CONICHE E MATRICI: ABBINAMENTO PER AFFINITA'

a cura di Chiara Ceotto, Andrea Berti, Leonardo Mufato, Nicola Arghittu

Realizzato nell'ambito del ***progetto Archimede***
con la supervisione della Prof. Valentina Fabbro
I.S.I.S.S. M.Casagrande, Pieve di Soligo, a.s. 2014/15

Sommario

Una forma quadratica può rappresentare l'equazione di una conica degenere oppure non degenere (ellisse, iperbole o parabola). Nell'articolo si illustra un modo per riconoscere le coniche non degeneri a partire dalla forma quadratica utilizzando le matrici. Si introduce poi un procedimento per trasformare la forma quadratica in equazione canonica della conica individuata, attraverso l'applicazione in forma matriciale di una rotazione e di una traslazione, due particolari affinità.

Una conica reale è l'insieme dei punti $(x, y) \in R^2$ in cui si annulla un polinomio di secondo grado in x e y. L'equazione cartesiana di una generica conica in R^2 si può scrivere nella forma

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

dove i vari a_{ij} sono numeri reali assegnati. Alla conica si associa in modo naturale la matrice simmetrica

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

con le due sotto-matrici

$$\mathbf{A_1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A_2} = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix}$$

E' possibile classificare le coniche basandosi sul determinante delle matrici A e A_1 associate alla conica:

$\det(A) = 0 \Rightarrow$ la conica è degenere;

$\det(A) \neq 0 \Rightarrow$ la conica è non degenere e in particolare

- $\det(A_1) > 0 \Rightarrow$ la conica è un'ellisse
- $\det(A_1) = 0 \Rightarrow$ la conica è una parabola
- $\det(A_1) < 0 \Rightarrow$ la conica è un'iperbole

Dopo aver classicato la conica, per ottenere l'equazione scritta in forma canonica [1] dobbiamo eseguire:

- una rotazione in modo che gli assi di simmetria della conica siano paralleli agli assi cartesiani x e y.
- una traslazione che porterà a far coincidere il centro (dell'ellisse o dell'iperbole) o il vertice (se si tratta di una parabola) con l'origine degli assi cartesiani.

Descriviamo nel dettaglio come effettuare la rotazione e la traslazione. Sottolineiamo però che il procedimento per la rotazione sfrutta il fatto che A e A_1 sono matrici simmetriche con tutte le conseguenze del caso (ad esempio che la trasporta di A coincide con A) e che quindi il procedimento non è valido per matrici quadrate qualunque.

[1] In questo articolo consideriamo una conica scritta in forma normale quando gli assi di simmetria della conica sono gli assi cartesiani e il centro della conica è l'origine.

Per quando riguarda la **rotazione**, il procedimento per scrivere l'equazione della conica ruotata è il seguente.

1. Si determinano autovalori e relativi autovettori della matrice A_1.
2. Si normalizzano gli autovettori trovati.
3. La matrice R di rotazione di centro O $(0; 0)$ sarà la matrice che avrà come colonne i valori trovati al punto 2.

   Osservazione E' necessario assicurarsi di posizionare gli autovettori in ordine corretto in modo che definiscano effettivamente solo una rotazione e non un ribaltamento. Si può dimostare che è sufficiente la condizione $det(R) > 0$; in caso questo non accadesse, basta scambiare l'ordine degli autovettori nella matrice R o modificare i segni di uno dei 2 autovettori per cambiare il segno del determinante della matrice di rotazione.

4. Per scrivere l'equazione della conica ruotata, si sostituiscono nell'equazione di partenza x e y che si ricavano dal seguente sistema

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

   dove x e y sono le coordinate iniziali e X e Y sono le coordinate della conica ruotata.

Per quanto riguarda la **traslazione**, è necessario determinare il centro $C(x_0; y_0)$ che coincide con il centro di simmetria se la conica è un'ellisse o un'iperbole e coincide con il vertice se la conica è una parabola. La traslazione che porta la conica scritta nelle coordinate (X, Y) alla conica scritta in forma canonica nelle coordinate (x', y') è la seguente:

$$\begin{cases} x' = X - x_0 \\ y' = Y - y_0 \end{cases} \qquad \text{da cui} \qquad \begin{cases} X = x' + x_0 \\ Y = y' + y_0 \end{cases}$$

Osservazione Il centro della conica si determina in modo diverso a seconda che la conica sia a centro (ellisse o iperbole) oppure una parabola.

- Se la conica è un'ellisse oppure un'iperbole, le coordinate del centro si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23} = 0 \end{cases}$$

  dove i termini a_{ij} si riferiscono alla matrice A della conica ruotata.

