

Abbasso Euclide!

Antonio Luigi Stefani

22 Giugno 2016

INDICE

1. <i>Introduzione</i>	3
2. <i>La Geometria Euclidea</i>	4
3. <i>Un breve capitolo su Saccheri</i>	7
4. <i>La Geometria Iperbolica</i>	10
5. <i>La Geometria Ellittica</i>	16
6. <i>Le Onde Gravitazionali</i>	20
7. <i>Conclusioni</i>	26
8. <i>Bibliografia e Sitografia</i>	28

1. INTRODUZIONE

Negli anni Cinquanta del Novecento, i matematici di tutto il mondo organizzavano vari seminari e congressi con lo scopo di scrivere la *matematica moderna*. In particolare, proprio nel convegno tenuto in Francia nel 1959, il matematico J. Dieudonné esclamò le parole riportate come titolo della tesina: “Abbasso Euclide!”. Questa frase però, per quanto *vecchia* possa essere, sembra essere stata urlata dall’universo stesso non troppo tempo fa, l’ultima grande scoperta che ha coinvolto il mondo fisico, infatti, è la rilevazione delle Onde Gravitazionali. La loro rilevazione, avvenuta alla fine dell’estate 2015, confermò la Teoria della Relatività Generale concepita da Einstein. Ma che mezzi usò il fisico tedesco per ipotizzare una teoria di tale calibro? Questa è una domanda che da sempre mi faccio.

Navigando un po’ su Internet ho trovato che il lavoro fatto da Einstein non si sarebbe mai potuto realizzare se egli non avesse considerato la gravità come effetto geometrico nello spazio. Ma poteva la Geometria Euclidea analizzare pienamente questo fenomeno? Assolutamente no. Già nella prima metà dell’Ottocento infatti si era rilevato che la Geometria Euclidea non era l’unica geometria concepibile dall’intelletto umano, tanto che all’arrivo di Einstein ne erano state formulate molte altre. Le più rilevanti furono sicuramente la Geometria Iperbolica e la Geometria Ellittica, in particolare quest’ultima fu proprio quella utilizzata dal teorizzatore della Relatività.

Questa tesina vuole quindi analizzare le caratteristiche delle due Geometrie non Euclidee principali (sopra citate) individuandone le differenze con la Geometria Euclidea e vedendone le principali applicazioni nella scoperta delle Onde Gravitazionali.

2. LA GEOMETRIA EUCLIDEA

La Geometria Euclidea fu formulata da Euclide molto probabilmente a cavallo tra il IV e il III secolo a.C. ne *Gli Elementi*. Quest'opera si struttura in 13 libri, i primi 4 parlano della planimetria elementare; i successivi due delle proprietà dei segmenti e dei poligoni relativi alle proporzioni; dal settimo al decimo dei numeri razionali e irrazionali; gli ultimi tre parlano invece della geometria solida.

Quello che mi interessa per lo sviluppo di questa tesina però sono i primi cinque postulati. Ma cos'è un postulato? Secondo il vocabolario italiano è: "Un principio riconosciuto valido senza prove né dimostrazione, allo scopo di determinare fatti o costruire una teoria". In poche parole si tratta di un'asserzione ritenuta convenzionalmente vera; vi presenterò ora qui di seguito i cinque postulati di Euclide:

1. Tra due punti ben distinti di un piano passa una e una sola retta.
2. Un segmento rettilineo può essere prolungato indefinitamente.
3. Dato un punto e una lunghezza, è possibile descrivere una circonferenza.
4. Tutti gli angoli retti sono congruenti.
5. Se una retta taglia altre due rette determinando dallo stesso lato angoli interni la cui somma è minore di quella di due angoli retti, prolungando indefinitamente le due rette, esse si incontreranno dalla parte dove la somma dei due angoli è minore di due angoli retti.

Il quinto postulato è la chiave di volta di questa tesina, ma come già nel periodo di Euclide, anche adesso non è intuitivo come i primi quattro, voglio quindi spiegarlo meglio introducendo un'immagine:

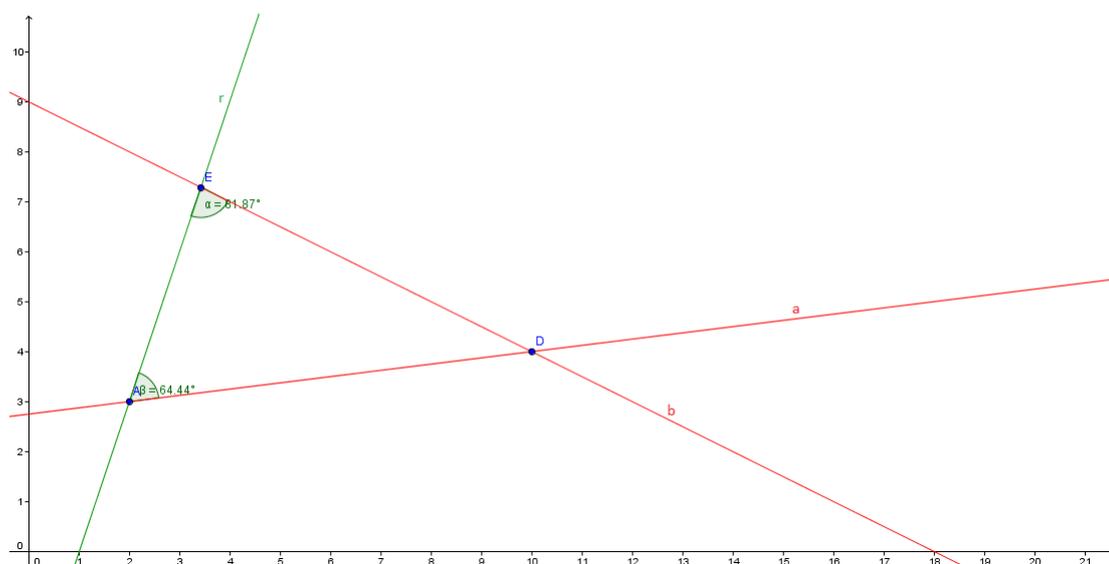


Fig. 2.1: V Postulato di Euclide

Andando avanti nei secoli però anche l'enunciato del quinto postulato cambiò; oggi infatti è meglio conosciuto secondo la formulazione di Playfair (1795) che recita: “Data una retta r e un punto P esterno ad essa, esiste una e una sola retta s passante per il punto P e parallela alla retta r ”.

