LA SCATOLA

Il soccorso dei metodi numerici per la determinazione degli zeri di un polinomio

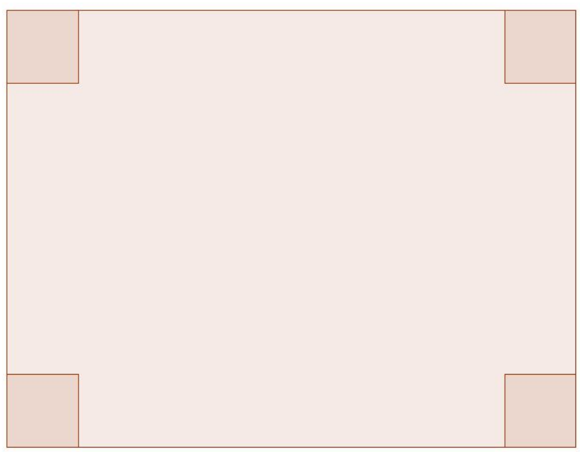
A cura di MATTEO SPADETTO e LEONARDO REBESCHINI

Realizzato nell'ambito del ***progetto Archimede***
con la supervisione dei Proff. F.Zampieri, F.Breda, A.Carraro
I.S.I.S.S. M.Casagrande, Pieve di Soligo, Novembre 2012

La formulazione del problema

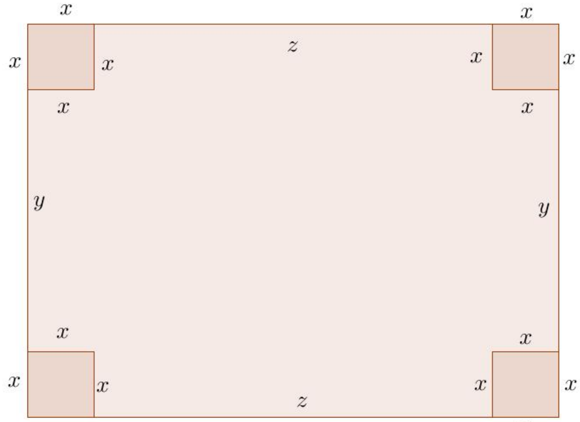
Immaginiamo che, per ragioni di stoccaggio di alcune merci, si debbano realizzare delle scatole di cartone di volume pari a $1\,m^3$ partendo da pannelli rettangolari di lati $4\,m$ e $3\,m$.

Sarà necessario effettuare dei tagli quadrati presso gli angoli del pannello, dimodoché sia possibile ripiegarne i lati per ottenere, appunto, una scatola.



Il problema consiste nel determinare la lunghezza dei tagli che diano la possibilità di ottenere scatole di volume dato, ovviamente massimizzando il materiale a disposizione.

Il problema appare risolvibile con il seguente metodo. Attribuiamo alla lunghezza del taglio il valore



x, alla distanza minore tra due tagli il valore y e alla distanza maggiore tra due tagli la lunghezza z. E' chiaro che una volta determinato il valore di x, anche le altre dimensioni saranno fissate.

Per determinare questi valori incogniti, necessitiamo di altrettante condizioni, ovvero tre equazioni.

La prima di queste è data dalla premessa che il volume della scatola debba essere pari a $1\,m^3$.

Notiamo infatti che una volta creata l'ipotetica scatola, i lati della base sono pari a y e z, mentre l'altezza è pari a x.

Quindi la prima equazione è

$$x \cdot y \cdot z = 1$$

Il secondo vincolo, che dà luogo alla seconda equazione, impone che la lunghezza di uno dei due lati del pannello sia $4\,m$ e quindi:

$$4 = y + 2x$$

Analogamente, per l'altro lato, sarà:

$$3 = z + 2x$$

Mettendo a sistema le tre equazioni si ha:

$$\begin{cases} x \cdot y \cdot x & = & 1 \\ 2x + y & = & 4 \\ 2x + z & = & 3 \end{cases}$$

Ricavando l'incognita y dalla seconda equazione e la z dalla terza, e sostituendo le loro espressioni nelle prima, otteniamo questa enigmatica equazione risolvente:

$$\boxed{4x^3 - 14x^2 + 12x - 1 = 0}$$

A prima vista sembra molto carina, una normale equazione di terzo grado che noi, da patetici schiavi dei dogmi matematici che ci sono stati impartiti, ci accingiamo a risolvere con i nostri banali metodi di raccoglimento, dei quali non abbiamo mai messo in discussione la validità assoluta.

