

# PENDOLO SEMPLICE E COMPOSTO



A cura di Riccardo Ceotto, Andrea D'Agostino, Gaspare Mazza, Elia Parussolo e Tania Sonogo

Realizzato nell'ambito del **Progetto Archimede** con la supervisione dei Proff. Fabio Breda, Francesco Maria Cardano e Francesco Zampieri  
I.S.I.S.S. "M.Casagrande", Pieve di Soligo, Giugno 2019

## Sommario

Con il nome generico di *pendolo* si intende un sistema fisico costituito da una massa, soggetta all'attrazione gravitazionale, sospesa tramite un filo od un asta rigida inestensibili. Si distinguono due principali tipologie di pendoli: quello *semplice*, in cui è possibile considerare in buona approssimazione puntiforme la massa sospesa e trascurabile quella del filo, e quello *composto*, costituito più genericamente da un corpo rigido in grado di oscillare in un piano verticale attorno ad un'asse orizzontale non passante per il suo centro di massa. In questo articolo sarà descritto uno studio cinematico e dinamico dell'oscillazione di pendoli semplici e composti, effettuato utilizzando un sensore di posizione ad ultrasuoni collegato alla piattaforma digitale di acquisizione dati VinciLab, interfacciata a sua volta con il PC attraverso il software COACH7. Dal confronto fra i dati raccolti ed i comportamenti attesi, determinati dalle corrispondenti equazioni differenziali, sarà inoltre ricavata in entrambi i casi una stima del valore locale dell'accelerazione di gravità.

## 1 Il pendolo semplice

Si definisce *pendolo semplice*, o *pendolo matematico*, un sistema costituito da una massa  $m$ , di dimensioni sufficientemente piccole da poter essere considerata puntiforme rispetto al filo di lunghezza  $l$  attraverso cui è sospesa. Il filo dovrà risultare in buona approssimazione inestensibile e di massa trascurabile ed il sistema sarà libero di oscillare con attriti trascurabili su un piano verticale sotto l'azione della forza peso della massetta e della tensione del filo, come illustrato in figura 1.

### 1.1 Il modello teorico

Si considerino le forze agenti sul pendolo in oscillazione nel generico istante in cui il filo forma un angolo  $\theta$  rispetto alla verticale. La risultante delle forze agenti sulla massetta sarà determinata dalla sua forza peso  $m\vec{g}$  e dalla reazione vincolare data dalla tensione  $\vec{T}$  del filo. Per il II principio della dinamica si ha quindi che:

$$\vec{F}_{tot} = m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{a}$$

Scomponendo la forza peso in una componente radiale  $mg \cos \theta$ , che viene equilibrata dalla tensione, ed una tangenziale  $mg \sin \theta$ , dalla relazione vettoriale si ottengono le seguenti equazioni scalari

$$\begin{cases} mg \cos \theta - T = 0 & (1a) \\ -mg \sin \theta = ma & (1b) \end{cases}$$

dove il segno meno nella (1b) è dovuto al fatto che la componente tangenziale della forza peso si comporta come una *forza di richiamo*, determinando accelerazioni nel verso di percorrenza positivo della traiettoria

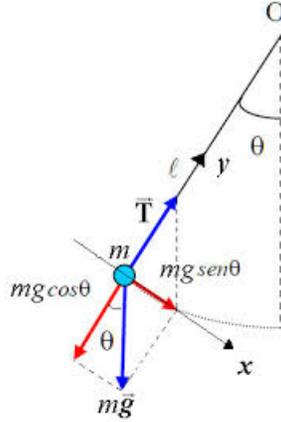


Figura 1: Diagramma di corpo libero del pendolo semplice. In un generico istante la massetta è sottoposta all'azione della sua forza peso  $m\vec{g}$  ed alla reazione vincolare data dalla tensione  $\vec{T}$  del filo (in blu). Se nell'istante considerato il filo forma un angolo  $\theta$  rispetto alla verticale, la forza peso può essere scomposta in una componente radiale  $mg \cos \theta$ , che viene equilibrata dalla tensione, ed una tangenziale  $mg \sin \theta$  (in rosso), che funge da *forza di richiamo*.

quando l'angolo  $\theta$  è negativo, e viceversa. Il moto del pendolo risulta ovviamente determinato dalla (1b) da cui, ricordando la relazione fra accelerazioni tangenziali e radiali  $a = \alpha l$  si ottiene:

$$-mg \sin \theta = ml\alpha$$

D'altra parte, l'accelerazione angolare non è altro che la derivata seconda rispetto al tempo dell'angolo

$$\alpha(t) = \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} \quad (2)$$

e pertanto, semplificando anche la massa presente in entrambi i membri dell'equazione, si ha:

$$-g \sin \theta(t) = l \frac{d^2\theta(t)}{dt^2}$$

Quella ottenuta è l'equazione differenziale del pendolo semplice, che può essere semplificata nell'approssimazione di piccoli angoli di oscillazione, per cui, come conseguenza del limite fondamentale

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1 \quad (3)$$

risulta  $\sin \theta \simeq \theta$ . In tale approssimazione l'equazione differenziale del pendolo semplice può quindi essere scritta in forma normale come:

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta(t) = 0$$

Questa è un'equazione differenziale del II ordine omogenea a cui risulta associata l'equazione quadratica  $z^2 + g/l = 0$  con discriminante:

$$\Delta = -\frac{4g}{l} < 0$$

Quest'ultima ammette quindi soluzioni complesse e coniugate

$$z_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{g}{l}}$$

dove  $i = \sqrt{-1}$  è appunto l'unità immaginaria. Confrontando le soluzioni ottenute con la forma generale di un numero complesso  $z = a \pm ib$ , si ha

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = \sqrt{\frac{g}{l}} \end{cases}$$

ovvero che in questo caso le soluzioni sono puramente immaginarie. La teoria matematica prevede che, nel caso di equazione associata a discriminante negativo, le soluzioni della corrispondente equazione differenziale debbano essere del tipo

$$y = e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx) \quad (4)$$

da cui, operando le opportune sostituzioni, risulta:

$$\theta(t) = C_1 \cos \sqrt{\frac{g}{l}} t + C_2 \sin \sqrt{\frac{g}{l}} t \quad (5)$$

La legge oraria ottenuta descrive un moto oscillatorio di pulsazione:

$$\omega = b = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (6)$$

I valori delle costanti  $C_1$  e  $C_2$  dipendono dalle condizioni iniziali (dette anche *condizioni al contorno*) del sistema, per le quali una scelta opportuna può essere ad esempio

$$\begin{cases} \theta(0) = 0 \\ \Omega(0) = \Omega_{max} \end{cases} \quad (7)$$

dove  $\Omega(t)$  indica la velocità angolare istantanea del pendolo. Si ha così che

$$\theta(0) = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 = 0 \rightarrow C_1 = 0$$

ed utilizzando la definizione di velocità angolare come derivata rispetto al tempo dell'angolo

$$\Omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} \quad (8)$$

dalla (5) deriva

$$\Omega(t) = \omega (-C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t)$$

da cui si ottiene infine

$$\Omega(0) = \omega (-C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0) = \Omega_{max} \rightarrow C_2 = \frac{\Omega_{max}}{\omega}$$

Una possibile soluzione per la legge oraria del pendolo semplice risulta quindi

$$\theta(t) = \frac{\Omega_{max}}{\omega} \sin \omega t = \theta_{max} \sin \omega t$$

avendo definito la massima ampiezza di oscillazione

$$\theta_{max} = \frac{\Omega_{max}}{\omega} = \sqrt{\frac{l}{g}} \Omega_{max}$$

È inoltre possibile introdurre una fase  $\varphi$  nella legge oraria ottenuta per tenere conto dell'eventuale scelta di differenti condizioni iniziali:

$$\theta(t) = \theta_{max} \sin(\omega t + \varphi)$$

Se si vuole invece descrivere il moto del pendolo semplice lungo un asse orizzontale, anziché in coordinate angolari, si ha che  $x(t) = l \sin \theta(t) \simeq l\theta(t)$  nel limite di piccole oscillazioni, con  $x_{max} \simeq l\theta_{max}$ . La legge oraria diventa quindi

$$x(t) = x_{max} \sin(\omega t + \varphi)$$

e può essere infine generalizzata aggiungendo una traslazione orizzontale  $x_0$  per tenere conto dei casi in cui l'origine del sistema di riferimento non coincide con la posizione di equilibrio del pendolo:

$$x(t) = x_0 + x_{max} \sin(\omega t + \varphi) \quad (9)$$

Un'interessante proprietà della legge del pendolo semplice è il cosiddetto *isocronismo*, osservato sperimentalmente per primo da Galileo Galilei, ovvero il fatto che il periodo di oscillazione  $T$ , dato da

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad (10)$$

risulta indipendente dall'ampiezza di oscillazione fintanto che questa rimane di modesta entità ( $\sin \theta \simeq \theta$ ).