Come dicevo prima, le Geometrie non Euclidee nascono dall'accettazione o no del V postulato, ma perché compare questa ambiguità che invece non sembra esserci negli altri quattro? La risposta è semplice. Consideriamo i primi quattro postulati: essi risultano accettabili empiricamente in qualsiasi sistema di riferimento; il quinto invece cambia nel momento in cui si considera un sistema macroscopico o uno microscopico. Infatti, nel momento in cui noi delimitiamo il piano, possiamo verificare che in realtà esistono più rette passanti per un punto P che non incontrano la retta r data.

A causa della sua ambiguità fin da subito il V postulato fu messo *sotto osservazione* (anche dallo stesso Euclide), in molti provarono a dargli validità ma senza successo. Questo portò i vari studiosi a formulare nuove geometrie senza il V, sperando di raggiungere una contraddittorietà nella stessa e verificare per assurdo il postulato. Nel 1733, il matematico italiano Saccheri pensava di esserci riuscito ma la sua dimostrazione era difettosa. Egli non riuscì quindi a dimostrare la validità del V e in realtà, sebbene inconsapevolmente, gettò le basi per le Geometrie non Euclidee.

A dire la verità una vera e propria formulazione delle Geometrie non Euclidee, all'epoca di Saccheri, era ben lungi dall'essere proposta, ma nel 1826 N. Lobachevski in Russia e quasi contemporaneamente J. Bolyai in Austria pubblicarono in non più di 24 pagine una breve formulazione della stessa geometria: la Geometria Iperbolica; nel 1857 invece, in Germania, uno studente di Gauss, B. Riemann, tenne una lezione nella quale presentò, in non più di tre ore di esposizione, i precetti di un'altra geometria non euclidea: la Geometria Ellittica.

3. UN BREVE CAPITOLO SU SACCHERI

Prima di introdurre le Geometrie non Euclidee, però, mi sembra giusto dare un piccolo sguardo al lavoro che fece il pavese Saccheri, in quanto fu proprio da quello che N. Lobachevski partì.

Intenzionato a dimostrare la validità del V postulato di Euclide, decise di provare con il metodo della *supposizione per assurdo*. Egli quindi, come detto in precedenza, tentò di creare delle nuove geometrie con dei casi limite senza utilizzare il V, per arrivare così ad una contraddittorietà della stessa.

Saccheri partì dalla considerazione di quadrilateri ABCD con $BC \cong DA$ e gli angoli $\widehat{A} \cong \widehat{B} \cong \widehat{R}$. Secondo il V postulato, Saccheri dimostrò che $\widehat{C} \cong \widehat{D}$ e quindi formulò tre ipotesi:

1. Gli angoli $\widehat{C} \cong \widehat{D} \cong \widehat{R}$.

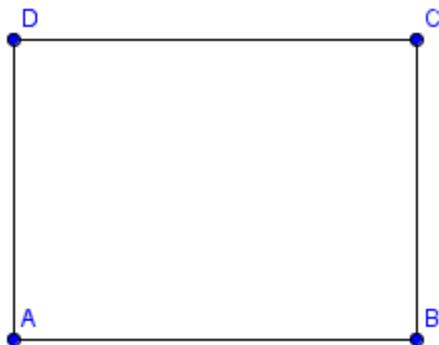


Fig. 3.1: Quadrilatero con $\widehat{C} \cong \widehat{D} \cong \widehat{R}$

Questo caso, si può notare facilmente, è un derivato del V postulato di Euclide, quello che Saccheri nega nella sua dimostrazione per assurdo. Passa quindi a considerare vera l'ipotesi che gli angoli $\widehat{C} \cong \widehat{D} > \widehat{R}$.

2. Gli angoli $\widehat{C} \cong \widehat{D} > \widehat{R}$.

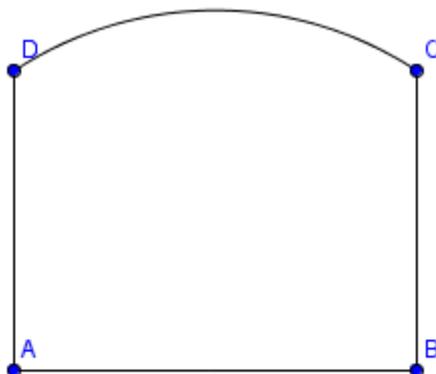


Fig. 3.2: Quadrilatero con $\widehat{C} \cong \widehat{D} > \widehat{R}$

Considerando quindi vera la seconda ipotesi, Saccheri, deduce due conseguenze: la prima è che la somma degli angoli interni di un triangolo è maggiore di \widehat{P} ; la seconda che una perpendicolare e un'obliqua ad una retta data si incontrano sempre.

Proprio quest'ultima osservazione permette a Saccheri di risalire al V postulato di Euclide, negato in principio.

3. Gli angoli $\widehat{C} \cong \widehat{D} < \widehat{R}$.

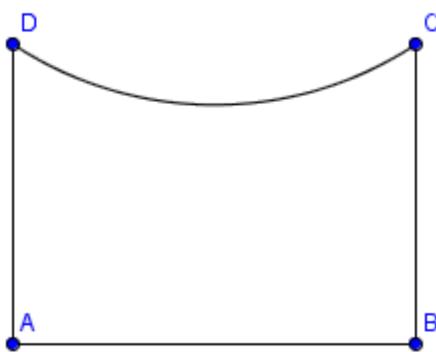


Fig. 3.3: Quadrilatero con $\widehat{C} \cong \widehat{D} < \widehat{R}$

Questa ipotesi può essere definita la causa scatenante delle Geometrie non Euclidee, Saccheri infatti, considerando vero che $\widehat{C} \cong \widehat{D} < \widehat{R}$, fece tre osservazioni: la somma degli angoli interni di un triangolo è minore di \widehat{P} ; si possono trovare una perpendicolare ed un'obliqua alla stessa retta che non si incontrano mai; e, infine, che, data una retta r e un punto P non interno alla retta, esistono due rette a e b che consistono in rette *limite*: rette distinte che non incontrano mai la retta r e che per questo possono essere definite asintotiche.

Saccheri in realtà, supponendo vera questa terza ipotesi, non trovò nessuna contraddittorietà all'interno delle osservazioni successive che fece, egli quindi non riuscì effettivamente a dimostrare la veridicità del V postulato di Euclide. Nonostante questo però, il matematico pavese scrisse nella sua opera magna (*Euclides ab omni naevo vindicatus*):

“L'ipotesi dell'angolo acuto è assolutamente falsa, perché ripugna alla natura della retta”.