Ma presto ci rendiamo conto che tale equazione è irrisolvibile con le nostre conoscenze. Provateci anche voi! Utilizzate un qualsiasi metodo di raccoglimento, compreso l'indiscutibile *regola di Ruffini*![1].

Capirete di essere stati ingannati, la vostra sapienza si rivelerà vana, non arriverete a soluzione alcuna. Il motivo per il quale il leggendario teorema di Ruffini, che abbiamo sempre guardato con rispetto e sottomissione, non funziona, è semplice.

Detto teorema spiega che gli zeri razionali di un polinomio vanno ricercati tra i divisori del numero (razionale!) che si ottiene dal rapporto tra il suo termine noto e il coefficiente del termine di grado maggiore.

Nel nostro caso quindi i potenziali zeri del polinomio sono

$$\pm 1, \quad \pm\frac{1}{2}, \quad \pm\frac{1}{4}$$

Tuttavia nessuno di questi valori, sostituito all'incognita x, annulla il polinomio, ovvero non abbiamo ricavato nessuna radice razionale, nessuno zero di cui fare uso per poter utilizzare la consueta regola di Ruffini.

In verità questo fatto insolito non porta alla drammatica conclusione *non esistono soluzioni reali*, ma solamente che *non ne esistono di razionali.*

In effetti il teorema di Ruffini impone di determinare uno zero razionale ma, non essendo stato possibile trovarlo, nulla ci dimostra che le radici effettivamente non esistano. Semplicemente esse non saranno razionali.

Abbiamo quindi per la nostra equazione di terzo grado la possibilità di determinare esattamente tre soluzioni, che possono essere irrazionali o addirittura complesse.

Quest'ultima ipotesi ci fa rabbrividire: non conosciamo i numeri complessi, per ora, a causa delle nostre conoscenze matematiche di tipo scolastico.

Per fortuna viene a salvarci da questo drammatico pensiero un teorema (che ovviamente noi studenti non possiamo che accettare per vero, senza dimostrazione!) che spiega che se in un'equazione esistono soluzioni complesse, queste sono sempre presenti in numero pari[2].

---

[1] Si fa qui riferimento al consueto algoritmo in voga nel Biennio, che si basa sul teorema di Ruffini, che consente la fattorizzazione del polinomio ricavando un fattore di primo grado del tipo $x - x_0$ ove x_0 è uno zero razionale del polinomio.

[2] Si tratta di un noto corollario del Teorema fondamentale dell'Algebra.

Premesso questo, è quindi intuitivo capire che per la nostra equazione esiste sicuramente una radice reale (oppure tre). Il ragionamento è chiaro.

Ma come possiamo determinare questa radice/i fra un'infinità di numeri reali, senza il supporto di un custode come Ruffini?

Un primo passo è la seguente considerazione: risolvere tale equazione significa trovare i punti di intersezione con l'asse x della funzione associata

$$f(x) = y = 4x^3 - 14x^2 + 12x - 1$$

Servendoci di un piano cartesiano, di qualche punto segnato a caso, e ovviamente dei mezzi tecnologici che ci offre l'epoca in cui viviamo, ci siamo fatti un'idea dell'andamento curva, detta cubica:

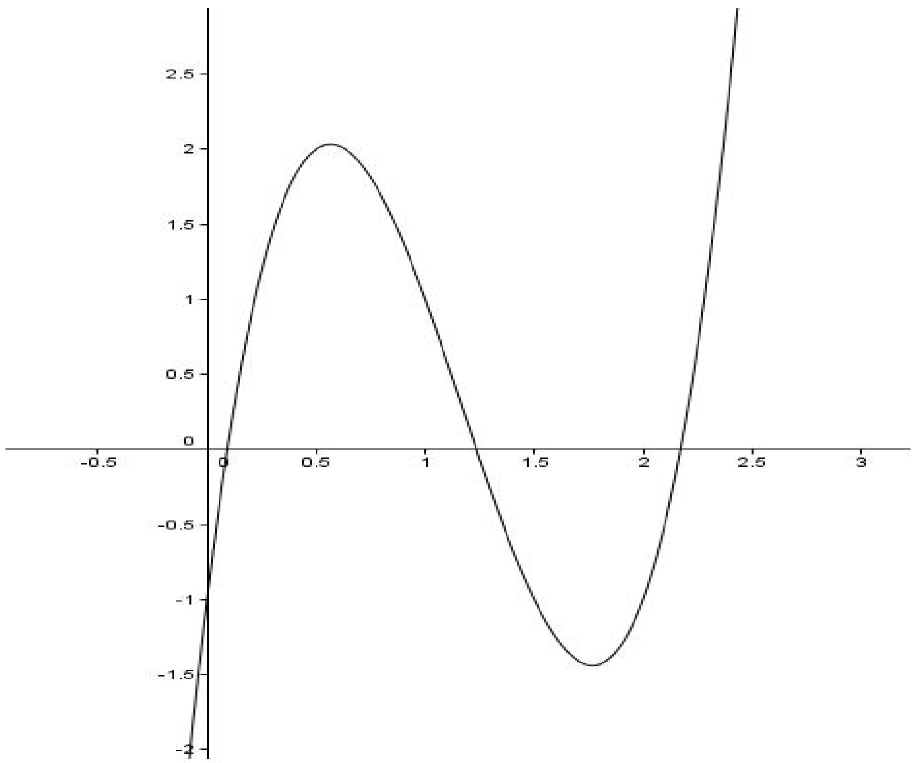


Figura 1: Rappresentazione grafica della funzione $f(x) = 4x^3 - 14x^2 + 12x - 1$, ottenuta col software Geogeba

Fortunatamente scopriamo che in effetti le tre soluzioni $x_1 < x_2 < x_3$ sono tutte reali. Ma non rallegriamoci troppo: sono comunque irrazionali. Alcune calcolatrici ci danno la posibilità di ottenere una loro approssimazione decimale, ma non certo quella di scoprirne la loro espressione in termini di radicali.

Per determinarle con una certa approssimazione possiamo avvalerci anche di due affascinanti metodi: il metodo della *bisezione* e quello della *corda*.

Il metodo della bisezione

Usando la stima grossolana prodotta graficamente, possiamo inizialmente includere la soluzione in un intervallo (o, come si sol dire, approssimare la soluzione a meno di un'unità).

Per esempio, la stima grafica della soluzione $x - 1$ ci permette di dire che

$$0 < x_1 < 1$$

Possiamo allora stimare che la soluzione sia esattamente nel punto medio dell'intervallo $I = [0, 1]$, cioè $x_1 = \dfrac{1}{2} = 0,5$, ma ovviamente possiamo subito accorgerci che $f(0,5) = 2 \neq 0$.

A questo punto può essere che:

- La soluzione sia $x_1 \in I_1 = [0, 1/2]$

- La soluzione sia $x_1 \in I_2 = [1/2, 1]$

Per vedere in quale intervallo essa si andrà a a situare, sfruttiamo un noto teorema che va sotto il nome di teorema degli zeri, la cui ovvietà ci lascia abbastanza tranquilli, tranne per il fatto che la sua dimostrazione ci attenderà al varco nella classe Quinta... Secondo detto teorema, il nostro polinomio si dovrebbe annulla almeno una volta in un punto interno ad un intervallo del tipo $I = [a, b]$ ove sia che:

$$f(a) \cdot f(b) < 0$$

Detto in altri termini, lo zero si situerà in un intervallo all'interno del quale la nostra funzione cambia di segno. In altri termini, la decisione dell'intervallo entro cui trovare la soluzione si effettuerà vedendo agli estremi di quale intervallo, fra i suddetti I_1 e I_2, la funzione assume segno diverso.

Non resta che calcolare, allora, $f(1) = 1$ e $f(0) = -1$, per esempio con una calcolatrice (tanto odiata dai nostri insegnanti del biennio!) o del mitico Derive.

Ciò implica che l'intervallo entro cui si situerà il nostro zero è I_1.