## 1.2 La misura sperimentale

Alla luce dei risultati teorici illustrati, si vuole verificare la validità della legge oraria del pendolo semplice (9) e del suo isocronismo (10) utilizzando infine la (6) per ottenere una stima del valore dell'accelerazione gravitazionale come:

$$g = \omega^2 l \quad (11)$$

Si è provveduto innanzi tutto a montare l'apparecchiatura sperimentale, un pendolo costituito da una



Figura 2: Fotografia del pendolo semplice utilizzato. Questo è costituito da una massetta sferica in legno appesa ad uno stativo da laboratorio per mezzo di un filo di cotone.

massetta sferica in legno appesa ad uno stativo da laboratorio per mezzo di un filo di cotone, come illustrato in figura 2.

Prima di procedere all'acquisizione dei dati di oscillazione del pendolo è stato necessario misurare la sua lunghezza  $L$ , somma della lunghezza  $l$  del filo e del raggio  $r$  della sfera. Le due misure sono state effettuate separatamente utilizzando rispettivamente un *flessometro* di sensibilità

$$\Delta l = 1 \cdot 10^{-3} \text{ m} \quad (12)$$

ed un calibro *ventesimo*:

$$\Delta\phi = 1/20 \text{ mm} = 5 \cdot 10^{-5} \text{ m} \rightarrow \Delta r = 2,5 \cdot 10^{-5} \text{ m} \quad (13)$$

Il risultato ammonta complessivamente a

$$L = (0,585 \pm 0,001) \text{ m} \quad (14)$$

dove l'incertezza, calcolata attraverso la propagazione degli errori assoluti, coincide in pratica con quella del flessometro.

Si è quindi proceduto all'acquisizione dei dati di oscillazione del pendolo, ovvero la sua elongazione  $x(t)$  rispetto alla posizione di equilibrio, in funzione del tempo. A tal scopo è stato utilizzato un sensore



Figura 3: Fotografia del sensore di posizione utilizzato. Questo emette ultrasuoni che si riflettono sulla massetta in movimento e vengono quindi rivelati dal sensore. L'elongazione del pendolo all'istante  $t$ ,  $x(t)$  viene quindi determinata dalla misura dell'intervallo di tempo che intercorre fra l'emissione e la rivelazione degli ultrasuoni.

di posizione ad ultrasuoni, illustrato in figura 3, collegato alla piattaforma digitale di acquisizione dati VinciLab, interfacciata a sua volta con il PC attraverso il *software* COACH7. Il dispositivo emette ultrasuoni che si riflettono sulla massetta in movimento e vengono quindi rivelati dallo stesso sensore. L'elongazione  $x(t)$  del pendolo all'istante  $t$  viene quindi determinata dalla misura dell'intervallo di tempo che intercorre fra l'emissione e la rivelazione degli ultrasuoni. Il manuale dello strumento riporta una sensibilità minima sulle misure di posizione di  $1 \text{ mm}$  ed una accuratezza tipica di  $1,5 \text{ mm}$ . Nel seguito dell'analisi si assumerà un errore strumentale dato dalla media delle due:

$$\Delta x \simeq 1,3 \text{ mm} = 1,3 \cdot 10^{-3} \text{ m} \quad (15)$$

Prima di passare all'acquisizione dati si è azzerato il sensore con il pendolo in posizione di equilibrio, in modo da ottenere misure di oscillazione il più possibile simmetriche rispetto allo zero strumentale. Si è quindi proceduto ad allontanare il pendolo dall'equilibrio e lo si è rilasciato avviando la raccolta dati appena l'oscillazione appariva stabile.

La piattaforma VinciLab, illustrata in figura 4, ad ogni *run* di raccolta dati acquisisce 500 misurazioni con una scansione temporale di  $0,02 \text{ s}$  su un intervallo di  $10 \text{ s}$ . I dati raccolti vengono visualizzati in tempo reale direttamente sulla piattaforma VinciLab, ma possono essere più convenientemente analizzati in un secondo momento attraverso il software COACH7, che consente ad esempio di lavorare utilizzando contemporaneamente sia la rappresentazione grafica che i dati numerici, come illustrato in figura 5. Come



Figura 4: Fotografia della piattaforma VinciLab. Ad ogni *run* di raccolta dati, questa acquisisce 500 misurazioni con una scansione temporale di  $0,02\text{ s}$  su un intervallo di  $10\text{ s}$ .

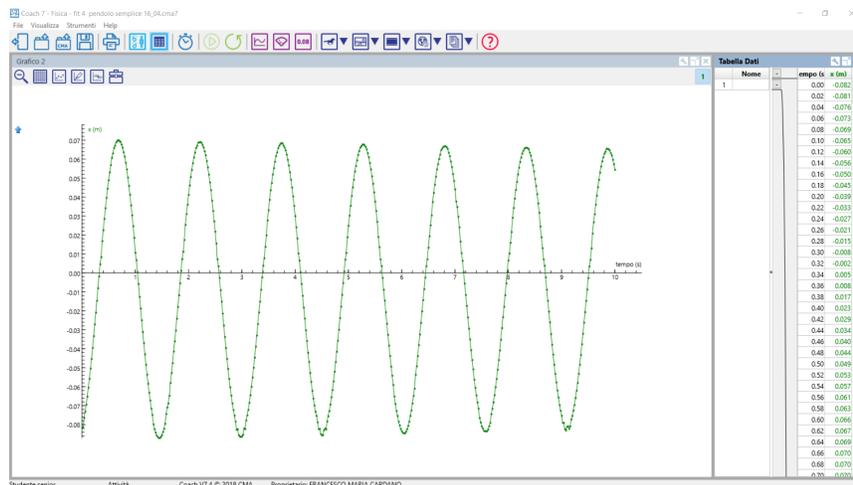


Figura 5: Interfaccia grafica del *software* COACH7. Questo garantisce contemporaneamente accesso ai dati sia sotto forma di rappresentazione grafica che ai corrispondenti valori numerici.

sarà illustrato nel dettaglio nella prossima sottosezione, il *software* fornisce inoltre delle procedure di *fit*<sup>1</sup> dei dati visualizzabili direttamente sul grafico, mentre i dati numerici possono essere esportati per essere ad esempio analizzati utilizzando un qualsiasi foglio di calcolo.

La realizzazione di un moto oscillatorio stabile da parte del pendolo si è in ogni caso rivelata particolarmente delicata, in quanto è stato necessario ridurre al minimo le oscillazioni laterali o le rotazioni rispetto all'asse del filo. Tali distorsioni producevano infatti grafici spazio-tempo imprecisi, che non consentivano di ottenere un buon accordo con la legge oraria prevista teoricamente (9) né una stima accurata dell'accelerazione di gravità secondo la (11).

Una volta stabilita una procedura adeguata per ottenere misure di oscillazione in buon accordo con la (9), si è andati a verificare anche l'isocronismo del pendolo (10), ripetendo l'acquisizione dati al variare dell'ampiezza di oscillazione (per  $\theta_{max} = 5^\circ, 10^\circ, 15^\circ$ ).

<sup>1</sup>Con il termine *fit* si intende la procedura attraverso la quale si cerca di adattare una curva teorica ai dati, da cui si ottengono stime dei valori dei parametri della funzione che forniscono il migliore accostamento, insieme ad un indicatore della bontà dei risultati ottenuti.