4. LA GEOMETRIA IPERBOLICA

Fino ad ora ho parlato solo della storia della Geometria Euclidea, della dimostrazione di Saccheri e successivamente di quelle non Euclidee, adesso però voglio entrare nei dettagli delle Geometrie non tradizionali, così da poter poi giungere a spiegare più facilmente la teoria delle Onde Gravitazionali. Per iniziare quindi vi presento l'enunciato più importante della Geometria Iperbolica, quello che sostituì il V postulato di Euclide:

“Esistono due linee parallele ad una data retta che passano per un punto che non sta sulla retta data”

Si può notare quindi come l'enunciato di N. Lobachevski sia in realtà corrispondente alla terza osservazione che Saccheri fece nella sua dimostrazione. Voglio quindi chiarificarlo attraverso un'immagine.

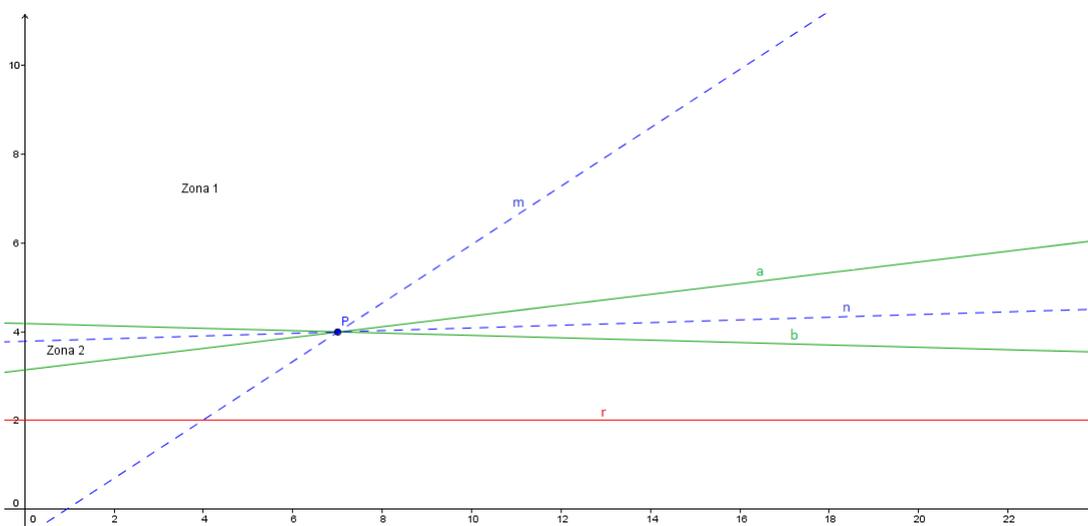


Fig. 4.1: Postulato Iperbolico

Con Lobachevski non cambiò solo il V postulato, ma cambiò proprio la definizione di retta parallela. Egli infatti non considera più la definizione di retta parallela avente come enunciato “Due rette sono parallele se non si incontrano mai”, ma considera le rette parallele quelle rette che sono asintotiche alla retta data; le stesse rette asintotiche individuate da Saccheri nella sua dimostrazione per assurdo.

Come si può vedere nella Figura 4.1, considerate le rette asintotiche a e b , esse dividono il piano in due zone: la *Zona 1* contenente le rette secanti la retta r , mentre la *Zona 2* contenente le rette non-secanti la retta r .

Introduco ora il Teorema Fondamentale di Parallelismo secondo la Geometria Iperbolica: partendo dalla definizione di parallelismo e dalla Figura 4.1, tracciamo la perpendicolare a r passante per P e chiamiamo d la distanza tra P e r . Prendiamo in considerazione l'angolo tra le due rette a e b e chiamiamolo β : sicuramente $\beta < \hat{P}$. Prendendo ora in considerazione l'angolo $\alpha = \beta/2$, quindi sicuramente $\alpha < \hat{R}$, nella Geometria Euclidea, in realtà, l'angolo α , chiamato *angolo di parallelismo*, sarà sempre congruente ad un angolo retto, mentre nella Geometria Iperbolica sarà sicuramente un angolo acuto. Si può notare anche che α dipenda direttamente dalla distanza d e questo porta a due osservazioni:

1. Se diminuisce d , α si approssima ad un angolo retto.
2. Se aumenta d , α tenderà progressivamente a 0.

Inoltre, è stata riscontrata una costante di proporzionalità tra l'angolo α e la distanza d ed essa, chiamata k , la si può identificare secondo la seguente relazione:

$$\tan \frac{\alpha}{2} = e^{-d/k}$$

Da questa uguaglianza si possono notare due cose:

1. Con

$$\lim_{d \rightarrow \infty} e^{-d/k} = 0$$

allora $\tan \frac{\alpha}{2} = 0$ e quindi $\alpha = 0$.

2. Con

$$\lim_{d \rightarrow 0} e^{-d/k} = 1$$

allora $\tan \frac{\alpha}{2} = 1$ e quindi $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Sono verificate così le due osservazioni fatte in precedenza. Inoltre, questo ci porta a concludere che nella Geometria Iperbolica, a differenza della Geometria Euclidea, un angolo si modifica al modificarsi della lunghezza a cui è legato.

Un altro punto della Geometria Iperbolica che ritengo necessario affrontare in preparazione del capitolo sulle Onde Gravitazionali, è senza dubbio la questione dei triangoli e, in generale, del Piano considerato in questa stessa geometria, secondo il modello ideato dal matematico e fisico francese J.H. Poincaré a cavallo tra il XIX e il XX secolo.

Nella Geometria Euclidea il Piano è sempre stato immaginato come un quadrilatero che si estende all'infinito, nella Geometria Iperbolica però, il Piano euclideo, non può essere utilizzato in quanto si ricadrebbe certamente nella Geometria Euclidea. Questo portò Poincaré a considerare come Piano una speciale parte della *Pseudosfera* (una sfera con raggio negativo) cioè, “euclideicamente” parlando, tutto ciò che era contenuto dalla circonferenza γ , senza però considerare la circonferenza stessa come limite.

Detto ciò, bisogna definire cosa questo matematico consideri come retta, egli infatti rivoluziona, come si può ben immaginare, il concetto di “retta”. Poincaré infatti definisce come *retta iperbolica* i diametri di γ e gli archi di circonferenza interni a γ ortogonali a γ stessa.

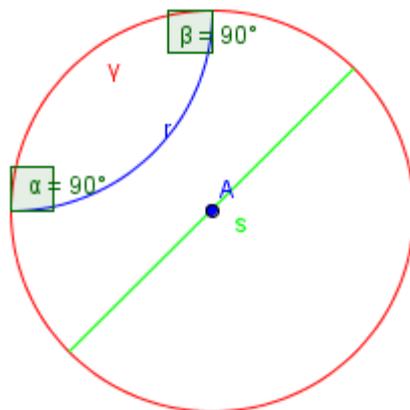


Fig. 4.2: Piano di Poincaré e Rette Iperboliche

In questo caso quindi si presentano due rette interne a γ , la retta r che consiste in un arco di circonferenza interno, la retta s che è un diametro di γ . Da notare è anche il fatto che nessuna retta presenta come estremi punti che giacciono sul piano individuato da γ , essa infatti, come già detto, non fa parte del *Piano Iperbolico* stesso.

