

Program Evaluation and Review Technique

a cura di De Faveri Andrea, Furlan Francesco, Totton Andrea

Realizzato nell'ambito del *progetto Archimede*

con la supervisione dei Proff. Fabio Breda, Francesco Cardano, Alessandro Carraro, Valentina Fabbro,
Francesco Zampieri

I.S.I.S.S. M.Casagrande, Pieve di Soligo, a.s. 2013/14

Abstract: *In questo articolo ci si ripropone di trattare un metodo di pianificazione e gestione dei progetti alternativo al Gantt. Questo metodo, il P.E.R.T., si basa sull'utilizzo dei grafi orientati e ha come scopo la pianificazione migliore di un progetto tale da evitare eventuali sprechi di tempo.*

Il P.E.R.T. è una tecnica, sotto forma di formalismo grafico, di project management. Sviluppata nel 1958 dalla Booz, Allen and Hamilton, Inc., si basa sulla costruzione di un grafo orientato per risolvere problemi riguardanti il tempo e le modalità di sviluppo di un progetto nei più svariati campi. Per fare ciò utilizza due elementi costitutivi di un grafico: attività e nodi. Ora riporteremo le regole per la costruzione del diagramma.

Le attività rappresentano i vari passaggi necessari al completamento del progetto. Sono graficamente rappresentate mediante delle frecce orientate ed ad ognuna è assegnato un tempo di svolgimento. Nel nostro lavoro le indicheremo con una lettera maiuscola. I nodi rappresentano i termini che delimitano l'inizio ed la fine dell'attività e sono indicati da una lettera minuscola.

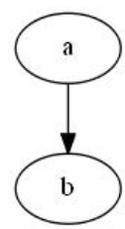


Figura 1: Rappresentazione grafica di un'attività (indicata in figura dalla freccia).

Il diagramma reticolare segue una successione temporale basata su rapporti di dipendenza fra le attività. Questi rapporti vengono indicati con i simboli $<$ e $>$.

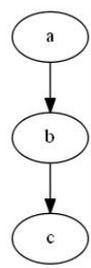


Figura 2: Nell'attività il nodo b dipende dal nodo a ($a < b$), il nodo c dal nodo b ($a < b < c$).

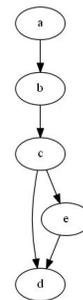


Figura 3: Nella figura dai nodi a,b e c dipendono le attività d e e. ($a < b < c < d, e$); inoltre il nodo d dipende anche dal nodo e ($d < e$).

Inoltre è importante specificare che la lunghezza o la forma di un ramo non hanno significato.

Due nodi non possono essere collegati da più di un ramo. Nel caso in cui due nodi siano collegati da più di un'attività è necessario introdurre il concetto di attività fittizia. Quest'attività a tempo zero permette di rispettare questa regola.

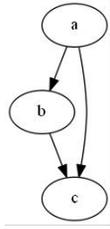


Figura 4: Come si nota dalla figura la realizzazione di un progetto non dipende né dalla lunghezza né dalla forma delle attività.

Per convenzione il nodo iniziale sarà contrassegnato con la lettera **a**. L'ordine delle lettere dei nodi è progressivo rispetto ai rapporti di dipendenza. Solo due nodi delimitano l'inizio e la fine del progetto. Queste regole sono necessarie sia per costruire il grafo sia per attuare il procedimento d'analisi.

Ora che siamo in grado di costruire il grafo passiamo all'analisi. Conoscendo le attività bisogna dare delle stime riguardanti la durata delle singole: ottimistiche (nel caso in cui l'attività duri il minor tempo possibile), pessimistiche (nel caso in cui duri il maggior tempo possibile) e probabili.

Nota. Per questo processo è necessario avere esperienza della durata delle varie attività

Ora è necessario introdurre il concetto di **percorso critico**. Il percorso critico è il susseguirsi di tutte le attività critiche, cioè le attività delle quali, se variasse il tempo, varierebbe il tempo totale di svolgimento del progetto. Il tempo variabile nelle attività non critiche è chiamato **tempo di slittamento**. E' necessario anche in questo caso che si abbia precisa idea del tempo necessario per completare delle varie attività in modo da essere consapevoli del tempo possibile di ritardo.

Per convenzione indicheremo con **t** il tempo minimo di raggiungimento di un nodo, cioè la somma complessiva dei tempi delle attività critiche dalle quali quel nodo dipende. Nello stesso modo indicheremo con **T** il tempo minimo di completamento del progetto che coincide col *t* dell'ultimo nodo.

Una volta individuato il percorso critico dobbiamo applicare un algoritmo per il calcolo dei cammini minimi. Useremo l'**algoritmo di Dijkstra** poiché si riferisce in particolare ad un grafo orientato con un'unica sorgente e con tutti gli archi (cioè le attività) non negative. Per applicare questo algoritmo dobbiamo introdurre la tecnica del rilassamento degli archi.

Indichiamo come peso o densità di un nodo:

$$\Delta = \frac{L}{n(n-1)}$$

$$L = \Sigma(t) \quad \text{e} \quad n = \text{numero di nodi}$$

Dati due nodi **a** e **b** con due densità $\Delta(a)$ e $\Delta(b)$. Se $\Delta(a) > \Delta(b) + 2$ allora si rilassa la densità **b** che diventa $\Delta(bf) = \Delta(b) - 2$ dove *bf* = *b finale*.