### 1.3 Analisi dei dati

Come accennato all'inizio della precedente sottosezione, gli obiettivi di questo studio del pendolo semplice sono stati:

1. la verifica sperimentale della legge oraria attesa (9);
2. la stima del valore dell'accelerazione gravitazionale  $g$  (11);
3. la verifica dell'isocronismo del pendolo semplice nel regime di piccole oscillazioni (10).

Come illustrato in figura 6, per verificare la legge oraria del pendolo semplice è stata utilizzata la funzionalità di *fit* del software COACH7. In accordo alla (9), nel caso del pendolo semplice è stato eseguito un *fit* a 4 parametri secondo un modello sinusoidale. Risulta evidente il buon accordo presente fra le

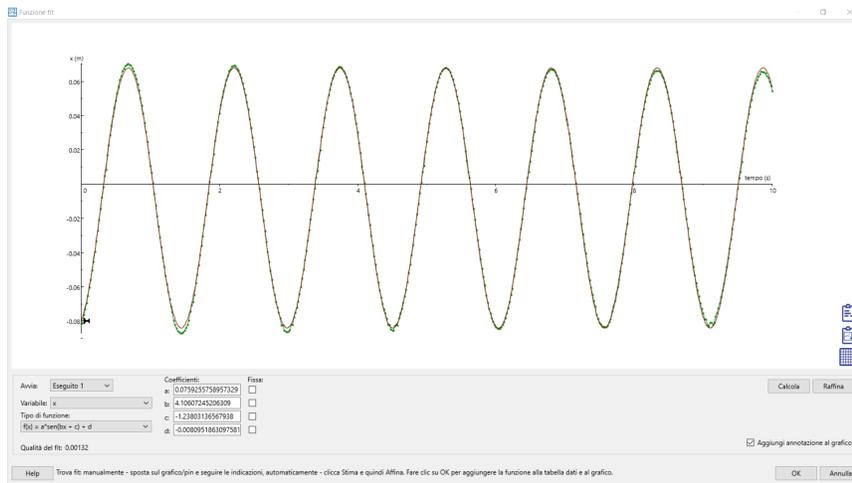


Figura 6: Strumento di *fit* all'interno del software COACH7. Nel grafico in alto sono riportati i dati (in verde) insieme alla curva di *fit* (in rosso), mentre sotto è riportata l'espressione analitica della funzione, insieme alle migliori stime dei parametri. In accordo alla (9), nel caso del pendolo semplice è stato eseguito un *fit* a 4 parametri secondo un modello sinusoidale.

misure sperimentali e la legge oraria prevista teoricamente, accordo che è stato in ogni caso verificato quantitativamente attraverso un *test*  $\chi^2$  di bontà del *fit*<sup>2</sup>. Calcolando un  $\chi^2$  a 496 gradi di libertà<sup>3</sup> a partire dai dati raccolti e dalla funzione di *best fit*, si è ottenuto un valore di

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{500} \frac{(x_i^{mis} - x_i^{fit})^2}{(\Delta x_i)^2} = \frac{1}{(\Delta x)^2} \sum_{i=1}^{500} (x_i^{mis} - x_i^{fit})^2 \simeq 535 \quad (16)$$

che risulta compreso nell'intervallo di confidenza  $435 \lesssim \chi^2 \lesssim 561$  per un *test a due code con livello di significatività*  $2\sigma$  ( $Pr\{435 \lesssim \chi^2 \lesssim 561\} = 95\%$ )<sup>4</sup>.

I risultati ottenuti per le migliori stime dei parametri sono riportati in tabella 1 insieme alle rispettive incertezze. La stima degli errori è risultata particolarmente complessa dato che lo strumento di *fit* di COACH7 restituiva solo quella dei parametri, ne forniva alcuna indicazione utile sugli algoritmi utilizzati.

<sup>2</sup>Si veda l'appendice per alcuni cenni generali sui *test di ipotesi*. ed in particolare sul test  $\chi^2$ .

<sup>3</sup>I gradi di libertà sono dati dalle 500 misure meno i 4 parametri stimati a partire da queste. Tanto migliore è l'adattamento della curva ai dati, tanto più il valore calcolato del  $\chi^2$  sarà vicino a quello atteso, che coincide appunto con il numero di gradi di libertà.

<sup>4</sup>Per  $\sigma$  si intende la deviazione standard della *distribuzione Gaussiana*. Infatti ci si attende che il 95% delle misure di una variabile distribuita in modo *normale* con media  $\mu$  cada nell'intervallo  $\mu - 2\sigma < x < \mu + 2\sigma$ .

$x_0 (mm)$	$x_{max} (mm)$	$\omega (rad/s)$	$\varphi (rad)$
$-8,1 \pm 1,3$	$75,9 \pm 1,3$	$4,106 \pm 0,001$	$-1,238 \pm 0,005$

Tabella 1: Risultati ottenuti e corrispondenti incertezze per le migliori stime dei parametri nel *fit* con modello sinusoidale. Per ottenere le stime degli errori è stato utilizzato un approccio *variazionale* basato sul test del  $\chi^2$ .

Si è infine deciso di utilizzare un approccio *variazionale* basato sul test del  $\chi^2$ : il valore di ognuno dei parametri è stato aumentato e diminuito leggermente mentre gli altri restavano fissati su quelli di *best fit*, fintanto che il  $\chi^2$  calcolato non eccedeva l'estremo superiore del rispettivo intervallo di confidenza. Si sono così ottenuti i massimi e minimi valori dei parametri tali da rendere ancora accettabile il test di bontà del *fit*, e di conseguenza i corrispondenti errori. Le incertezze stimate su  $x_0$  e  $x_{max}$ , rispettivamente pari a  $\Delta x_0 = 0,3 mm$  e  $\Delta x_{max} = 0,4 mm$ , sono però risultate più piccole dell'errore strumentale (15) e sono pertanto state sostituite con tale valore. Sebbene il metodo utilizzato non possa considerarsi rigoroso dal punto di vista dell'approccio statistico, ed abbia restituito in generale errori troppo piccoli per non essere considerate delle sottostime, è risultato comunque fondamentale per ottenere l'incertezza sulla misura dell'accelerazione di gravità.

Passando quindi alla stima di  $g$ , questa è stata ottenuta inserendo nella (11) i valori di pulsazione (tabella 1) e lunghezza (14) stimati, da cui risulta:

$$g = \omega^2 l = 4,106^2 \cdot 0,585 \frac{m}{s^2} = 9,866 \frac{m}{s^2}$$

Utilizzando la propagazione degli errori relativi si ha che la corrispondente incertezza è data da:

$$\Delta g = \left( \frac{\Delta L}{L} + \frac{2\Delta\omega}{\omega} \right) \cdot g = \left( \frac{0,001}{0,585} + \frac{2 \cdot 0,001}{4,106} \right) \cdot 9,866 \frac{m}{s^2} = 0,02 \frac{m}{s^2}$$

La stima finale per l'accelerazione di gravità ottenuta tramite il pendolo semplice risulta quindi:

$$g = (9,87 \pm 0,02) m/s^2 \quad (17)$$

Sebbene la misura non risulti compatibile con il valore atteso di  $9,81 m/s^2$ , lo scarto percentuale rispetto a tale valore risulta inferiore allo 0,6% e molto probabilmente sarebbe rientrato nell'intervallo di errore se si fosse riusciti ad ottenere una stima più realistica dell'incertezza sulla pulsazione  $\omega$ .

Si può considerare altresì il fatto di aver proceduto alle misure sperimentali in un laboratorio situato ad una certa latitudine ed ad una certa altitudine sul livello del mare. In questo caso, possiamo apportare una correzione al valore di riferimento per  $g$ , secondo la relazione<sup>5</sup>

$$g = 9,7803184 (1 + A \sin^2 L - B \sin^2 2L) - 3,086 \cdot 10^{-6} h \quad (18)$$

In questa formula:  $A = 0,0053024$ ,  $B = 0,0000059$ ,  $L$  è la latitudine del luogo e  $h$  l'altezza sul livello del mare. Procedendo ad inserire i seguenti valori per l'Istituto Casagrande di Pieve di Soligo

latitudine $L$	altitudine $h$
$45^\circ 51' 14.58''$	$140 m$

si ha un valore di riferimento di  $g$  che vale

$$g = 9,82 m/s^2$$

<sup>5</sup>Fonte: Wikipedia, alla voce -accelerazione di gravità terrestre-

In tal modo lo scarto percentuale si riduce ulteriormente allo 0,5%.