A questo punto il procedimento può essere iterato, prendendo come secondo valore presunto il punto medio di $I_1 = [0, 1/2]$, ossia, ovviamente $x_1 = 1/4$.

Ma $f(1/4) = \dfrac{19}{16} = 1,1875 \neq 0$. Allora si potrà pensare che

- La soluzione sia $x_1 \in I_1 = [0, 1/4]$
- La soluzione sia $x_1 \in I_2 = [1/4, 1/2]$

Ancora una volta, la decisione viene presa calcolando: $f(0) = -1$ e $f(1/2) = 2$ e scegliendo allora l'intervallo I_1.

La nuova stima della soluzione è ancora una volta il punto medio di questo intervallo, ossia $x_1 = 1/8 = 0,125$ avendo che $f(1/8) = 37/128 \neq 0$.

Come si può intuire, il procedimento è perfettamente ciclico: ad ogni *step* l'approssimazione della soluzione migliora (nel senso che si aggiungono più decimali). Per tale motivo esso risulta implementabile con un algoritmo codificabile in un qualsiasi linguaggio di programmazione, da dare in pasto ad un calcolatore.

Il criterio di *stop* potrà essere stabilito a priori o richiesto dal programma, secondo la precisione voluta.

Le possibilità di scelta per il linguaggio tengono conto delle nostre conoscenze in informatica e cadono inevitabilmente sul *Visual Basic*, utilizzando le macro di *Exce*l.

Abbiamo allora realizzato un foglio di calcolo con una macro che traccia preliminarmente il grafico della funzione (per dare una stima a meno di un'unità dei possibili zeri) e poi fa partire l'algoritmo di bisezione, chiedendo gli estremi inferiore e superiore dell'intervallo iniziale, fermandosi automaticamente dopo 20 iterazioni (stabilite in un opportuno ciclo FOR).

Qui di seguito, il listato della MACRO che esegue la bisezione:

```
Sub bisezion()
Dim x_i, x_s As Double
x_i = InputBox("estremo inf")
x_s = InputBox("estremo sup")
x = 0
i = 0
For i = 1 To 20
x = (x_i + x_s) / 2
y_i = Range("B3") * x_i ^ 3 + Range("B4") * x_i ^ 2 + Range("B5") * x_i + Range("b6")
y = Range("B3") * x ^ 3 + Range("B4") * x ^ 2 + Range("B5") * x + Range("b6")
If (y_i * y) < 0 Then
x_s = x
Else: x_i = x
End If
Next
Range("C1") = x
End Sub
```

Il metodo della corda

Un'alternativa al metodo della bisezione è il metodo della corda, basata su un principio analogo, ossia quello di stimare la posizione dello zero dall'intersezione della retta che congiunge i punti che hanno per coordinate gli estremi dell'intervallo e le rispettive immagini con l'asse x.

