OTTIMIZZAZIONE

OTTIMIZZAZIONE ECONOMICA VINCOLATA

a cura di GIULIA ANZANELLO e FILIPPO MARIN

Realizzato nell'ambito del ***progetto Archimede***
con la supervisione dei Proff. Fabio Breda, Francesco Cardano, Alessandro Carraro,
Valentina Fabbro, Francesco Zampieri
I.S.I.S.S. M.Casagrande, Pieve di Soligo, a.s. 2013/14

Abstract: nell'ambito economico, le aziende utilizzano la strategia del marketing (posizionamento sul mercato), che ha come obiettivo la massimizzazione dei profitti e la minimizzazione dei costi. Per calcolare questi due fattori si possono utilizzare le funzioni matematiche.

Un esempio di problema economico, nel quale si devono calcolare i costi e i profitti di una determinata impresa e risolvibile tramite funzioni matematiche è:

Un'azienda di banane è disposta a sostenere un costo complessivo di 8.500,00 euro, spendendo, a unità, per il capitale 5,00 euro e 10,00 euro per il lavoro. Determina la combinazione di capitale e lavoro che massimizza la produzione, tenendo conto del vincolo della produzione. Determina la variazione di quantità prodotta se la disponibilità di spesa aumenta di 830,00 euro.

In questo caso dato che le variabili da calcolare sono due (il capitale K e il lavoro L) la funzione di produzione è definita come Q(K;L) dove Q rappresenta la quantità prodotta; i punti della funzione i cui si hanno i massimi profitti e i minimi costi sono definiti punti stazionari.

Un punto stazionario é un punto in cui la tangente alla curva é parallela all'asse delle ascisse per cui le derivate parziali prime della funzione si annullano. I punti stazionari sono di 5 tipi:

- Punto di massimo relativo se esiste un intorno I di P0 tale che per ogni P(x;y) appartenente a $I \Rightarrow f(x;y) \leq f(x_0;y_0)$;
- Punto di minimo relativo se esiste un intorno I di P0 tale che per ogni P(x;y) appartenente a $I \Rightarrow f(x;y) \geq f(x_0;y_0)$;
- Punto di massimo assoluto per f se per ogni P(x;y) dell'insieme di definizione $f(x;y) \leq f(x0;y0)$;
- Punto di minimo assoluto per f se per ogni P(x;y) dell'insieme di definizione $f(x;y) \geq f(x0;y0)$;
- Punto di sella se la matrice hessiana (matrice quadrata n×n) delle derivate parziali seconde della funzione) risulta indefinita.

I punti di massimo e minimo, sia relativi che assoluti, sono definiti anche punti di ottimo. Per determinare questi due tipi di punti si usa l'ottimizzazione, che può essere di due tipi: vincolata quando le variabili non possono assumere qualunque valore dell'insieme di definizione della funzione e libera quando le variabili non hanno alcun tipo di vincolo. Se il vincolo g(x;y)=0 é lineare in almeno una delle due variabili, si usa il metodo di sostituzione, che prevede i seguenti passaggi:

- si esplicita l'equazione del vincolo rispetto ad una variabile;
- la si sostituisce nella funzione z=f(x;y), ottenendo quindi i punti di ottimo della funzione. se invece nell'equazione del vincolo g(x;y)=0 non é possibile esplicitare una variabile in funzione dell'altra, si ricorre ad un metodo generale, detto metodo di moltiplicatori di Lagrange.

I moltiplicatori di Lagrange sono dei coefficienti che servono a trovare i massimi/minimi di una funzione rispetto ad un vincolo $g(x;y) = 0$; il metodo prevede di introdurre una nuova variabile (il moltiplicatore di Lagrange, chiamato λ) e di determinare la funzione di Lagrange:

$$L(x;y;\lambda) = f(x;y) - \lambda g(x;y)$$

La condizione necessaria affinchè la funzione di Lagrange abbia un punto stazionario in $(x_0;y_0;\lambda_0)$ é che le tre derivate parziali prime della funzione di Lagrange nelle variabili x, y, λ siano tutte contemporaneamente nulle.