Per verificare infine l'isocronismo del pendolo nel limite di piccole oscillazioni, la procedura di *fit* è stata ripetuta per le misure relative a tre diverse ampiezze:  $\theta_{max} = 5^\circ, 10^\circ, 15^\circ$ . In ognuno dei casi, a partire dalla stima della pulsazione e del corrispondente errore, è stato calcolato il periodo di oscillazione attraverso la (10) utilizzando la propagazione degli errori relativi per determinare la relativa incertezza:

$$\Delta T = \frac{\Delta \omega}{\omega} T = 2\pi \frac{\Delta \omega}{\omega^2}$$

I risultati ottenuti per le stime dei periodi e delle rispettive incertezze sono riportati in tabella 2. Mentre

$\theta_{max} (^\circ)$	5	10	15
$T (ms)$	$1528,6 \pm 0,4$	$1528,2 \pm 0,4$	$1530,2 \pm 0,4$

Tabella 2: Periodi del pendolo semplice con i corrispondenti errori in corrispondenza di tre diverse ampiezze di oscillazione. Mentre i periodi relativi ad angoli di  $5^\circ$  e  $10^\circ$  risultano compatibili fra di loro entro le incertezze sperimentali, non lo è quello per l'ampiezza di  $15^\circ$ .

i periodi relativi ad angoli di  $5^\circ$  e  $10^\circ$  risultano compatibili fra di loro entro le incertezze sperimentali, non lo è quello per l'ampiezza di  $15^\circ$ . Ciò potrebbe essere dovuto sia alla bontà dell'approssimazione per piccole oscillazioni, che comincia a peggiorare sensibilmente all'aumentare dell'angolo, che ad una sottostima dell'incertezza sul periodo, conseguenza a sua volta di quella sull'errore della pulsazione. È in ogni caso possibile affermare che l'isocronismo del pendolo può considerarsi nel complesso verificato.

## 2 Il pendolo composto

Si definisce *pendolo composto*, o *pendolo fisico*, un sistema costituito da un generico corpo rigido in grado di oscillare in un piano verticale attorno ad un asse orizzontale non passante per il suo centro di massa, come illustrato in figura 7.

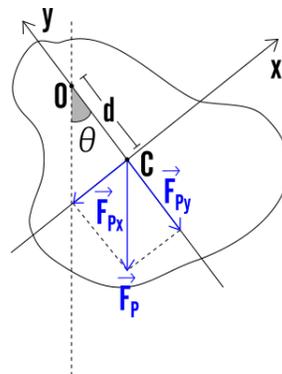


Figura 7: Diagramma di corpo libero del pendolo composto. Il pendolo è vincolato ad oscillare attorno ad un asse  $O$  posto a distanza  $d$  dal suo centro di massa  $C$ . Quando la congiungente  $\overline{OC}$  forma un angolo  $\theta$  rispetto alla verticale, il pendolo è sottoposto all'azione della sua forza peso  $\vec{F}_P$ , che può essere scomposta in una componente  $\vec{F}_{Py}$  parallela al braccio  $d \sin \theta$  ed una perpendicolare  $\vec{F}_{Px}$ , che funge da forza di richiamo.

## 2.1 Il modello teorico

Si consideri il pendolo, vincolato ad oscillare attorno ad un asse  $O$  posto a distanza  $d$  dal suo centro di massa  $C$ . Dato che le reazioni vincolari sono applicate direttamente sull'asse di rotazione, l'unica forza attiva è il suo peso  $\vec{F}_P$ . Questo esercita un momento torcente

$$\vec{M}_P = \vec{d} \times \vec{F}_P$$

che in un sistema di riferimento *destrorso*<sup>6</sup> assume intensità

$$M_P = -F_P d \sin \theta = -mgd \sin \theta \quad (19)$$

quando la congiungente  $\overline{OC}$  forma un angolo  $\theta$  rispetto alla verticale. Il segno meno nella (19) è dovuto al fatto che la componente della forza peso  $\vec{F}_{P_x}$  perpendicolare al braccio si comporta come una *forza di richiamo*, determinando accelerazioni nel verso di percorrenza negativo della traiettoria quando l'angolo  $\theta$  è positivo, e viceversa.

Nel caso del pendolo composto, data la natura molto meno ideale rispetto a quella del pendolo semplice, sarà inoltre necessario considerare anche l'azione di resistenze passive, imputabili ad esempio agli attriti presenti nella zona di contatto fra il corpo rigido e l'asse di rotazione e/o alla resistenza dell'aria. Senza necessità di investigarne ulteriormente le cause, queste possono in ogni caso essere genericamente considerate come delle forze di attrito viscoso che forniscono complessivamente un momento torcente proporzionale alla velocità angolare  $\Omega$  ed opposto a questa:

$$M_A = -h\Omega$$

in cui  $h$  rappresenta appunto un coefficiente di attrito viscoso. Utilizzando la legge fondamentale della dinamica rotazionale

$$\vec{M}_{tot} = \vec{M}_P + \vec{M}_A = I\vec{\alpha}$$

dove  $I$  è il momento d'inerzia del pendolo, è quindi possibile scrivere

$$-mgd \sin \theta - h\Omega = I\alpha$$

da cui, ricordando le definizioni di velocità (8) ed accelerazione (2) angolare, si ha:

$$-mgd \sin \theta(t) - h \frac{d\theta(t)}{dt} = I \frac{d^2\theta(t)}{dt^2}$$

Quella ottenuta è l'equazione differenziale del pendolo composto, che può essere semplificata nell'approssimazione di piccoli angoli di oscillazione, per cui, come conseguenza del limite fondamentale (3) risulta  $\sin \theta \simeq \theta$ . In tale approssimazione l'equazione differenziale del pendolo composto può quindi essere scritta in forma normale come:

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \frac{h}{I} \frac{d\theta(t)}{dt} + \frac{mgd}{I} \theta(t) = 0$$

Questa è un'equazione differenziale del II ordine omogenea a cui risulta associata l'equazione quadratica

$$z^2 + \frac{h}{I}z + \frac{mgd}{I} = 0 \quad (20)$$

che ha discriminante:

$$\Delta = \frac{h^2}{I^2} - 4 \frac{mgd}{I}$$

---

<sup>6</sup>In cui cioè il l'asse  $z$  coincide con quello di oscillazione ed ha verso uscente dal piano, risultando determinato da quello degli altri in figura 7 secondo la regola della mano destra.