- Se la conica è una parabola, le coordinate del vertice si ottengono come intersezione fra l'asse della parabola $a_{11}(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}) + a_{12}(a_{12}x + a_{22} + a_{23}) = 0$ e l'equazione della parabola stessa. Alternativamente, la parabola ruotata è del tipo $y = ax^2 + bx + c$ oppure $x = ay^2 + by + c$, quindi le coordinate del vertice si possono trovare direttamente con le formule note dalla geometria analitica

ESEMPIO 1 (ELLISSE) Partiamo dalla seguente conica scritta in forma canonica:

$$5x^2 - 6xy + 5y^2 + 16\sqrt{2}x + 38 = 0$$

Per cominciare scriviamo le matrici associate alla conica

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 8\sqrt{2} \\ -3 & 5 & 0 \\ 8\sqrt{2} & 0 & 38 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A_1} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A_2} = \begin{pmatrix} 8\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

e calcoliamo il determinante di A e di A_1 per classificare la conica

$det(A) = -32 \neq 0 \Rightarrow$ **conica non degenere**
$det(A_1) = 16 > 0 \Rightarrow$ **ellisse**

Ora cerchiamo di ottenere l'equazione della conica ruotata con gli assi di simmetria paralleli agli assi cartesiani x e y. Per ruotarla dobbiamo determinare la matrice di rotazione calcolando gli autovalori λ_1 e λ_2 e i relativi autovettori v_1 e v_2 della matrice A_1.
Sia λ un autovalore e v il relativo autovettore di A_1.

- Scriviamo:
$$A_{1\lambda} = (A_1 - \lambda I) = \begin{pmatrix} 5-\lambda & -3 \\ -3 & 5-\lambda \end{pmatrix}$$
dove I è la matrice identità 2×2.
- Poniamo il determinante di questa nuova matrice uguale a 0.
$$detA_{1_\lambda} = 0 \Leftrightarrow (5-\lambda)^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 10\lambda + 16 = 0$$
- Risolviamo l'equazione, ottenendo così i due autovalori $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 8$.
- Per trovare gli autovettori v_1 e v_2 relativi agli autovalori λ_1 e λ_2, risolviamo le seguenti equazioni
$$A_1 v_1 = \lambda_1 v_1 \qquad\qquad A_1 v_2 = \lambda_2 v_2$$
che equivalgono rispettivamente a
$$(A_1 - \lambda_1 I)v_1 = 0 \qquad\qquad (A_1 - \lambda_2 I)v_2 = 0$$
$$\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_{1x} \\ v_{1y} \end{pmatrix} = 0 \qquad\qquad \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_{2x} \\ v_{2y} \end{pmatrix} = 0$$
cioè i sistemi
$$\begin{cases} 3v_{1x} - 3v_{1y} = 0 \\ -3v_{1x} + 3v_{1y} = 0 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} -3v_{2x} - 3v_{2y} = 0 \\ -3v_{2x} - 3v_{2y} = 0 \end{cases}$$
Gli autovettori sono
$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
- Normalizziamo gli autovettori:
$$v_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \qquad\qquad v_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$
- Abbiamo ottenuto così la matrice di rotazione R con determinante positivo formata dai due vettori v_1 e v_2:
$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

A questo punto calcoliamo l'equazione della conica ruotata risolvendo l'equazione
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$
che equivale al sistema
$$\begin{cases} x = \sqrt{2}/2X - \sqrt{2}/2Y \\ y = \sqrt{2}/2X + \sqrt{2}/2Y \end{cases}$$
Si trova quindi l'equazione della conica ruotata
$$2X^2 + 8Y^2 + 16X - 16Y + 38 = 0$$

Per traslare la conica determiano prima il suo centro risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 2X - 0 + 8 = 0 \\ 0 + 8Y - 8 = 0 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad O_1(-4;1)$$

Infine effettuiamo una traslazione della conica ruotata per far coincidere il suo centro $O_1(-4;1)$ con l'origine degli assi cartesiani $O(0;0)$.
Dette x' e y' le coordinate del nuovo sistema di riferimento, la traslazione sarà:

$$\begin{cases} x' = X + 4 \\ y' = Y - 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} X = x' - 4 \\ Y = y' + 1 \end{cases}$$

