



IL CIRCUITO RLC



Studio del circuito RLC in regime pseudoperiodico e stima dei valori dell'induttanza L e della capacità C

A cura di Foltran Alberto, Recchia Michela, Vitali Marina, Viviani Camilla, Peccolo Simone, Sech Edoardo, Sadak Ikram, Milanese Nicolò, Toffolin Leonardo, Chisini Giovanni

Realizzato nell'ambito del **Progetto Archimede**
con la supervisione del Prof. F.Zampieri
I.S.I.S.S. "M.Casagrande", Pieve di Soligo, Dicembre 2015

Sommario

In questo articolo verrà illustrato un metodo di misura delle grandezze C , capacità di un condensatore e L , coefficiente di autoinduzione di un'induttanza. Il condensatore e l'induttanza sono inseriti in un circuito RLC in serie, alimentato da una tensione continua ad onda quadra. Visualizzando con l'oscilloscopio l'oscillazione pseudoperiodica della tensione ai capi del condensatore nel tempo, dalla misura dello pseudoperiodo T e dal decremento logaritmico δ dei picchi di tensione si deduce il valore dei parametri C ed L , grazie alle proprietà analitiche della funzione che rappresenta l'andamento della tensione V_C ai capi del condensatore durante il processo di carica del circuito.

1 Richiami teorici

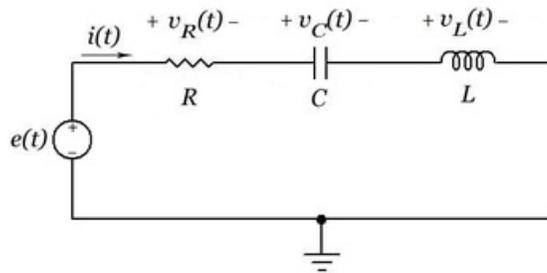


Figura 1:

E' noto che se connettiamo un condensatore di capacità C in serie ad un'induttanza L e ad un resistore R ai capi di un generatore di tensione continua V_0 (realizzando quello che viene definito un circuito RLC serie, vedi fig.1), l'evoluzione temporale dei parametri elettrologici del sistema, quali la carica q presente nel condensatore, la corrente I che circola nel circuito e la differenza di potenziale ai capi del condensatore V_C obbediscono a determinate equazioni differenziali¹.

Al tempo iniziale $t = 0$, condensatore ed induttanza sono scarichi e viene chiuso l'interruttore T : il generatore inizia a caricare il condensatore e l'induttore: quest'ultimo genera una corrente autoindotta di verso contrario. Nel circuito quindi fluisce una corrente dipendente dal tempo $I(t)$.

Per la conservazione dell'energia, risulta che la somma dei potenziali erogati (dal generatore e dall'induttore, una volta carico) è pari alle cadute di potenziale ai capi del condensatore e del resistore, ossia:

$$V_0 + V_L = V_C + V_R$$

¹Si veda l'articolo *Equazioni differenziali in fisica*, F.Zampieri, 2015

Ricordando la legge di Faraday, si ha:

$$V_L = -L \cdot \frac{dI(t)}{dt}$$

Si ha, allora, che l'equazione differenziale che governa l'evoluzione temporale della corrente circolante è:

$$V_0 - L \cdot \frac{dI(t)}{dt} = \frac{q(t)}{C} + R \cdot I(t)$$

ove $q(t)$ rappresenta la carica elettrica accumulata sulle piastre del condensatore, al tempo t . Ricordando che $I = \frac{dq}{dt}$ e che quindi la derivata prima della corrente è pari alla derivata seconda nel tempo della funzione $q(t)$, l'equazione si scrive:

$$V_0 - Lq'' = \frac{q}{C} + Rq'$$

Dividendo ogni termine per l'induttanza L si ha quindi:

$$q'' + \frac{R}{L}q' + \frac{q}{LC} = \frac{V_0}{L} \quad (1)$$

che rappresenta un'equazione differenziale del secondo ordine non omogenea a coefficienti costanti.

In particolare, il tipo di soluzione dipende strettamente dal segno del discriminante dell'equazione caratteristica.