Nel caso in cui invece $\Delta(a) \leq \Delta(b) + 2$ allora non si rilassa l'arco e $\Delta(bf) = \Delta(b)$.

Chiamiamo **S** l'insieme composto dai nodi dei quali sono noti i cammini minimi. All'inizio del procedimento l'insieme **S** sarà vuoto. $\mathbf{V} = \{\text{tutti i nodi}\}$

Algoritmo poi seleziona ripetutamente un vertice progressivamente partendo dal primo ad esempio *u* appartenente a $S' = V - S$ e trova la stima del suo cammino minimo. Una volta fatto ciò inserisce *u* in **S** e rilassa tutti gli archi uscenti da *u*. L'algoritmo è terminato e quindi abbiamo individuato i cammini minimi quando $S' = 0$ e quindi $S = V$.

Dunque abbiamo visto come attraverso il Pert possiamo rendere evidenti varie caratteristiche di un progetto quali il tempo di slittamento e i cammini minimi.

Per dimostrare l'effettiva efficacia del metodo nella vita pratica abbiamo costruito un problema applicandolo ad una situazione quotidiana.

Ad un pasticcere viene commissionata una torta di matrimonio. Questa dovrà essere a 4 piani di pan di spagna bagnato, ognuno ricoperto con una crema diversa. Dovrà poi essere decorata con delle roselline di zucchero, delle meringhe e delle fragole. Il pasticcere dovrà cucinare e bagnare il pan di spagna, preparare le tre creme e le meringhe e procurarsi tutte le cose di cui non dispone. Infine dovrà consegnare la torta. Per svolgere questi compiti nel minor tempo possibile applichiamo il metodo P.E.R.T. Iniziamo suddividendo il progetto (la produzione della torta) nella varie attività che ne permettono la realizzazione e assegniamo ad ognuna il tempo necessario per il suo svolgimento:

Attività	Tempi (minuti)
A) Il pasticcere riceve l'ordine	10'
B) Preparare il pan di spagna	20'
C) Ordine e consegna delle decorazioni	1440'/24h
D) Cucinarlo	40'
E) Preparare la prima crema	12'
F) Preparare la seconda crema	12'
G) Preparare la terza crema	12'
H) Preparare la quarta crema	12'
I) Bagnarlo	5'
L) Stendere le creme	10'
M) Preparare le meringhe	40'
N) Cuocere le meringhe	20'
O) Decorare la torta	5'
P) Comprare le fragole	15'
Q) Tagliare e disporre le fragole	15'
R) Consegnare la torta	120'

Determiniamo il percorso critico del progetto individuando le attività critiche. Il percorso critico dipende dalle attività A,C,Q,R.

Sapendo il percorso critico calcoliamo il tempo di slittamento delle altre attività.

$$\begin{cases} \Omega = (t_b + x_1) - (t_e + x_2) - (t_f + x_3) - (t_g + x_4) - (t_h + x_5) - \\ - (t_d + x_6) - (t_l + x_7) - (t_m + x_8) - \\ - (t_o + x_9) - (t_p + x_{10}) - (t_n + x_{11}) \\ 0 \leq x_n \leq 1297 - x_{(n-1)} \end{cases}$$

dove Ω è il tempo di slittamento in funzione dello slittamento delle varie attività.

Inoltre possiamo calcolare il tempo di slittamento medio $\Omega_{medio} = 1297/11 = 117,91$

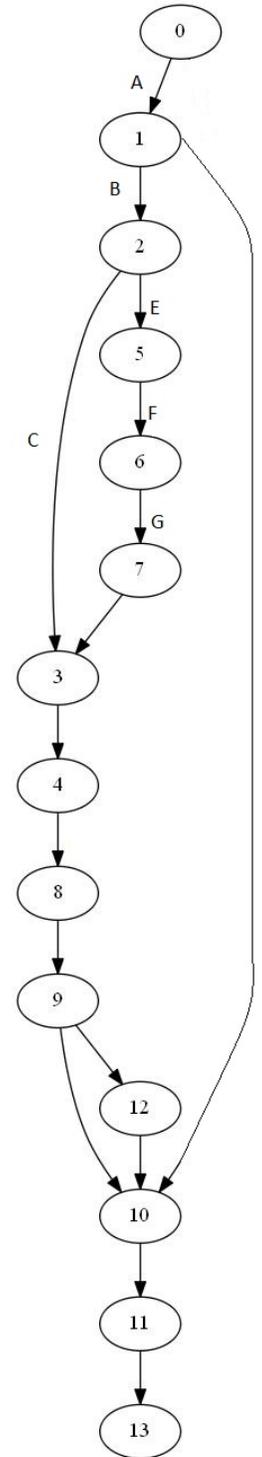
Possiamo inoltre applicare a questo problema l'algoritmo di Dijkstra per trovare i cammini minimi:

Nodo 1: $\Delta = 0$

Nodo 2: $20/2(2 - 1) = 10$

E così via per tutti gli altri nodi, dei quali rilasceremo gli archi per trovare i cammini minimi.

Abbiamo visto come il P.E.R.T. possa aiutarci nella pianificazione di un progetto evitando gli sprechi di tempo.



Bibliografia

- www.dis.uniroma1.it/facchinei/cap7-01.pdf
- www.math.unipd.it/luigi/courses/ricop0809/ro12.m03.flussi.02.pdf
- ioi.di.unimi.it/dijkstra.pdf
- <http://www.federica.unina.it/smf/ricerca-operativa-smf/problemi-cammino-minimo-algoritmo-dijkstra>