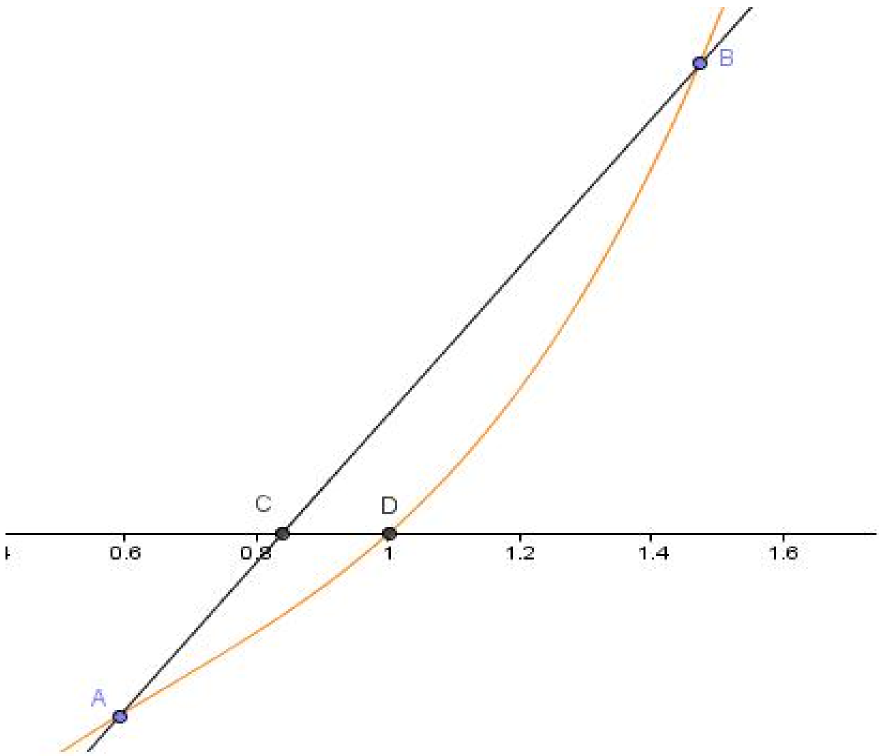


Figura 2: Illustrazione grafica del metodo della corda per la funzione $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 1$, realizzata col software Geogeba

In figura vediamo l'applicazione del metodo alla funzione $f(x)$ in colore arancione. Abbiamo eseguito una stima iniziale dell'intervallo entro cui trovare lo zero, nel nostro caso $I = [x_A, x_b]$. Andiamo poi a calcolare le ordinate $f(x_A)$ e $f(x_B)$ rispettive, determinando le coordinate dei punti A e B.

Troviamo quindi l'equazione della retta passante per A e B con la nota formula della geometria analitica e la intersechiamo con l'asse x, trovando le coordinate del punto che nel grafico abbiamo chiamato C. Ovviamente esso sarà inizialmente lontano dal valore reale D.

Possiamo iterare il procedimento, tenendo il punto A fisso e sostituendo B con C, ripetendo il calcolo e migliorando così la stima dello zero.

Analisi delle soluzioni

Analizziamo infine le soluzioni ottenute con i due metodi:

$$x_1 \simeq 0,093197\, m$$

$$x_2 \simeq 1,235342\, m$$

$$x_3 \simeq 2,171463\, m$$

Secondo la prima soluzione, dovremo tagliare i bordi praticamente a $9\, cm$ di lunghezza, e la scatola risultante sarebbe molto larga e bassa, idonea forse per sistemare merci quali sbarre, tubi o pannelli, comunque corpi le cui dimensioni di base sono preponderanti rispetto all'altezza. Secondo questa soluzione si otterrebbe infatti una scatola di dimensioni $2,82\, mx3,82\, mx0,09\, m$, quindi con un'area di base di ben $10\, m^2$, ma di soli $9\, cmdialtezza!$.

Il materiale sprecato sarebbe costituito da $81 \cdot 4 = 324\, cm^2$ di cartone derivante dai tagli, permettendo di utilizzare il 99% della superficie iniziale

La seconda soluzione prevede il taglio della lunghezza di più di $1\,m$, ed, avremo scatole di forma più regolare. Le dimensioni sarebbero in tal caso $1,77\,mx2,77\,mx1,23\,m$, quindi con un'area di base di $4,9\,m^2$ ed altezza $1,23\,m$ circa. Tuttavia con tale soluzione si sprecherebbe praticamente il 50% di materiale! Infatti i tagli farebbero perdere ben $6\,m^2$ di cartone sui 12 di partenza.

La terza soluzione, infine, è impraticabile, per ragioni geometriche!

Soddisfatti e consapevoli di avere incrementato le nostre conoscenze algebriche, possiamo depositare il materiale su cui abbiamo sudato a lungo, lasciandovi tuttavia uno spunto ulteriore: come certamente avrete notato, le approssimazioni trovate possono essere più o meno raffinate.

Ovviamente a livello pratico il grado di approssimazione e quindi di perfezione dipende sempre dalle applicazioni ed in questo caso non ci serve certo avere la soluzione approssimata oltre il millimetro.

Per i matematici teorici e pignoli essa è fondamentale! Quindi, se in futuro vorrete ricavarvi le bellissime soluzioni precise, scritte ovviamente con l'utilizzo di radici, dedicatevi allo studio della Formula di Cardano, un altro leggendario metodo (richiedente tuttavia i numeri complessi) che ha il vantaggio di dare immediatamente la soluzione in forma radicale per gli zeri dei polinomi cubici. E' questa una vera e propria *formula risolutiva* delle equazioni di terzo grado.