Le rette quindi possono relazionarsi con le altre in tre differenti modi:

1. Le rette possono essere secanti. Esse sono secanti nel momento in cui hanno un punto non estremale (un punto estremale è il punto in cui la retta è ortogonale a γ) in comune.
2. Le rette possono essere parallele. Esse sono parallele nel momento in cui hanno un punto estremale in comune.
3. Le rette possono essere ultraparallele. Esse sono ultraparallele nel momento in cui non hanno nessun punto in comune.

Ma da dove deriva l'idea di Poincaré di utilizzare questo particolare Piano? Sempre da Bolyai e Lobachevski: essi ritennero infatti necessario descrivere un Piano nel quale rappresentare la loro Geometria non Euclidea e ne scelsero un tipo estremamente particolare.

I due matematici, infatti, individuarono come curva generatrice di questo Piano una *Trattrice*: la *Trattrice* è la curva piana caratterizzata dal fatto che il segmento di tangente compreso tra il punto di contatto P e una retta fissa è costante. L'equazione di una *Curva Trattrice* è molto particolare, prima di tutto perché è una curva trascendente, secondo perché è una curva parametrica:

$$\begin{cases} x = a * \ln(\sec(t) + \tan(t)) - a * \sin(t) \\ y = a * \cos(t) \end{cases} \quad \text{con } t \in [0; \pi/2]$$

In realtà l'equazione di questa curva nella Geometria Iperbolica è differente, essa infatti si presenta così:

$$x = \pm a * \cosh^{-1}\left(\frac{a}{y}\right) \mp \sqrt{a^2 - y^2}$$

Ad ogni modo, il grafico della *Curva Trattrice* appare così:

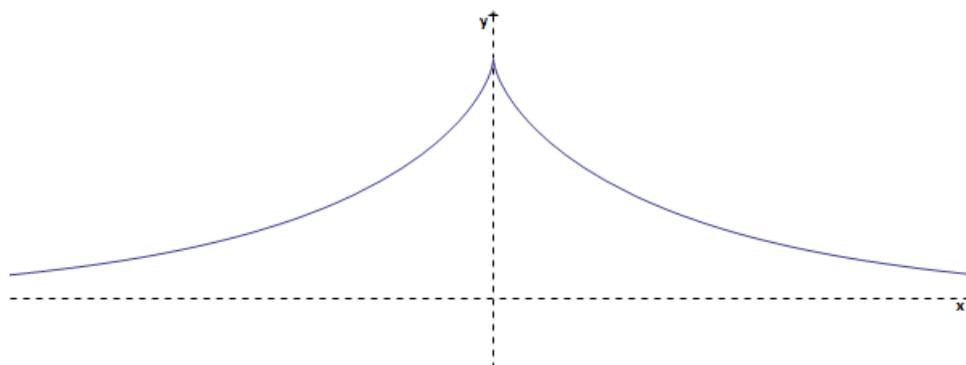


Fig. 4.3: Grafico di una *Curva Trattrice*

Ora, girando la *Curva Trattrice* intorno alla retta asintotica alla curva stessa, in questo caso particolare l'*asse x* e considerando la superficie generata da questa rotazione, otterremo un Piano sensazionale, cioè la *Pseudosfera*:

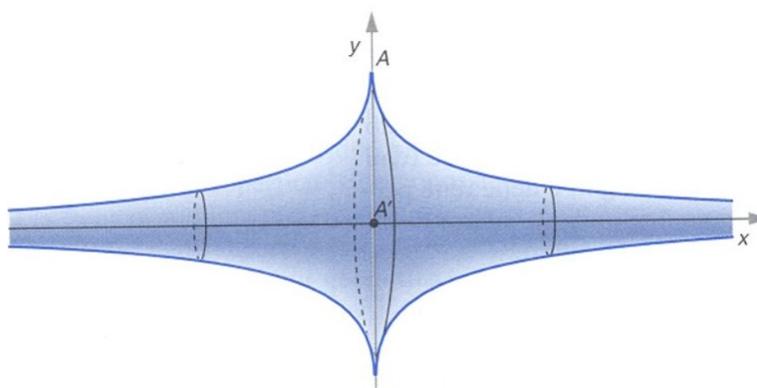


Fig. 4.4: Modello di *Pseudosfera*

Ma, riflettendo un attimo, la domanda sorge abbastanza spontanea: come compaiono le figure geometriche sulla *Pseudosfera* e in particolare sul Piano Iperbolico? Prendiamo ad esempio la figura più semplice: il triangolo. A differenza della Geometria Euclidea in cui i triangoli hanno la somma interna degli angoli uguale a \hat{P} , i Triangoli Iperbolici, invece, hanno la somma degli angoli interni minore di \hat{P} . Questo è molto difficile da immaginare, ma solo perché è molto difficile abbandonare una visione euclidea del mondo.

Ma, proprio come nella Geometria Euclidea, anche in quella Iperbolica, un triangolo può essere individuato dall'unione di tre differenti rette incidenti:

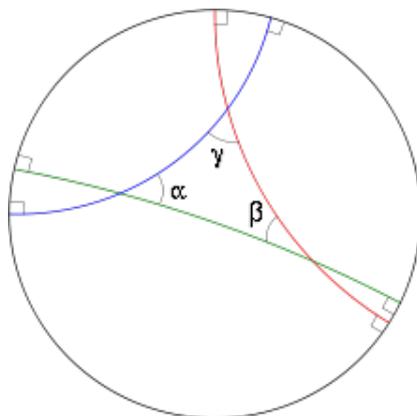


Fig. 4.5: Triangolo in una sezione del Piano Iperbolico

In un Piano Iperbolico vero e proprio, quindi, un triangolo apparirà nel seguente modo:

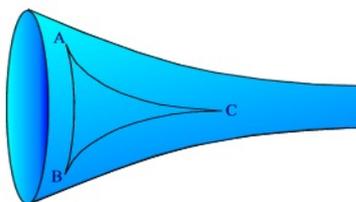


Fig. 4.6: Triangolo in una parte del Piano Iperbolico

Si può notare quindi una certa affinità tra il triangolo individuato dalle tre rette nella sezione del Piano e quello nel Piano Iperbolico vero e proprio.