Affinché il pendolo abbia effettivamente un comportamento oscillatorio, è necessario imporre che tale discriminante risulti negativo, ottenendo una condizione sul coefficiente di attrito viscoso che dovrà risultare  $h < 2\sqrt{mgdI}$ <sup>7</sup>. La (20) ammetterà quindi soluzioni complesse e coniugate nella forma:

$$z_{1,2} = \frac{-h \pm i\sqrt{4mgdI - h^2}}{2I}$$

Confrontando anche in questo caso le soluzioni ottenute con la forma generale di un numero complesso  $z = a \pm ib$ , si ha quindi che:

$$\begin{cases} a = -\frac{h}{2I} \\ b = \frac{\sqrt{4mgdI - h^2}}{2I} \end{cases}$$

Le possibili soluzioni dell'equazione differenziale associata devono quindi assumere ancora una volta la forma (4), da cui, operando le opportune sostituzioni, risulta:

$$\theta(t) = e^{-\frac{ht}{2I}} \left( C_1 \cos \frac{\sqrt{4mgdI - h^2}}{2I} t + C_2 \sin \frac{\sqrt{4mgdI - h^2}}{2I} t \right)$$

La legge oraria ottenuta descrive un moto oscillatorio di pulsazione  $\omega$  ed ampiezza decrescente nel tempo per effetto di uno smorzamento esponenziale di coefficiente  $k$ :

$$\begin{cases} \omega = b = \frac{\sqrt{4mgdI - h^2}}{2I} \end{cases} \quad (21a)$$

$$\begin{cases} k = -a = \frac{h}{2I} \end{cases} \quad (21b)$$

I valori delle costanti  $C_1$  e  $C_2$  possono essere determinati imponendo, come nel caso del pendolo semplice, le opportune condizioni al contorno (7), da cui si ottiene in questo caso:

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = \frac{\Omega_{max}}{\omega} = \theta_{max} \end{cases}$$

Si ha così che una possibile soluzione per la legge oraria del pendolo composto risulta quindi

$$\theta(t) = \theta_{max} e^{-kt} \sin \omega t$$

e risulta nuovamente possibile introdurre una fase  $\varphi$  nella legge oraria ottenuta per tenere conto dell'eventuale scelta di differenti condizioni iniziali:

$$\theta(t) = \theta_{max} e^{-kt} \sin (\omega t + \varphi)$$

In modo analogo a quanto visto per il pendolo semplice, anche per quello composto è infine possibile descrivere il moto lungo un asse orizzontale anziché in coordinate angolari, tenendo conto anche dei casi in cui l'origine del sistema di riferimento non coincide con la posizione di equilibrio del pendolo. Si ottiene in definitiva:

$$x(t) = x_0 + x_{max} e^{-kt} \sin (\omega t + \varphi) \quad (22)$$

Il periodo di oscillazione

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{4\pi I}{\sqrt{4mgdI - h^2}}$$

risulta anche in questo indipendente dall'ampiezza di oscillazione fintanto che questa rimane di modesta entità ( $\sin \theta \simeq \theta$ ).

---

<sup>7</sup>Dato l'interesse prettamente fisico ed il livello matematico della presente trattazione, che si cercherà di mantenere il più basilare possibile, non si discuteranno ulteriormente le ragioni di questa affermazione né si analizzeranno gli altri casi possibili. È comunque logico concludere che valori maggiori del coefficiente di attrito viscoso  $h$ , tali appunto da invertire il verso della disequazione, determinerebbero uno smorzamento troppo forte che non consentirebbe l'oscillazione armonica del pendolo

## 2.2 La misura sperimentale

Alla luce dei risultati teorici illustrati, si vuole verificare anche in questo caso la validità della legge oraria del pendolo composto (22) utilizzando infine la (21a) per ottenere una stima del valore dell'accelerazione gravitazionale come:

$$g = \frac{4I^2\omega^2 + h^2}{4mdI}$$

In questo caso è però necessario disporre di una stima indipendente del coefficiente di attrito viscoso  $h$ , che può essere ricavata dalla (21b) come  $h = 2Ik$ , da cui deriva infine:

$$g = \frac{4I^2\omega^2 + 4I^2k^2}{4mdI} = \frac{(k^2 + \omega^2) I}{md} \quad (23)$$

La prima problematica da affrontare nello studio sperimentale del pendolo composto è la stima della

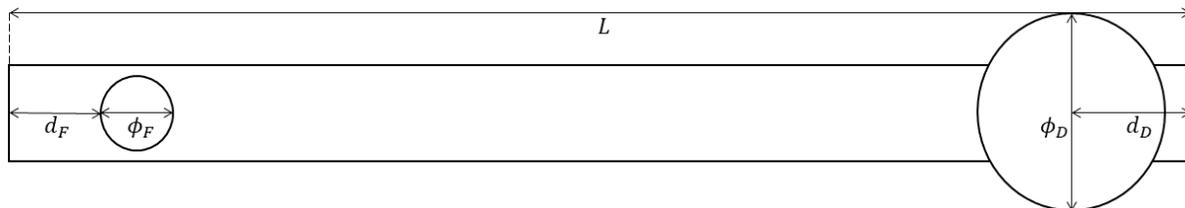


Figura 8: Rappresentazione schematica del pendolo composto utilizzato. Questo è costituito da un'asta rigida di lunghezza  $L$ , con un foro di diametro  $\phi_F$  posto a distanza  $d_F$  dalla sua estremità superiore, all'interno del quale passa l'asse di rotazione. All'altra estremità è invece presente un disco sottile di diametro  $\phi_D$  e centro distante  $d_D$  dal bordo dell'asta, con la sezione rivolta nella direzione di oscillazione in modo da costituire un bersaglio adeguato per il sensore ad ultrasuoni.

posizione del baricentro e del suo momento d'inerzia. Come illustrato in figura 8, il pendolo risulta infatti un oggetto complesso, costituito da un'asta rigida di lunghezza  $L$ , con un foro di diametro  $\phi_F$  posto a distanza  $d_F$  dalla sua estremità superiore, all'interno del quale passa l'asse di rotazione. Oltre il bordo dell'asta è inoltre presente una vite di bloccaggio, come illustrato in figura 9. All'altra estremità è invece montato un disco sottile di diametro  $\phi_D$  e centro distante  $d_D$  dal bordo dell'asta, con la sezione rivolta nella direzione di oscillazione in modo da costituire un bersaglio adeguato per il sensore ad ultrasuoni. Si è

Grandezza fisica	Unità di misura	Valore più attendibile	Errore
$L$	$mm$	615	$\pm 1$
$\phi_F$		6,15	$\pm 0,05$
$d_F$		8,65	
$\phi_D$		58,95	
$d_D$		33,35	
$m_A$	$g$	171,62	$\pm 0,01$
$m_D$		14,17	

Tabella 3: Dimensioni e masse delle differenti parti del pendolo composto. I simboli  $m_A$  e  $m_D$  si riferiscono rispettivamente alle masse di asta e disco. Si faccia invece riferimento alla figura 8 per il significato geometrico delle altre grandezze riportate.

quindi proceduto innanzi tutto a misurare le suddette dimensioni e le masse delle varie parti del pendolo, con i risultati riportati in tabella 3. Sono stati utilizzati gli stessi strumenti del caso precedente, ovvero

un flessometro (12) ed un calibro ventesimale (13), con l'aggiunta di una bilancia elettronica di sensibilità  $\Delta m = 1 \cdot 10^{-2} g$ . Una volta effettuate le suddette misure si è montato il pendolo come illustrato in figura



Figura 9: Fotografia del pendolo composto utilizzato. Questo è costituito da un'asta rigida con un foro in prossimità della sua estremità superiore, all'interno del quale passa l'asse di rotazione. Oltre il bordo dell'asta è inoltre presente una vite di bloccaggio. All'altra estremità è invece montato un disco sottile, con la sezione rivolta nella direzione di oscillazione in modo da costituire un bersaglio adeguato per il sensore ad ultrasuoni.

9, ed anche in questo caso, prima di passare all'acquisizione dati, si è azzerato il sensore con il pendolo in posizione di equilibrio, in modo da ottenere misure di oscillazione il più possibile simmetriche rispetto allo zero strumentale. Si è quindi proceduto ad allontanare il pendolo dall'equilibrio e lo si è rilasciato avviando la raccolta dati appena l'oscillazione appariva stabile. La realizzazione di un moto oscillatorio stabile da parte del pendolo si è rivelata di nuovo particolarmente delicata, in quanto è stato necessario ridurre al minimo le oscillazioni laterali. Queste producevano infatti grafici spazio-tempo imprecisi che non consentivano di ottenere un buon accordo con la legge oraria prevista teoricamente (22) né una stima accurata dell'accelerazione di gravità secondo la (23). In tutti i *run* di acquisizione dati effettuati è in ogni caso emerso chiaramente che l'oscillazione del pendolo composto risultava evidentemente smorzata come previsto dal modello teorico.