Sostituendo queste nuove coordinate nell'equazione della conica ruotata otteniamo l'equazione dell'ellisse scritta in forma canonica:

$$x^2 + 4y^2 = 1$$

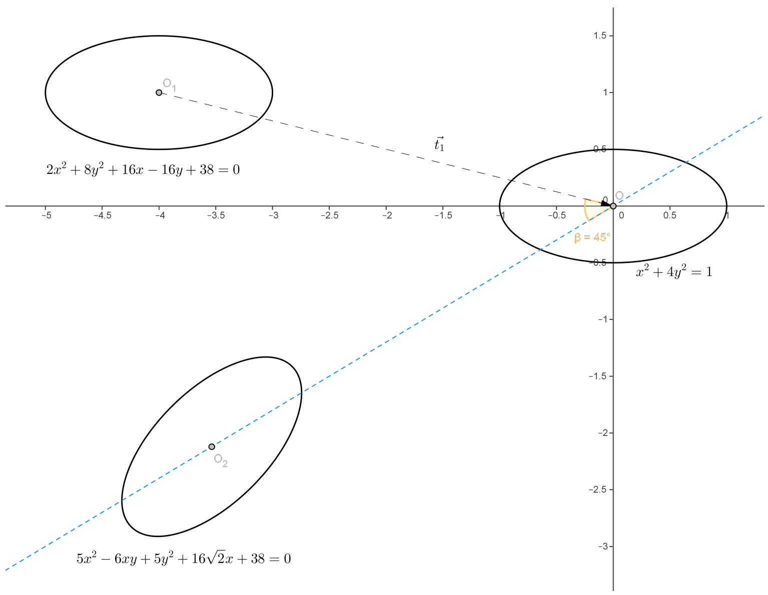

Figura 1: Rototraslazione dell'ellisse

ESEMPIO 2 (IPERBOLE) Partiamo dalla seguente conica scritta in forma canonica

$$3x^2 + 10xy + 3y^2 - 4x + 4y + 4 = 0$$

Scriviamo le matrici associate alla conica

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 5 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A_1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il determinamte di A e di A_1 per classificare la conica:

$det(A) = -88 \neq 0 \Rightarrow$ **conica non degenere**
$det(A_1) = -16 < 0 \Rightarrow$ **iperbole**

Ricaviamo l'equazione della conica ruotata con gli assi paralleli agli assi x e y e con centro nell'origine. Per ruotarla dobbiamo determinare la matrice di rotazione calcolando gli autovalori λ_1 e λ_2 e i relativi autovettori v_1 e v_2 della matrice A_1.
Sia λ un autovalore e v il relativo autovettore di A_1.

- Scriviamo
$$A_{1\lambda} = (A_1 - \lambda I) = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 5 \\ 5 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$
dove I è la matrice identità 2×2.
- Poniamo il determinante di questa nuova matrice uguale a 0
$$detA_{1_\lambda} = 0 \Leftrightarrow (3-\lambda)^2 - 25 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 6\lambda - 16 = 0$$
- Risolviamo l'equazione, ottenendo così i due autovalori: $\lambda_1 = 8$ e $\lambda_2 = -2$.
- Per trovare gli autovettori v_1 e v_2 relativi agli autovalori λ_1 e λ_2, risolviamo le seguenti equazioni
$$A_1 v_1 = \lambda_1 v_1 \qquad\qquad A_1 v_2 = \lambda_2 v_2$$
che equivalgono rispettivamente a
$$(A_1 - \lambda_1 I)v_1 = 0 \qquad\qquad (A_1 - \lambda_2 I)v_2 = 0$$
$$\begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_{1x} \\ v_{1y} \end{pmatrix} = 0 \qquad\qquad \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_{2x} \\ v_{2y} \end{pmatrix} = 0$$
cioè i sistemi
$$\begin{cases} -5v_{1x} + 5v_{1y} = 0 \\ 5v_{1x} - 5v_{1y} = 0 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} 5v_{2x} + 5v_{2y} = 0 \\ 5v_{2x} + 5v_{2y} = 0 \end{cases}$$
Gli autovettori sono
$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
- Normalizziamo gli autovettori:
$$v_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \qquad\qquad v_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$
- Scriviamo quindi la matrice di rotazione R formata dai due vettori v_1 e v_2 opportunamente adattati per soddisfare la condizione $\det(R) > 0$
$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

A questo punto calcoliamo l'equazione della conica ruotata risolvendo l'equazione
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$
che equivale al sistema
$$\begin{cases} x = \sqrt{2}/2X - \sqrt{2}/2Y \\ y = \sqrt{2}/2X + \sqrt{2}/2Y \end{cases}$$

L'equazionde della conica ruotata è pertanto

$$8X^2 - 2Y^2 + 4\sqrt{2}Y + 4 = 0$$

Per traslare la conica determiano prima il suo centro risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 8X = 0 \\ -2Y + 2\sqrt{2} = 0 \end{cases} \qquad \text{da cui} \qquad C_1(0; \sqrt{2})$$