In conclusione quindi si è potuto vedere come dalla Geometria Euclidea e dalla dimostrazione di Saccheri sia nata l'idea di una geometria con differente concezione di rette, parallele, Piano e triangoli. La nuova concezione di questi elementi sarà quindi necessaria per capire meglio su cosa si strutturerà la Teoria della Relatività Generale e in particolare la Teoria delle Onde Gravitazionali.

5. LA GEOMETRIA ELLITTICA

Un'altra rivoluzione nel mondo geometrico la si ebbe con la formulazione della Geometria Ellittica da parte del matematico B. Riemann. Egli, infatti, rivoluzionò nuovamente l'intera concezione di rette, rette parallele, Piani e triangoli. Come per la Geometria Iperbolica quindi, intendo strutturare questo capitolo prima di tutto parlando delle rette e delle rette parallele.

Per prima cosa partiamo dalla dimostrazione di Saccheri: B. Riemann, infatti, per formulare la sua geometria utilizzò la prima ipotesi scartata dall'italiano: quella in cui gli angoli \widehat{C} e \widehat{D} del quadrilatero $ABCD$ siano ottusi (Fig.3.2). Egli infatti osservò che le "rette" (chiamate poi geodetiche) che Saccheri aveva individuato nella sua ipotesi, erano linee chiuse e quindi l'ipotesi che esistesse una geometria che considerava gli angoli $\widehat{C} \cong \widehat{D} > \widehat{R}$ era pienamente valida.

Per definire in cosa consiste la geodetica e successivamente in cosa consiste una *retta* nella Geometria Ellittica, conviene partire dalla definizione di *segmento*. Nella Geometria Euclidea un segmento è una parte di retta che unisce nel "percorso" più breve due punti distinti del piano, nella Geometria Ellittica questo segmento viene chiamato geodetica. Nella nuova geometria quindi, le rette sono le *geodetiche massime*, ovvero le circonferenze ottenute dalla divisione in sezioni di una superficie sferica da parte di piani passanti per il centro O della sfera stessa. Una cosa da notare è che le rette non hanno lunghezza infinita, ma dipendono direttamente dalla Sfera considerata: esse infatti avranno lunghezza $2\pi * R$ con R lunghezza del raggio della Sfera. Le circonferenze massime godono di due proprietà essenziali nella formulazione della Geometria Ellittica:

1. Per ogni punto P sulla superficie sferica di una Sfera passano infinite rette (intese, ovviamente, come *geodetiche massime*).
2. Sulla superficie di una Sfera, per ogni coppia di punti P e Q non antipodali (cioè non simmetrici l'uno all'altro rispetto al centro O della Sfera) passa una e una sola *geodetica massima*.

Siccome ritengo questi due punti necessari per la spiegazione successiva, trovo che sia meglio illustrarli graficamente:

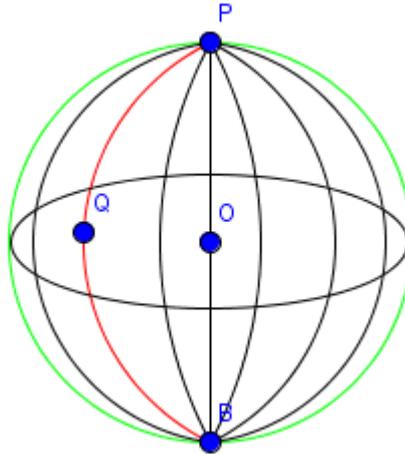


Fig. 5.1: Rette nella Geometria Ellittica

Come si può vedere nell'immagine per il punto P passano infinite rette, mentre per i punti P e Q ne passa solo una, ma, cosa più importante, si può notare come tutte le rette si incontrino sempre. Ecco spiegato il commento lasciato da B. Riemann nella critica all'opera di N. Lobachevski "*Nuovi elementi di Geometria*" e precetto della Geometria Ellittica:

“Euclide dice che per un punto esterno ad una retta non si può tracciare più di una sola retta parallela; Lobachevski dice che si possono tracciare tutte quelle che si vogliono, e io dico che non se ne può tracciare alcuna”.

Dopo aver parlato di rette e di geodetiche, bisogna fare una precisazione: queste definizioni sono valide solo nel momento in cui si considera come Piano la superficie sferica di una Sfera, altrimenti si ricadrebbe nella dimostrazione di Saccheri che renderebbe l'intera formulazione della Geometria Ellittica *falsa*. Quindi, a differenza della Geometria Iperbolica, la Geometria di Riemann può essere applicata solo a determinati sistemi di riferimento, non che questi manchino nella realtà di tutti i giorni: la nostra stessa Terra è un Geoide. Faccio ora un breve esempio in cui questa geometria viene applicata: capita spessissimo che aerei, per raggiungere l'aeroporto d'arrivo in linea d'aria con quello di partenza, preferiscano attraversare uno dei Poli piuttosto che utilizzare il parallelo che unisce direttamente i due punti.

Identificato quindi anche il Piano Ellittico, si può passare a discutere riguardo ai Triangoli Ellittici: essi, come si può facilmente immaginare, presentano una somma degli angoli interni maggiore di un angolo \hat{P} . Questo dipende, essenzialmente, dalla scelta del piano, proprio come si può vedere nell'immagine seguente:

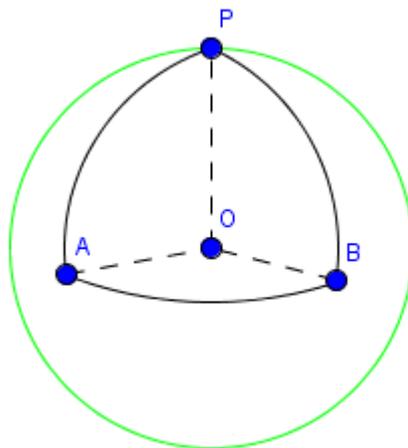


Fig. 5.2: Triangolo Equilatero Ellittico

Si può notare come il triangolo APB rappresentato abbia $P\hat{A}B \cong A\hat{B}P \cong B\hat{P}A \cong \hat{R}$. Nella figura però non compare un fatto abbastanza importante: il Triangolo Ellittico, infatti, viene definito come la porzione di Piano minore individuata dalle tre *geodetiche massime* che delimitano i lati del triangolo stesso, di conseguenza, quindi, un Triangolo Ellittico non avrà mai area maggiore della superficie di una semisfera. Un altro fatto degno sicuramente di nota è che, mentre nella Geometria Euclidea la somma degli angoli interni di qualsiasi triangolo è uguale a \hat{P} , nella Geometria Ellittica la somma degli angoli dei triangoli dipende dalla superficie sferica occupata dal triangolo stesso e quindi non esiste una misura *costante*.