### 2.3 Analisi dei dati

Come accennato nella precedente sottosezione, la prima problematica riscontrata nello studio sperimentale del pendolo composto è stata la stima del suo momento d'inerzia e della posizione del baricentro, in cui si può considerare applicata la forza peso complessiva agente sulla massa

$$m_{tot} = m_A + m_D = (185,79 \pm 0,02) g \quad (24)$$

Nella fattispecie, la posizione del baricentro del pendolo può essere ottenuta approssimativamente come media ponderata di quelle dei baricentri delle sue componenti: l'asta ed il disco. Trascurando la presenza del foro per il passaggio dell'asse di rotazione e della vite di bloccaggio, che determinano in ogni caso contributi opposti che dovrebbero cancellarsi almeno parzialmente, il baricentro dell'asta dovrebbe essere situato in posizione  $L/2$  rispetto alla sua estremità superiore, mentre quello del disco sarà invece posto a distanza  $L - d_D$  dalla stessa. La posizione del baricentro rispetto all'estremità dell'asta sarà quindi

$$d_C = \frac{m_A L/2 + m_D (L - d_D)}{m_{tot}} = 32,84 \text{ cm}$$

con un'incertezza che, in base alle regole della propagazione degli errori, risulta data da:

$$\Delta d_C = \left\{ \frac{(\Delta m/m_A + \Delta L/L) m_A L/2 + [\Delta m/m_D + (\Delta L + \Delta d_D) / (L - d_D)] m_D (L - d_D)}{m_A L/2 + m_D (L - d_D)} + \frac{2\Delta m}{m_{tot}} \right\} d_C = 0,06 \text{ cm}$$

Come illustrato in figure 8 e 10, la distanza fra baricentro ed asse di rotazione risulta infine

$$d = d_C - d_F - \frac{\phi_F}{2} = 31,67 \text{ cm}$$

con un errore di

$$\Delta d = \Delta d_C + \Delta d_F + \frac{\Delta \phi_F}{2} = 0,07 \text{ cm}$$

determinando così una misura di

$$d = (3,167 \pm 0,007) \cdot 10^{-1} \text{ m} \quad (25)$$

Trascurando ancora una volta la presenza del foro e della vite di bloccaggio, il momento di inerzia del

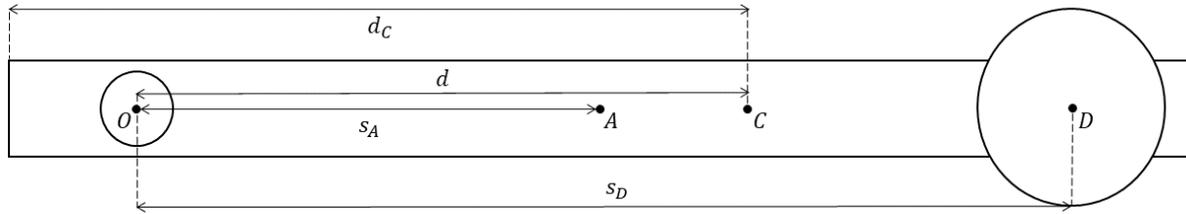


Figura 10: Rappresentazione schematica del pendolo composto utilizzato. I simboli  $s_A$  e  $s_D$  denotano le distanze dei baricentri di asta e disco dall'asse di rotazione, necessarie per calcolare i rispettivi momenti di inerzia con il teorema degli assi paralleli di Huygens-Steiner. La distanza  $d_C$  indica invece la posizione del baricentro del sistema rispetto all'estremità superiore dell'asta, mentre  $d$  è quella rispetto all'asse di rotazione.

pendolo può invece essere approssimato come la somma di quelli di un'asta e di un disco di spessore trascurabile, entrambi rotanti intorno ad un asse orizzontale, che non passa però né per il baricentro dell'asta né per il diametro del disco. Il momento d'inerzia dell'asta rispetto ad un generico asse trasversale passante per il baricentro è

$$I_{0A} = \frac{1}{12} m_A L^2 = 5,41 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

con un'incertezza di

$$\Delta I_{0A} = \left( \frac{\Delta m}{m_A} + 2 \frac{\Delta L}{L} \right) I_{0A} = 0,02 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

La stima dello stesso rispetto all'asse di rotazione del pendolo può facilmente essere ottenuta attraverso il teorema degli assi paralleli di Huygens-Steiner, utilizzando come lunghezza di traslazione la misura  $s_A$  che, in riferimento alle figure 8 e 10, risulta

$$s_A = \frac{L}{2} - d_F - \frac{\phi_F}{2} = 29,58 \text{ cm}$$

con un errore di:

$$\Delta s_A = \frac{\Delta L}{2} + \Delta d_F + \frac{\Delta \phi_F}{2} = 0,06 \text{ cm}$$

Il momento d'inerzia dell'asta diventa così

$$I_A = I_{0A} + m_A s_A^2 = 2,042 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

con un'incertezza di

$$\Delta I_A = \Delta I_{0A} + \left( \frac{\Delta m}{m_A} + 2 \frac{\Delta s_A}{s_A} \right) m_A s_A^2 = 0,008 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

risultando in una misura di:

$$I_A = (2,042 \pm 0,008) \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad (26)$$

Per quanto riguarda il disco, il suo momento di inerzia rispetto ad un generico asse diametrale vale

$$I_{0D} = \frac{1}{4} m r_D^2 = \frac{1}{16} m \phi_D^2 = 3,078 \cdot 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

con un errore di:

$$\Delta I_{0D} = \left( \frac{\Delta m}{m_D} + 2 \frac{\Delta \phi_D}{\phi_D} \right) I_{0D} = 0,007 \cdot 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Volendo utilizzare anche in questo caso il teorema degli assi paralleli di Huygens-Steiner per calcolare il suo momento d'inerzia rispetto all'asse di rotazione del pendolo, in riferimento alle figure 8 e 10, si ha

$$s_D = L - d_D - d_F - \frac{\phi_F}{2} = 56,99 \text{ cm}$$

con un'incertezza di:

$$\Delta s_D = \Delta L + \Delta d_D + \Delta d_F + \frac{\Delta \phi_F}{2} = 0,11 \text{ cm}$$

Il momento d'inerzia del disco diventa così

$$I_D = I_{0D} + m_D s_D^2 = 4,61 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

con un errore di

$$\Delta I_D = \Delta I_{0D} + \left( \frac{\Delta m}{m_D} + 2 \frac{\Delta s_D}{s_D} \right) m_D s_D^2 = 0,02 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

risultando infine in una misura di:

$$I_D = (4,61 \pm 0,02) \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad (27)$$

Il momento d'inerzia totale del pendolo è dato dalla somma di quelli dell'asta (26) e del disco (27) e vale quindi in definitiva:

$$I_{tot} = I_A + I_D = (2,50 \pm 0,01) \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad (28)$$

Una volta stimate la posizione del baricentro ed il momento d'inerzia dell'oscillatore, si è proceduto all'analisi delle misure di oscillazione, utilizzando la stessa procedura illustrata nel caso del pendolo semplice. Come illustrato in figura 11, per verificare la legge oraria del pendolo composto è stata utilizzata la funzionalità di *fit* del *software* COACH7. In accordo alla (22), nel caso del pendolo composto è stato eseguito un *fit* a 5 parametri secondo un modello sinusoidale smorzato esponenzialmente. Risulta evidente il buon accordo presente fra le misure sperimentali e la legge oraria prevista teoricamente, accordo che è stato in ogni caso verificato quantitativamente attraverso un test  $\chi^2$  di bontà del *fit*. Calcolando un  $\chi^2$  a 495 gradi di libertà a partire dai dati raccolti e dalla funzione di *best fit*, si è ottenuto un valore di

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{500} \frac{(x_i^{mis} - x_i^{fit})^2}{(\Delta x_i)^2} = \frac{1}{(\Delta x)^2} \sum_{i=1}^{500} (x_i^{mis} - x_i^{fit})^2 \simeq 455 \quad (29)$$

che risulta compreso nell'intervallo di confidenza  $434 \lesssim \chi^2 \lesssim 560$  per un test a due code con livello di significatività  $2\sigma$  ( $Pr\{434 \lesssim \chi^2 \lesssim 560\} = 95\%$ ).