Infine effettuiamo la traslazione della conica ruotata per far coincidere il suo centro $C_1(0; \sqrt{2})$ con l'origine degli assi cartesiani.
Dette x' e y' le coordinate del nuovo sistema di riferimento, la traslazione sarà

$$\begin{cases} x' = X + 0 \\ y' = Y - \sqrt{2} \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} X = x' \\ Y = y' + \sqrt{2} \end{cases}$$

Sostituendo queste nuove coordinate nell'equazione della conica ruotata otteniamo l'equazione dell'iperbole scritta in forma canonica

$$x^2 - \frac{1}{4}y^2 = -1$$

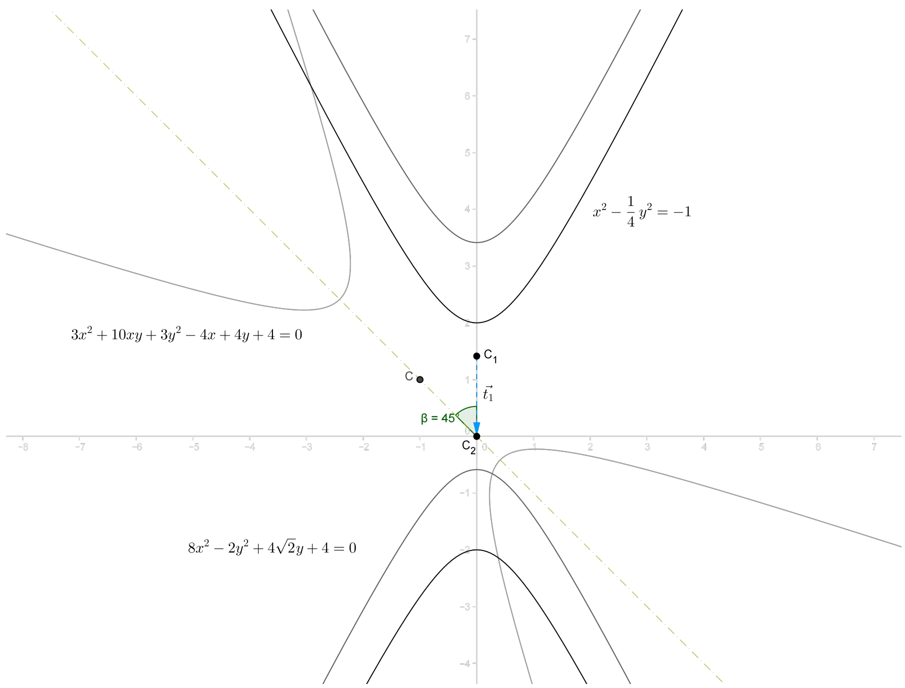

Figura 2: Rototraslazione dell'iperbole

ESEMPIO 3 (PARABOLA) Partiamo dalla seguente conica scritta in forma canonica

$$4x^2 + 4xy + y^2 - 12x - 56y - 16 = 0$$

Scriviamo le matrici associate alla conica:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 2 & 1 & -28 \\ -6 & -28 & -16 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A_1} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A_2} = \begin{pmatrix} -6 \\ -28 \end{pmatrix}$$

calcoliamo il determinamte di A e di A_1 per classificare la conica:

$det(A) = -2500 \neq 0 \Rightarrow$ **conica non degenere**
$det(A_1) = 0 \Rightarrow$ **parabola**

Determiniamo l'equazione della conica ruotata con gli assi paralleli agli assi x e y. Per ruotarla dobbiamo determinare la matrice di rotazione calcolando gli autovalori λ_1 e λ_2 e i relativi autovettori v_1 e v_2 della matrice A_1.
Sia λ un autovalore e v il relativo autovettore di A_1.