Anche non avendo una costanza nella somma degli angoli interni di un Triangolo Ellittico, però, grazie alle due osservazioni sopra riportate, si può notare che $\pi < \hat{A} + \hat{B} + \hat{P} < 2\pi$. Di conseguenza la somma dei lati di un Triangolo Ellittico sarà sicuramente minore di $2\pi * R$.

Proprio come nella Geometria Iperbolica anche qui si può notare il completo cambiamento di concezione di retta e Piano. Einstein, infatti, nella Teoria della Relatività Generale, considerò l'Universo come una sfera e ipotizzò che la luce seguisse proprio le geodetiche per spostarsi da un punto all'altro di esso. Ovviamente la curvatura della luce dipende dalla Forza Gravitazionale che agisce su di essa, materia di studio della Relatività, ma sicuramente le Geometrie non Euclidee furono importantissime nel lavoro del geniale fisico, tanto che egli stesso dedicò loro alcune parole in una conferenza del 1921:

“Do molta importanza a queste interpretazioni della geometria; se non le avessi conosciute, non sarei mai stato capace di sviluppare la Teoria della Relatività”.

6. LE ONDE GRAVITAZIONALI

Come già detto più volte precedentemente, la Teoria della Relatività Generale e in particolare quella delle Onde Gravitazionali, non potrebbe mai essere stata descritta dalla Geometria Euclidea. Empiricamente questo lo si è provato misurando l'orbita che descrive la Terra girando intorno al Sole: infatti, secondo la Geometria Euclidea, il rapporto tra l'orbita misurata e il diametro dovrebbe essere pari a $\pi = 3.145926536\dots$ mentre, in realtà, il rapporto risulta pari a $3.145924853\dots$. Basta questo per farci capire che la Geometria Euclidea non descriverà mai, in modo propriamente corretto, l'Universo.

Ma a cosa è dovuta questa discrepanza? Essa è dovuta alla presenza di Masse enormi (il Sole) che, con il loro Campo Gravitazionale, producono delle interferenze Spazio-Temporali. Le *linee di campo* sono le Onde Gravitazionali. Esse non sono una Forza, ma vengono definite piuttosto come “perturbazioni dello Spazio-Tempo che si propagano alla velocità della luce c e che come effetto producono la contrazione della materia”. Le Onde Gravitazionali sono costanti ed onnipresenti e, per quanto non misurabili, a causa della loro bassa intensità, esse deformano continuamente lo Spazio-Tempo. Per quanto possa sembrare assurdo, è stato provato, ancora dalla Meccanica di Newton, che ogni corpo dotato di massa sia sorgente di un Campo Gravitazionale. Si può supporre quindi, a ragion veduta, che, se non ci fosse la presenza del Sole, molto probabilmente, il rapporto tra lunghezza e il diametro dell'orbita descritta della Terra sarebbe uguale a π .

Detto ciò, si può intuire facilmente che, se la Geometria Euclidea non descrive esattamente la curvatura dello Spazio-Tempo, le geometrie adatte a questo scopo sono la Geometria Iperbolica e la Geometria Ellittica. Sulle curvature analizzate dalle Geometrie non Euclidee, però, bisogna fare una precisazione: quando si parlerà di Spazio-Tempo deformato a *curvatura negativa*, si tratterà di una perturbazione descritta dalla Geometria Iperbolica; mentre quando si parlerà di Spazio-Tempo deformato a *curvatura positiva*, si tratterà di una perturbazione descritta dalla Geometria Ellittica. Ciò è facilmente intuibile in quanto la curvatura sarà negativa se la somma degli angoli interni di un triangolo sarà minore di un angolo \hat{P} mentre positiva se la somma degli angoli interni di un triangolo sarà maggiore di un angolo \hat{P} .

Le deflessioni dello Spazio-Tempo dovute alla presenza della Gravità sono più facilmente intuibili attraverso la seguente immagine e il classico esempio delle biglie:

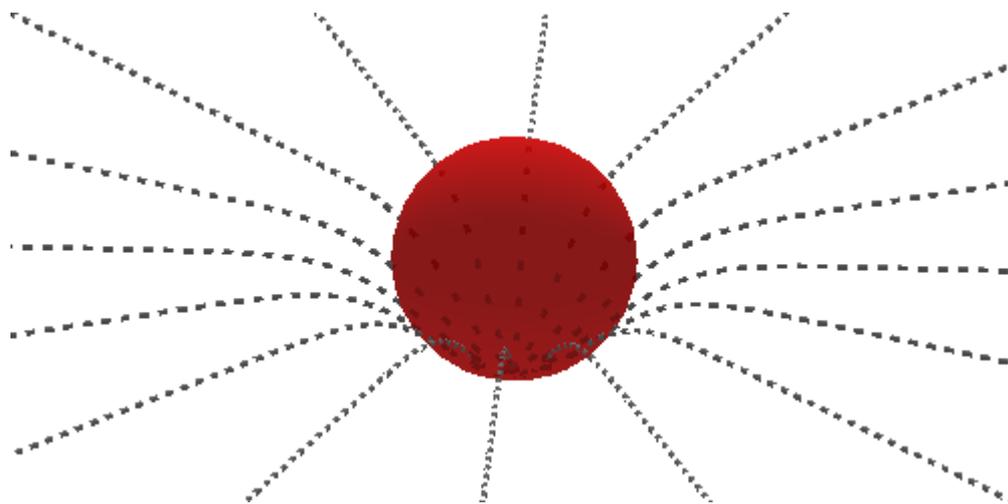


Fig. 6.1: Deflessione dello Spazio-Tempo a causa della presenza di una Massa

L'esempio delle biglie è il seguente: supponiamo di essere sopra un letto a giocare a biglie. Successivamente al lancio esse avranno sicuramente una traiettoria dritta, ma nel momento in cui noi appoggiamo un peso sul letto, il piano di gioco si deforma. Le biglie che passeranno sulla curvatura generata dal peso, avranno non più una traiettoria rettilinea, bensì avranno una traiettoria *curvata*. Esse quindi verranno deflesse dalla perturbazione del piano in cui giacciono curvando e venendo attratte verso la sorgente della perturbazione (il peso in questo caso), ma, per loro, continueranno ad avere una traiettoria rettilinea. Questo è quello che succede in tutti i sistemi planetari: i pianeti, infatti, in assenza di una massa con forte attrazione gravitazionale, avrebbero una traiettoria rettilinea, ma nel momento in cui entrano nel Campo Gravitazionale di un corpo, ne vengono influenzati.