E' noto che se la quantità

$$\Delta = \frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC} \quad (2)$$

è negativa, la soluzione $q(t)$ ha la particolare forma:

$$q(t) = q_0 + e^{-at} \cdot (c_1 \cos bt + c_2 \sin bt)$$

in cui a e b sono rispettivamente la parte reale e la parte immaginaria delle due soluzioni complesse e coniugate, secondo la relazione:

$$a = \frac{R}{2L}, \quad b = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$$

Usando il metodo dell'angolo aggiunto possiamo scrivere la funzione sopra come:

$$q(t) = q_0 + Re^{-at} \sin(bt + \varphi)$$

con R e φ nuove costanti da determinare con le consuete condizioni iniziali:

$$q(0) = 0 \Rightarrow q_0 + R \sin \varphi = 0, \quad q'(0) = 0$$

Derivando $q(t)$ si ha:

$$q'(t) = -Rae^{-at} \sin(bt + \varphi) + bRe^{-at} \cos(bt + \varphi)$$

Se in $t = 0$ questa derivata deve essere nulla, allora:

$$-Ra \sin \varphi + bR \cos \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \arctan \frac{b}{a}$$

Quindi si ha che $R = -\frac{q_0}{\sin \varphi}$, ma ricordando la relazione che intercorre fra $\tan \varphi$ e $\sin \varphi$, abbiamo:

$$\sin \varphi = \frac{\tan \varphi}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi}} = \frac{b/a}{\sqrt{1 + b^2/a^2}}$$

Infine:

$$R = -q_0 \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{b^2}}$$

L'integrale generale è, finalmente:

$$q(t) = q_0 - q_0 e^{-at} \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{b^2}} \sin(bt + \varphi) \quad (3)$$

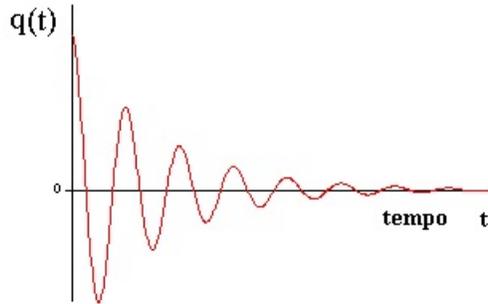


Figura 2:

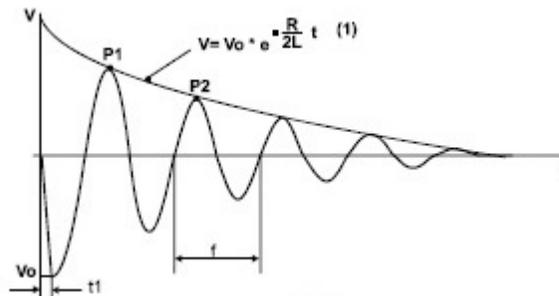
In fig.2 possiamo osservare il tipico andamento pseudoperiodico, caratterizzato da un'oscillazione attorno alla posizione di equilibrio q_0 con picchi la cui ordinata è smorzata dal termine esponenziale.

Viene definito *pseudoperiodo* T la quantità:

$$T = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}} = \frac{4\pi}{\sqrt{\frac{4}{LC} - \frac{R^2}{L^2}}} \quad (4)$$

Essa è tale per cui due massimi o minimi di oscillazione consecutivi sono separati da una distanza che vale proprio T .

La figura sottostante chiarisce questo concetto



Volendo la funzione che descrive l'andamento temporale della tensione ai capi del condensatore, basterà dividere la funzione (3) per la capacità C del condensatore, e ricordando che $\frac{q_0}{C} = V_0$ si ottiene:

$$V_C(t) = V_0 - V_0 e^{-at} \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{b^2}} \sin(bt + \varphi) \quad (5)$$

Se si disponesse del grafico di questa funzione si potrebbe misurare il cosiddetto *decremento logaritmico* δ , la cui definizione tiene conto della proprietà secondo la quale due massimi di tensione sono separati, temporalmente, dalla distanza T , pseudoperiodo.

Sia t_1 l'istante in cui viene assunto il primo massimo e t_2 quello in cui viene assunto il successivo. Ovviamente $t_2 - t_1 = T$.

Valutiamo le differenze $K_1 = V_C(t_1) - V_0$ e $K_2 = V_C(t_2) - V_0$:

$$K_1 = V_C \cdot e^{-at_1} \sin(bt_1 + \varphi), \quad K_2 = V_C \cdot e^{-at_2} \sin(bt_2 + \varphi)$$

Eseguiamo il rapporto fra le due quantità, osservando che valendo la condizione $t_2 - t_1 = T$, allora $\sin(bt_1 + \varphi) = \sin(bt_2 + \varphi)$:

$$\frac{K_2}{K_1} = \frac{e^{-at_2}}{e^{-at_1}} = e^{a(t_2-t_1)} = e^{a \cdot T}$$

Si definisce *decremento logaritmico* δ la quantità:

$$\delta = \ln K_2 - \ln K_1 = a \cdot T \quad (6)$$

Quindi sarà

$$a = \frac{\delta}{T} \quad (7)$$

Si noti che, una volta misurato sul grafico il decremento logaritmico δ e lo pseudoperiodo T dalla differenza delle ascisse di due massimi consecutivi, possiamo avere una stima di a e quindi, ricordando che $a = \frac{R}{2L}$, nota la resistenza del circuito, avere una stima di L .

