} \approx 0,7600039$$

La risposta è `7600`.

Soluzione del problema 24.
Il primo non può essere incerto. Consideriamo il caso che sia un bugiardo. Le configurazioni che si sviluppano da un bugiardo possono essere di tre tipi

$$\begin{array}{ccccc} \text{posizione} & k & k+1 & k+2 & k+3 \\ \hline & & & \mathrm{S}\longrightarrow & \mathrm{B} \\ & & & \nearrow & \\ & & \mathrm{S}\longrightarrow & \mathrm{I}\longrightarrow & \mathrm{B} \\ & & \nearrow & & \\ & \mathrm{B}\longrightarrow & \mathrm{I}\longrightarrow & \mathrm{B} & \end{array}$$

Nel caso che il primo sia sincero, il secondo è necessariamente bugiardo e, da quello in poi, la configurazione si sviluppa nello stesso modo. Infine, una configurazione può terminare con un bugiardo, oppure con una sequenza di tipo B $\to$ S. Il numero $b(k)$ di bugiardi che compaiono al k-esimo livello in una configurazione in cui il primo è bugiardo è dato dalla seguente ricorsione:

$$\begin{cases} b(1) = 1 \\ b(2) = 0 \\ b(3) = 1 \\ b(n+3) = 2b(n) + b(n+1) \quad \text{per } n \geq 1 \end{cases}$$

Il risultato è

$$b(20) + b(19) + b(19) + b(18) = 3100.$$

La risposta è `3100`.