Per cercare i punti stazionari bisogna prima di tutto, risolvere il sistema composto dalle derivate prime parziali uguagliate a zero:

$$\begin{cases} L'_x(x;y;\lambda) = 0 \\ L'_y(x;y;\lambda) = 0 \\ L'_\lambda(x;y;\lambda) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_x(x;y) + \lambda g'_x(x;y) = 0 \\ f'_y(x;y) + \lambda g'_y(x;y) = 0 \\ g(x;y) = 0 \end{cases}$$

Per determinare la tipologia dei punti stazionari occore studiare il sefgno di un particolare determinante, detto hessiano orlato, così costruito:

$$det\overline{H}(x;y;\lambda) = \begin{vmatrix} 0 & g'_x(x;y) & g'_y(x;y) \\ g'_x(x;y) & L''_{xx}(x;y;\lambda) & L''_{xy}(x;y;\lambda) \\ g'_y(x;y) & L''_{yx}(x;y;\lambda) & L''_{yy}(x;y;\lambda) \end{vmatrix}$$

Se $P_0(x_0;y_0;\lambda_0)$ é un punto stazionario per la funzione L di Lagrange, allora in tale punto abbiamo:

- un minimo vincolato se $detH(x_0;y_0;\lambda_0) < 0$;
- un massimo vincolato se $detH(x_0;y_0;\lambda_0) > 0$.

Se il determinante hessiano orlato, calcolato in P_0, è nullo, allora non abbiamo informazioni sulla tipologia del punto e quindi bisogna valutare la funzione in un intorno del punto.

Tornando al nostro esempio, la funzione usata nell'analisi del comportamento delle imprese si chiama funzione di Cobb-Douglas:

$$Q = AL^\alpha K^\beta$$

dove A, α e β sono numeri che esprimono i coefficienti tecnici.
Nel nostro caso la relazione di Cobb-Douglas si presenta come: $Q(K;L) = 100K^{0,5}L^{0,5}$.
Il vincolo del costo, invece, è dato da: $8500 - 5K - 10L = 0$.
La funzione di Lagrange è data da: $Lagr(K;L;\lambda) = 100K^{0.4}L^{0,5} + \lambda(8500 - 5K - 10L)$
Uguagliando a zero le derivate parziali prime rispetto a K, L e λ otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} 40K^{-0,6}L^{0,5} - 5\lambda = 0 \\ 50K^{0,4}L^{-0,5} - 10\lambda = 0 \\ 8500 - 5K - 10L = 0 \end{cases}$$

Ricaviamo λ dalla prima equazione $\lambda = 8K^{-0,6}L^{0,5} = 0$ e la sostituiamo nella seconda. Otteniamo $K = \frac{8}{5}L$. Sostituendo nella terza equazione troviamo L e quindi ricaviamo: $K = 755,2$; $L = 472,2$; $\lambda = 3,26$

L'hessiano orlato è:

$$det\overline{H}(x;y;\lambda) = \begin{vmatrix} 0 & -5 & -10 \\ -5 & -24K^{-1,6}L^{0,5} & 20K^{-0.6}L^{-0,5} \\ -16 & 20K^{-0,6}l^{-0,5} & -25K^{0,4}L^{-1,5} \end{vmatrix}$$

e si ottiene $det\overline{H}(755,5;472,2;3,26) \cong 3.85$

Poichè il $\det\{\overline{H}\}$ risulta negativo, il punto è di minimo. Quindi la combinazione di capitale e lavoro che consente di massimizzare la produzione con quantità di produzione fissata è: 755,5 unità di capitale, 472,2 unità di lavoro per una produzione di 30.786,2 unità.

Aumentando la disponibilità di 830,00 euro la disponibilità di spesa per lavoro e capitale, l'aumento di quantità di quantità prodotta sarà di λ 830 = 2.705,8 unità. Infatti se si risolve nuovamente il problema con il nuovo vincolo otteniamo K = 829,28 e L = 518,3; in corrispondenza di questi valori abbiamo Q = 33.478,9. La variazione effettiva di Q è di 2.692,7 unità.