Invertendo la relazione che definisce a , si ha allora:

$$L = \frac{R \cdot T}{2\delta} \quad (8)$$

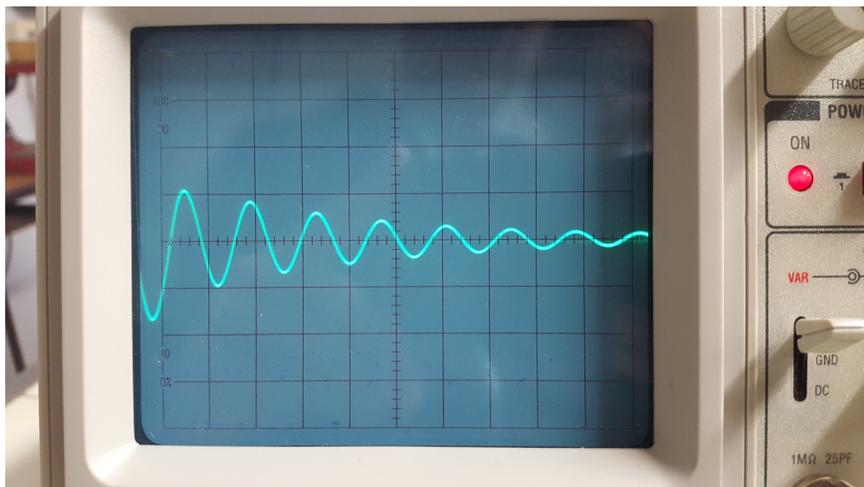
Stimando L dalla (7), introducendo tale valore e quello di R nell'espressione (4) che definisce lo pseudoperiodo T , possiamo infine avere una stima anche di C :

$$C = \frac{4 \cdot T^2 \cdot L}{16\pi^2 \cdot L^2 + T^2 \cdot R^2} \quad (9)$$

2 Il metodo

E' stato montato su una basetta il circuito RLC utilizzando un resistore RETMA dal valore $R = 9.70 \pm 0.551 \text{ Ohm}$ (dedotto dall'interpretazione del codice RETMA), un'induttanza dal valore di aspettazione di $L^* = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ H}$ ed un micro-condensatore di capacità $C^* = 1 \text{ nF}$. Il circuito è stato alimentato tramite generatore di segnale ad onda quadra nel quale era possibile settare il voltaggio del segnale in input e la sua frequenza. E' stato collegato l'oscilloscopio ai capi del condensatore per studiare la dipendenza della tensione dal tempo.

Sul monitor dell'oscilloscopio si poteva evidenziare un tipico segnale pseudoperiodico $V_C(t)$, la cui qualità e risoluzione dipendeva dall'ampiezza del segnale e dalla sua frequenza. Variando empiricamente questi due parametri è stato ottenuto un segnale il più possibile conveniente per le misure che sono state poi effettuate.



In figura, il segnale ottenuto, che evidenzia i picchi di oscillazione della differenza di potenziale ai capi del condensatore (sull'asse orizzontale, il tempo e su quello verticale la tensione). Si è avuto cura di centrare la curva in modo che la tensione media asintotica V_0 coincidesse con l'asse orizzontale.

3 La determinazione di C e L

A questo punto si è proceduto alla determinazione dei fattori di scala del grafico (che è stato stampato) per poter misurare l'ascissa dei picchi, dopo aver preso come zero la posizione del picco più a sinistra. Dalla scala sull'asse dei tempi per l'oscilloscopio, impostata a $1 \mu s$ per divisione, si è determinato il fattore di conversione K da cm a s cosicché si potesse misurare la posizione in cm sul grafico e risalire all'ascissa temporale, determinando $K = 5,18 \cdot 10^{-7} s/cm$.