Si può notare quindi come la Geometria Ellittica compaia nello studio delle orbite dei pianeti che girano intorno ad una stella, o alla perturbazione Spazio-Temporale generata da un corpo con un'enorme massa e consequenzialmente la deflessione di tutto ciò che entra in contatto con il Campo Gravitazionale generato.

Ma, la Gravità non è un proprietà Spazio-Temporale descritta semplicemente dalla Geometria Ellittica, anzi, essa viene descritta anche dalla Geometria Iperbolica in uno dei fenomeni più sensazionali e misteriosi dell'Universo: i Buchi Neri.

Essi furono consideranti fantascienza fino a non molto tempo fa, ma, grazie ad alcune rilevazioni e a della foto scattante nello *Spazio Profondo*, oggi giorno sono degli eventi ben noti. I Buchi Neri sono estremamente interessanti da studiare, essi infatti presentano una capacità attrattiva maggiore di qualsiasi altro ente presente nell'Universo (fin'ora conosciuto). Nella Teoria della Relatività Generale di Einstein, compare una formula che va a determinare la *velocità di fuga* necessaria per sfuggire ad un Campo Gravitazionale:

$$\frac{1}{2}mv^2 = G\frac{Mm}{r}$$

Si può notare quindi che la velocità necessaria per sfuggire ad una *Sorgente Gravitazionale* dipende sia dalla massa del corpo da cui si vuole fuggire sia dalla distanza da esso.

Prima di mettere in relazione questa formula con i Buchi Neri, ritengo sia necessario spiegare molto brevemente come essi si formino. Consideriamo una *Nebulosa Stellare*: una *Nebulosa Stellare* (o Protostella) è un insieme di atomi di Idrogeno che, a causa della Forza Gravitazionale esercitata su di esso, si comprime fino a raggiungere la temperatura di fusione dell'Idrogeno stesso. Con la fusione nucleare quindi, cominceranno a formarsi atomi di Elio, i quali andranno a formare un "guscio" esterno, ovvero la superficie stellare. Successivamente la stella potrà essere una stella "media" (il Sole), cioè una Gigante Rossa, oppure una stella massiva, cioè una Supergigante Rossa. La durata della vita di questi Corpi Celesti è di miliardi e miliardi di anni, ed essa trascorre in un'eterna lotta tra due forze (che fortunatamente si equilibrano): la Forza Gravitazionale che tende a comprimere la stella e a farla collassare su se stessa e la fusione nucleare (da Idrogeno a Elio) che tende invece a farla espandere. Ad un certo punto, però, la stella si ritroverà senza Idrogeno, questo ne comporterà la morte e il collasso. In seguito a ciò, in base alla massa originaria della stella, essa si trasformerà in una Nebulosa Planetaria (se era una Gigante Rossa) o una Supernova (se era una Supergigante rossa). La Nebulosa Planetaria diventerà poi una nana bianca e successivamente una nana nera, mentre la Supernova, che ha una densità impressionante, ha due vie: la prima la conduce ad una Stella di Neutroni; la seconda ai Buchi Neri.

I Buchi Neri presentano quindi una forza attrattiva grandissima, tanto che, non solo costituiscono un'interferenza Spazio-Temporale, ma diventano dei veri e propri buchi, si suppone, dimensionali:

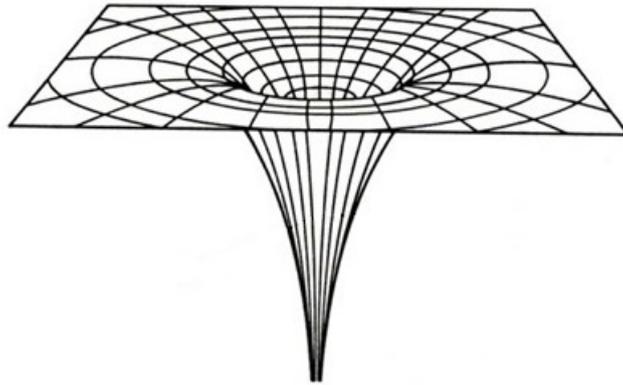


Fig. 6.2: Deformazione Spazio-Temporale dovuta ad un Buco Nero

Si può notare nella Figura 6.2 che la deformazione Spazio-Temporale dovuta alla nascita di un Buco Nero, si presenta molto simile ad una parte del Piano Iperbolico descritto in precedenza, compare qui, quindi, l'applicazione della Geometria Iperbolica alla Fisica.

Dopo aver illustrato come si presentano i Buchi Neri, si può riprendere il concetto di velocità limite: nei Buchi Neri la forza attrattiva è così potente che qualsiasi oggetto entrato nel Campo Gravitazionale da lui creato viene assorbito. Esiste però un'eccezione: le Onde Gravitazionali. Esse, infatti, non vengono assorbite, ma, sembra quasi che ignorino le interferenze gravitazionali presenti nello Spazio. Una delle loro proprietà straordinarie quindi è che, una volta prodotte, esse vagano senza mai estinguersi per l'Universo. Questo è uno dei motivi per cui si suppone anche che la Gravità possa attraversare le dimensioni.

Prima di concludere questo capitolo voglio esporre le ultime (ma non ultime per importanza) due cose che ritengo necessarie per la completezza di questo approfondimento: come si formano le Onde Gravitazionali e con quali strumenti sono state rilevate.

Le Onde Gravitazionali, come ho detto prima, sono prodotte da tutti i corpi massivi ma esse sono troppo deboli per essere rilevate, persino da strumenti estremamente sensibili. Proprio per questo furono captate per la prima volta solo 100 anni esatti dopo la formulazione della Teoria della Relatività Generale. Ma come si possono creare delle Onde Gravitazionali tali da essere recepite qui sulla Terra? Esse possono essere causate da tre eventi:

- **Collasso di sistemi binari.** Un sistema binario di stelle è un sistema composto da più stelle che hanno un fuoco della loro orbita ellittica in comune, così che la loro traiettoria possa incrociarsi in due punti differenti. Il collasso di un sistema di questo tipo provoca un rilascio di energia inimmaginabile.
- **Esplosioni di raggi γ che avvengono in seguito allo scoppio di una supernova.** Questo tipo di esplosioni sono le più potenti in assoluto, hanno un'energia tale da poter percorrere l'intero Universo.
- **Il collasso di una Supernova.** Essa può diventare, come già riportato in precedenza, un Buco Nero o una Stella di Neutroni, in entrambi i casi questo evento sprigionerà delle Onde Gravitazionali, appunto, captabili.

Il fenomeno prodotto dalle Onde Gravitazionali è quindi uno spostamento dello Spazio-Tempo che produce un allungamento o una contrazione di una massa e viceversa nella direzione perpendicolare a quella cambiata originariamente.