- Scriviamo
$$A_{1\lambda} = (A_1 - \lambda I) = \begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$
dove I è la matrice identità 2×2.
- Poniamo il determinante di questa nuova matrice uguale a 0
$$detA_{1_\lambda} = 0 \Leftrightarrow (4-\lambda)(1-\lambda) - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 5\lambda = 0$$
- Risolviamo l'equazione, ottenendo così i due autovalori $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 5$.
- Per trovare gli autovettori v_1 e v_2 relativi agli autovalori λ_1 e λ_2, risolviamo le seguenti equazioni
$$A_1 v_1 = \lambda_1 v_1 \qquad\qquad A_1 v_2 = \lambda_2 v_2$$
che equivalgono rispettivamente a
$$(A_1 - \lambda_1 I)v_1 = 0 \qquad\qquad (A_1 - \lambda_2 I)v_2 = 0$$
$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_{1x} \\ v_{1y} \end{pmatrix} = 0 \qquad\qquad \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_{2x} \\ v_{2y} \end{pmatrix} = 0$$
cioè i sistemi
$$\begin{cases} 4v_{1x} + 2v_{1y} = 0 \\ 2v_{1x} + v_{1y} = 0 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} -v_{2x} + 2v_{2y} = 0 \\ 2v_{2x} - 4v_{2y} = 0 \end{cases}$$
Gli autovettori sono
$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad\qquad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$
- Normalizziamo gli autovettori:
$$v_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{5}/5 \\ -2\sqrt{5}/5 \end{pmatrix} \qquad\qquad v_2 = \begin{pmatrix} 2\sqrt{5}/5 \\ \sqrt{5}/5 \end{pmatrix}$$
- Abbiamo ottenuto così la matrice di rotazione R con determinante positivo formata dai due vettori v_1 e v_2
$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \sqrt{5}/5 & 2\sqrt{5}/5 \\ -2\sqrt{5}/5 & \sqrt{5}/5 \end{pmatrix}$$

A questo punto calcoliamo l'equazione della conica ruotata risolvendo l'equazione
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$
che equivale al sistema
$$\begin{cases} x = \sqrt{5}/5X + 2\sqrt{5}/5Y \\ y = -2\sqrt{5}/5X + \sqrt{5}/5Y \end{cases}$$

da cui si ricava l'equazione della conica ruotata

$$5Y^2 + 20\sqrt{5}X - 16\sqrt{5}Y - 16 = 0$$

Scrivendo la conica in forma esplicita, si ricavano facilmente le coordinate del suo vertice con le formule della geometria analitica. Il vertice vale quindi

$$V_1\left(\frac{4}{5}\sqrt{5}; \frac{8}{5}\sqrt{5}\right)$$

Infine trasliamo la conica ruotata per far coincidere il suo vertice V_1 con l'origine degli assi cartesiani. Dette x' e y' le coordinate del nuovo sistema di riferimento, la traslazione sarà

$$\begin{cases} x' = X - \dfrac{4}{5}\sqrt{5} \\ \\ y' = Y - \dfrac{8}{5}\sqrt{5} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} X = x' + \dfrac{4}{5}\sqrt{5} \\ \\ Y = y' + \dfrac{8}{5}\sqrt{5} \end{cases}$$

Sostituendo queste nuove coordinate nell'equazione della conica ruotata otteniamo l'equazione della parabola scritta in forma canonica

$$x = -\frac{\sqrt{5}}{20}y^2$$

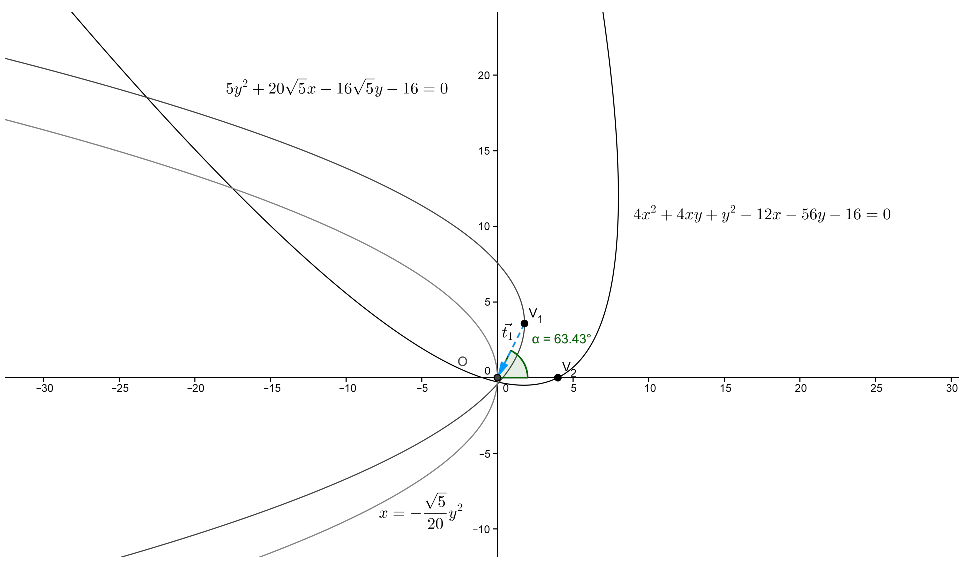

Figura 3: Rototraslazione della parabola