I risultati ottenuti per le migliori stime dei parametri sono riportati in tabella 4 insieme alle rispettive incertezze. La stima degli errori è stata condotta ancora una volta utilizzando l'approccio già illustrato nel

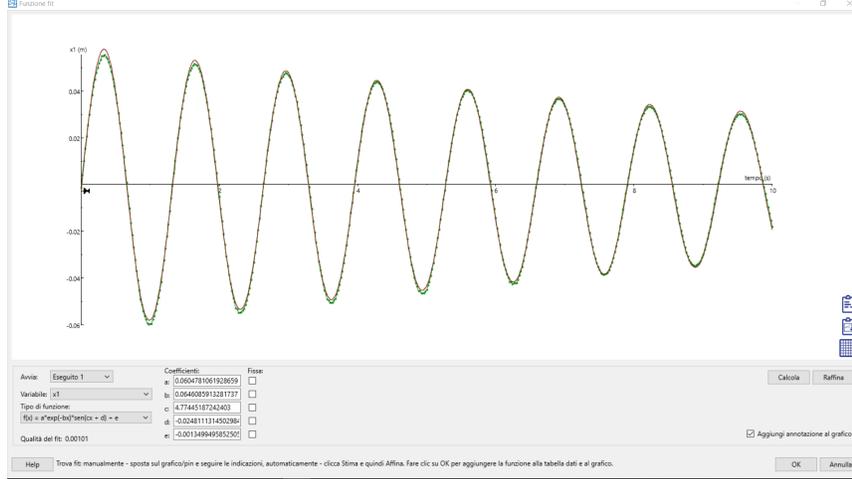


Figura 11: *Fit* per i dati del pendolo composto effettuate tramite il *software* COACH7. Nel grafico in alto sono riportati i dati (in verde) insieme alla curva di *fit* (in rosso), mentre sotto è riportata l'espressione analitica della funzione, insieme alle migliori stime dei parametri. In accordo alla (22), nel caso del pendolo composto è stato eseguito un *fit* a 5 parametri secondo un modello sinusoidale smorzato esponenzialmente.

$x_0$ (mm)	$x_{max}$ (mm)	$k$ ( $s^{-1}$ )	$\omega$ (rad/s)	$\varphi$ (rad)
$-1,3 \pm 1,3$	$60,5 \pm 1,3$	$0,065 \pm 0,003$	$4,774 \pm 0,003$	$-0,025 \pm 0,015$

Tabella 4: Risultati ottenuti e corrispondenti incertezze per le migliori stime dei parametri nel *fit* con modello sinusoidale smorzato esponenzialmente. Per ottenere le stime degli errori è stato utilizzato un approccio *variazionale* basato sul test del  $\chi^2$ .

caso del pendolo semplice: il valore di ognuno dei parametri è stato aumentato e diminuito leggermente mentre gli altri restavano fissati su quelli di *best fit*, fintanto che il  $\chi^2$  calcolato non eccedeva l'estremo superiore del rispettivo intervallo di confidenza. Si sono così ottenuti i massimi e minimi valori dei parametri tali da rendere ancora accettabile il test di bontà del *fit*, e di conseguenza i corrispondenti errori. Le incertezze stimate su  $x_0$  e  $x_{max}$ , rispettivamente pari a  $\Delta x_0 = 0,5 \text{ mm}$  e  $\Delta x_{max} = 0,9 \text{ mm}$ , sono però risultate anche in questo caso più piccole dell'errore strumentale (15) e sono pertanto state sostituite con tale valore.

Passando quindi alla stima di  $g$ , questa è stata ottenuta inserendo nella (23) i valori stimati di massa totale (24), posizione del baricentro (25), momento d'inerzia (28), coefficiente di smorzamento e pulsazione (tabella 4), da cui risulta:

$$g = \frac{(k^2 + \omega^2) I_{tot}}{m_{tot} d} = 9,70 \frac{m}{s^2}$$

Utilizzando la propagazione degli errori relativi, si ha che la corrispondente incertezza è data da:

$$\Delta g = \left( \frac{2k\Delta k + 2\omega\Delta\omega}{k^2 + \omega^2} + \frac{\Delta I}{I_{tot}} + \frac{\Delta m_{tot}}{m_{tot}} + \frac{\Delta d}{d} \right) \cdot g = 0,07 \frac{m}{s^2}$$

La stima finale per l'accelerazione di gravità ottenuta con il pendolo composto risulta quindi:

$$g = (9,70 \pm 0,07) m/s^2 \quad (30)$$

La misura ottenuta non risulta compatibile con il valore atteso di  $9,81 \text{ m/s}^2$ , con uno scarto percentuale pari a circa l'1%. Tale differenza è quasi sicuramente dovuta ad una sottostima del momento d'inerzia e/o ad una sovrastima della distanza fra baricentro ed asse di rotazione, imputabili ad esempio all'aver trascurato la presenza del foro e della vite di bloccaggio. Uno scarto di tale entità sarebbe in ogni caso molto probabilmente rientrato nell'intervallo di errore se si fosse riusciti ad ottenere una stima più realistica dell'incertezza sulla pulsazione  $\omega$ .

## Conclusioni

In questo lavoro è stato presentato uno studio cinematico e dinamico dell'oscillazione del pendolo semplice e di quello composto.

Per ognuno dei due è stato inizialmente delineato il quadro teorico, ricavando dalla dinamica la corrispondente equazione differenziale e le rispettive soluzioni.

Le misure di oscillazione sono state effettuate per mezzo di un sensore di posizione ad ultrasuoni collegato alla piattaforma digitale di acquisizione dati VinciLab, interfacciata a sua volta con il PC attraverso il *software* COACH7.

Nel caso del pendolo composto è stato inoltre necessario stimare preliminarmente con una buona accuratezza la posizione del baricentro del sistema rispetto al suo asse di rotazione, ed il momento d'inerzia totale.

Per verificare l'esistenza di un buon accordo delle misure effettuate con i comportamenti attesi, sono state utilizzate metodologie avanzate di analisi quali l'adattamento dei modelli teorici ai dati ed i relativi test  $\chi^2$  di bontà del *fit*.

Dal confronto fra le misure effettuate ed i comportamenti attesi sono inoltre state ricavate in entrambi i casi stime del valore locale dell'accelerazione di gravità (11 e 23) che, sebbene non siano risultate compatibili entro gli errori sperimentali con il valore atteso di  $9,81 \text{ m/s}^2$  (oppure di  $9,82 \text{ m/s}^2$  secondo la (18)), presentano differenze massime dell'ordine dell'1% rispetto a questa. Tali differenze sono quasi sicuramente imputabili ad una sottostima del momento d'inerzia e/o ad una sovrastima della distanza fra baricentro ed asse di rotazione. Uno scarto di tale entità sarebbe in ogni caso molto probabilmente rientrato nell'intervallo di errore se si fosse riusciti ad ottenere una stima più realistica dell'incertezza sulla pulsazione  $\omega$ .

Nel caso del pendolo semplice è stato inoltre verificato l'isocronismo del periodo nel limite di piccole oscillazioni (tabella 2): mentre i periodi relativi ad angoli di  $5^\circ$  e  $10^\circ$  sono risultati compatibili fra di loro entro le incertezze sperimentali, non lo è stato quello per l'ampiezza di  $15^\circ$ . Ciò potrebbe essere dovuto sia alla bontà dell'approssimazione per piccole oscillazioni, che comincia a peggiorare sensibilmente all'aumentare dell'angolo, che ad una sottostima dell'incertezza sul periodo, conseguenza ancora una volta di quella sull'errore della pulsazione. È in ogni caso possibile affermare che l'isocronismo del pendolo può considerarsi nel complesso verificato.

## Appendice: i test di ipotesi ed il test $\chi^2$ di bontà del *fit*

Quello del test di ipotesi è un metodo di *inferenza statistica*<sup>8</sup>, comunemente utilizzato per confrontare fra loro due insiemi di misure, od un campione di dati con un modello teorico. Per ipotesi statistica si intende una congettura verificabile sulla base delle osservazioni. Nel test viene formulata un'ipotesi  $H_1$ , detta *alternativa*, e questa viene confrontata con quella di riferimento, o *ipotesi nulla*  $H_0$ , che non propone alcuna correlazione fra i dati. Il confronto sarà da ritenersi statisticamente significativo quando la relazione tra i dati sarebbe improbabile se fosse vera l'ipotesi di riferimento. Per determinare quali risultati di uno studio porterebbero al rifiuto dell'ipotesi di riferimento rispetto a quella alternativa è pertanto necessario fissare preliminarmente una probabilità di soglia: il livello di significatività.