La differenza fra le ascisse di due picchi consecutivi P_1 e P_2 è stata stimata in

$$T = 7,1 \cdot 10^{-7} s$$

Tale è quindi il valore dello pseudoperiodo dell'oscillazione

Successivamente sono state misurate le ascisse in cm di due picchi consecutivi, P_1 e P_2 , che non è stato necessario convertire in Volt, in quanto il decremento logaritmico δ è adimensionale. E' risultato che:

$$\delta = \ln\left(\frac{P_1}{P_2}\right) = 0,230016$$

In virtù della (7) si ha, allora:

$$a = \frac{\delta}{T} = 326197,1831$$

Ricordando la (8) abbiamo:

$$L = 1,69689 \cdot 10^{-5} H$$

Ricordando invece la (9), abbiamo:

$$C = 7,52 \cdot 10^{-10} F$$

4 Stima degli errori

Alle due stime per i parametri C e L è necessario associare un errore e procedere quindi alla verifica di compatibilità fra i valori stimati e quelli di aspettazione.

Abbiamo effettuato il calcolo degli errori col il metodo della propagazione.

4.1 Errore su L

Essendo $L = \frac{R \cdot T}{2\delta}$, per la propagazione sarà:

$$\Delta L = L \cdot \left(\frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta T}{T} + \frac{\Delta \delta}{\delta} \right)$$

Come ΔR abbiamo preso l'indeterminazione percentuale fornita dal codice Retma e quindi:

$$\Delta R = 0,55 \Omega$$

L'indeterminazione sul periodo, essendo $T = x_{P_2} - x_{P_1}$, avendo indicato con x_{P_1} e x_{P_2} rispettivamente le ascisse dei due picchi consecutivi P_1 e P_2 , è stata presa:

$$\Delta T = 2 \cdot K \Delta x$$

indicando con $\Delta x = 0,1 cm$ l'errore di sensibilità del righello usato per misurare le lunghezze sulla stampa del grafico e K il fattore di conversione fra cm e s . E' risultato:

$$\Delta T = 2,59 \cdot 10^{-9} s$$

Infine, l'indeterminazione su δ è stata calcolata ricordando che l'errore assoluto su una grandezza logaritmica corrisponde numericamente al suo errore relativo, quindi, chiamando $w = \frac{P_1}{P_2}$:

$$\Delta\delta = \Delta \ln w = \Delta w = w \cdot \left(\frac{\Delta P_1}{P_1} + \frac{\Delta P_2}{P_2} \right)$$

Assumendo $\Delta P_1 = \Delta P_2 = 0,1 cm$, si ha:

$$\Delta\delta = 0,010313$$

A questo punto, il calcolo dell'indeterminazione su L è agevole e si ha:

$$\Delta L = 1,67122 \cdot 10^{-6} H$$

4.2 Errore su C

Essendo $C = \frac{4 \cdot T^2 \cdot L}{16\pi^2 \cdot L^2 + T^2 \cdot R^2}$, sempre per la propagazione sarà:

$$\Delta C = C \cdot \left(4 \frac{\Delta T}{T} + 3 \frac{\Delta L}{L} + 2 \frac{\Delta R}{R} \right)$$

Disponendo già delle incertezze su L , R e T il calcolo agevolmente dà:

$$\Delta C = 3,0818 \cdot 10^{-10} F$$

5 Conclusioni

Disponendo dei valori sperimentali e dei relativi errori si può concludere che il metodo presentato consente di stimare i due parametri come segue.

Per quanto riguarda il coefficiente di autoinduzione L :

$$L = (1,69689 \pm 0,16712) \cdot 10^{-5} H$$

Malgrado l'errore percentuale del 9,85%, possiamo concludere che il valore da noi stimato sia compatibile col valore di aspettazione $L^* = 1,8 \cdot 10^{-5} H$: c'è uno scarto percentuale del 5,73%, quindi, considerando le incertezze insite nei processi di misurazione, la stima è molto buona.

Considerando invece la misura di C noi abbiamo ottenuto:

$$C = (7,52 \pm 3,08) \cdot 10^{-10} F$$

L'errore percentuale è qui altissimo, addirittura del 41%! Anche in tal caso la nostra stima è compatibile con il valore di aspettazione $C^* = 1 \cdot 10^{-9} F$, con uno scarto percentuale del 24,8%.

Ne deduciamo che il metodo fornisce una stima buona per L ma non altrettanto soddisfacente per C , a causa della dipendenza di questo parametro dalle misure del periodo (legato a misure di lunghezza, quindi di solito già affette da un errore del 10%), di R (che è nota, dal codice Retma con una incertezza nella migliore delle ipotesi del 5%) e di L , che deve quindi essere già nota.

A livello pratico, molteplici sono le difficoltà riscontrare nell'applicazione del metodo, anche a livello tecnico: fra tutte, la calibrazione ottimale dei parametri di risoluzione dell'oscilloscopio conseguenti alla scelta delle ampiezze e delle frequenze del segnale in input del generatore d'onda.