Un test di ipotesi è in un certo senso paragonabile ad un processo penale: un imputato è considerato

---

<sup>8</sup>Per inferenza statistica si intende una procedura attraverso cui è possibile indurre le caratteristiche di una *popolazione* dall'osservazione di una parte di essa, detta *campione*.

innocente (ipotesi nulla  $H_0$ ) ed il pubblico ministero cerca di dimostrarne la colpevolezza (ipotesi alternativa  $H_1$ ) *oltre ogni ragionevole dubbio*. Così come nel processo la presunzione di innocenza viene respinta solo quando un errore è molto improbabile, allo stesso modo nel test si cerca di dimostrare la falsità dell'ipotesi nulla. L'errore di negare l'ipotesi di riferimento quando questa è vera, paragonabile nell'analogia del processo alla condanna di un imputato innocente, è detto errore di I specie. L'altro possibile tipo di errore è quello di II specie, analogo all'assoluzione di un imputato colpevole. La massima

	$H_0$ è vera: innocenza	$H_1$ è vera: colpevolezza
Si accetta $H_0$ : assoluzione	Decisione corretta: (1 - $\alpha$ )	Decisione sbagliata: errore di II specie ( $\beta$ )
Si rifiuta $H_0$ : condanna	Decisione sbagliata: errore di I specie ( $\alpha$ )	Decisione corretta: (1 - $\beta$ )

Tabella 5: Analogia processuale del test di ipotesi. Il test può sbagliare rifiutando l'ipotesi nulla quando questa è vera, commettendo così un errore di I specie paragonabile alla condanna di un imputato innocente, o accettandola quando è falsa, commettendo un errore di II specie paragonabile all'assoluzione di un imputato colpevole. Così come nel processo la presunzione di innocenza viene respinta solo quando si dimostra essere falsa *oltre ogni ragionevole dubbio*, allo stesso modo nel test di ipotesi si sceglie di fissare la massima probabilità  $\alpha$  di compiere errori di I specie che si è disposti ad accettare. D'altra parte al diminuire di questa tenderà ad aumentare il rischio  $\beta$  di compiere errori di II specie.

probabilità di compiere errori di I specie che si è disposti ad accettare è per l'appunto la significatività  $\alpha$  del test, che viene solitamente fissata al più piccolo valore possibile (si cerca di garantire la presunzione di innocenza di imputati non colpevoli), con valori tipici del 5% ( $2\sigma$ ) o dell'1% ( $3\sigma$ ). D'altra parte al diminuire del livello di significatività tende ad aumentare il rischio  $\beta$  di compiere errori di II specie. La probabilità  $1 - \beta$  è detta potenza del test. I possibili esiti del test sono sintetizzati in tabella 5 insieme alla corrispondenti probabilità.

Un particolare tipo di test di ipotesi è appunto il test  $\chi^2$ , che si usa per stabilire se un determinato set di dati si adatta bene o no al corrispondente modello teorico. In questo caso l'ipotesi nulla e quella alternativa sono rispettivamente:

- $H_0$ : non c'è disaccordo significativo fra funzione e dati, il *fit* è buono;
- $H_1$ : c'è un significativo disaccordo, il *fit* non è buono.

La statistica utile è in questo caso quella del  $\chi^2$  a  $N$  gradi di libertà, definita come la distribuzione di una somma dei quadrati di  $N$  variabili casuali gaussiane indipendenti. Nel caso in esame le singole variabili sono rappresentate dagli scarti tra i valori attesi dal *fit* e quelli effettivamente misurati, normalizzati ai corrispondenti errori di misura, mentre i gradi di libertà risultano ridotti a  $\nu = N - n$ , avendo calcolato  $n$  parametri a partire dai dati stessi:

$$\chi^2_\nu = \sum_{i=1}^N \frac{(x_i^{mis} - x_i^{fit})^2}{(\Delta x_i)^2}$$

In caso di buon accordo fra funzione e dati ci si attende che lo scarto fra il singolo valore di *fit* e quello misurato in corrispondenza sia in media dell'ordine di grandezza del rispettivo errore, per cui il valore atteso del  $\chi^2$  risulta pari al numero di gradi di libertà. L'accordo sarà peggiore nel caso di valori più grandi del  $\chi^2$  calcolato, mentre valori troppo piccoli possono indicare una sovrastima degli errori sperimentali. In termini del  $\chi^2$  le ipotesi del test possono quindi essere riformulate come:

- $H_0$ : il  $\chi^2$  calcolato è compatibile con quello atteso al livello di significatività stabilito;
- $H_1$ : il  $\chi^2$  calcolato è sensibilmente diverso da quello atteso al livello di significatività stabilito.

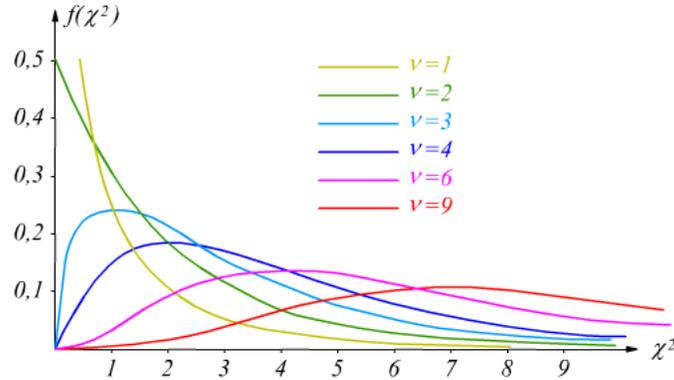


Figura 12: Distribuzione del  $\chi^2$  al variare dei gradi di libertà  $\nu$ . Mentre a bassi gradi di libertà le curve risultano fortemente asimmetriche, tale effetto diminuisce mano a mano che questi aumentano.

Come illustrato a titolo esemplificativo in figura 12, la funzione di distribuzione del  $\chi^2$  al variare dei gradi di libertà  $\nu$  è nota. Mentre a bassi gradi di libertà le curve risultano fortemente asimmetriche, tale effetto diminuisce mano a mano che questi aumentano. Dato che l'ipotesi alternativa  $H_1$  scelta è appunto che il  $\chi^2$  calcolato sia sensibilmente diverso da quello atteso, si effettuerà in questo caso un cosiddetto test a 2 code, calcolando i valori *critici* minimo  $\chi^2_{min}$  e massimo  $\chi^2_{max}$  oltre i quali la probabilità di trovare il  $\chi^2$  sia complessivamente pari alla significatività  $\alpha$  stabilita per il test ( $\alpha/2$  a sinistra di  $\chi^2_{min}$  e  $\alpha/2$  a destra di  $\chi^2_{max}$ ). Ciò può essere ottenuto sia leggendo i valori critici nelle apposite tabelle, in cui sono riportati in funzione della probabilità e dei gradi di libertà, che calcolandoli attraverso la funzione di distribuzione, disponibile nella maggioranza dei *software* di analisi dati e fogli di calcolo.

Come illustrato in figura 13, se il valore calcolato risulta compreso fra quelli critici  $\chi^2_{min} < \chi^2 < \chi^2_{max}$



Figura 13: Test  $\chi^2$  a 2 code. La probabilità di trovare il  $\chi^2$  oltre i valori critici è complessivamente pari alla significatività  $\alpha$  del test. Se il valore calcolato risulta compreso fra questi l'ipotesi di riferimento può considerarsi accettabile, mentre per valori esterni questa è da rigettarsi a favore di quella alternativa.

l'ipotesi di riferimento (la bontà del *fit* per l'appunto) può considerarsi accettabile, mentre per valori esterni questa sarà da rigettare a favore di quella alternativa.