Accennato agli eventi che possono generare delle Onde Gravitazionali con intensità tale da essere misurate e evidenziato come esse agiscano sulle masse, è ora il caso di presentare i mezzi, o meglio, il mezzo che gli scienziati hanno sfruttato per il rilevamento di questo fenomeno. Essi si sono serviti di un Interferometro. Questo strumento, estremamente sensibile, consiste in una struttura in cui da una sorgente viene sparato un laser che, attraverso un gioco di specchi messi perpendicolarmente l'uno all'altro, arriva ad un rilevatore. Più lunghi sono i bracci, quindi, più è sensibile lo strumento. Riprendo ora il fenomeno di interferenza prodotto dal passaggio dalle Onde Gravitazionali: è facilmente intuibile che, i bracci di un Interferometro vengono allungati e contratti, questo permette di registrare un'interferenza nel foto rilevatore.

Ma per capire meglio di cosa sto parlando, inserisco un'immagine che rappresenta, schematicamente, un Interferometro:

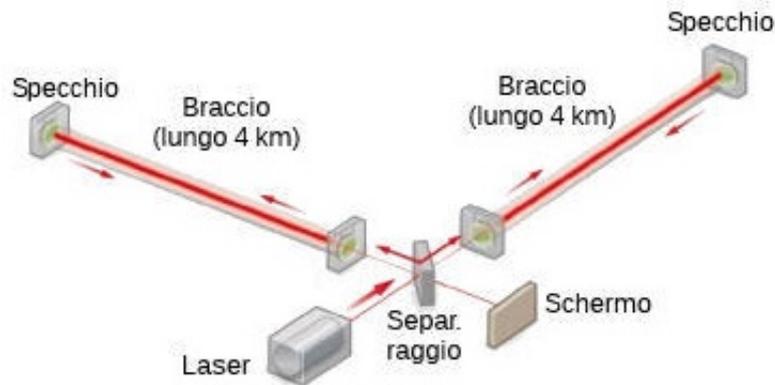


Fig. 6.3: Interferometro di Michelson

I centri scientifici che possiedono un Interferometro e che hanno partecipato attivamente alla rilevazione delle Onde Gravitazionali sono: l'Istituto EGO (European Gravitational Observatory), con sede a Pisa, in cui è presente VIRGO; la Caltech e il MIT, negli Stati Uniti, in cui è presente LIGO. Ed è proprio grazie a loro che è avvenuta questa rilevazione.

Ma perché questa scoperta è così importante? Essa, dal punto di vista utilitaristico, per il momento almeno, non ha trovato ancora applicazioni ma, dal punto di vista scientifico invece, rappresenta una conferma o, se vogliamo essere popperiani, una non negazione della Teoria della Relatività. Ciò dimostra che le teoria e le ipotesi di Einstein descrivono correttamente l'Universo in cui viviamo.

7. CONCLUSIONI

Avvicinandosi il periodo degli Esami di Stato, molte persone, mi hanno chiesto l'argomento trattato nel mio approfondimento finale. Alla mia risposta molti mi dicevano che, per quanto interessante, secondo loro un argomento di tipo matematico era estremamente astratto e senza applicazioni. Per concludere questa tesina, voglio quindi presentare delle situazioni di tutti i giorni in cui noi facciamo uso delle Geometrie non Euclidee e provare ad eliminare lo stereotipo che considera la Fisica Moderna e ancor più la Matematica come scienze isolate e assestanti.

La prima applicazione delle Geometrie non Euclidee e della Teoria della Relatività che mi viene in mente è sicuramente il Telerilevamento. Gli studi di questa scienza, per quanto giovane possa essere, sono diventati fin da subito necessari all'umanità. Parlando di Telerilevamento è d'obbligo parlare di satelliti e di GPS. Come fanno i satelliti a sapere esattamente la nostra posizione? Essi sfruttano i precetti descritti dalla Geometria Ellittica, si muovono quindi utilizzando le geodetiche e considerando, ovviamente, la Terra come una Sfera. C'è, però, anche un secondo problema nell'uso dei satelliti: essi, infatti, orbitano intorno alla Terra ad una velocità molto elevata e nel momento che essi inviano un segnale, questo viaggerà alla velocità della luce. Ciò comporta quindi che un satellite debba calcolare, utilizzando la Teoria della Relatività, anche la curvatura necessaria perché il segnale arrivi sulla Terra. Ciò non succede solo nei GPS, ma basta pensare anche al nuovo progetto della *Self Driving Car* iniziato non molto tempo fa dalla Fiat Chrysler e Google.

La seconda applicazione delle Geometrie non Euclidee, per quanto sia comunque specifica, è nell'Informatica e in modo particolare nella Robotica. Non molto tempo fa, infatti, è stato ultimato iCub, il *robot bambino*, con una sua vera e propria I.A. Anche questa realizzazione fu un incredibile passo avanti per la scienza. Ma come fa a muoversi questo robot? Gli automi hanno la capacità di vedere, analizzare e muoversi nello spazio circostante. Tutta questa analisi e osservazione non sarebbe mai stata possibile senza gli studi forniti dalla Geometria Iperbolica. Essa, infatti, fornisce gli input necessari per evitare che il robot si disorienti.

Si può vedere quindi che la nostra vita, attuale ma soprattutto futura, dipende sia direttamente che indirettamente dalle Geometrie non Euclidee e che scienze come la Matematica e la Fisica illustrano, con minimo margine di errore, la realtà che ci circonda.

Antonio Luigi Stefani

8. BIBLIOGRAFIA E SITOGRAFIA

Bibliografia:

- *Quando le rette diventano curve, le geometrie non euclidee*; Giorgio Riviaccio; Mondo Matematico; 2013.
- *Dall'ignoto al noto, le leggi della fisica svelate dalla matematica: La matematica che ha reso possibile la relatività*; Renato Di Lorenzo; il Sole 24 ore; 2012.

Sitografia:

- <http://oltrelascuola.altervista.org/appli.htm>
- <https://it.wikipedia.org/wiki/Euclide>
- https://it.wikipedia.org/wiki/Geometria_non_euclidea
- <http://www.isit100.fe.it/~maccaferri.m/geometrie/poincare.htm>
- <http://progettomatematica.dm.unibo.it/Curve%20celebri/modern/trattrice.html>
- <http://scienzaemusica.blogspot.it/2013/02/singolari-sfere-pseudosfera-e-sfera.html>
- <http://www.matematicamente.it/cultura/storia-della-matematica/geometrie-non-euclidee/>
- <https://www.youtube.com/watch?v=YyDkpFUul2g>
- <http://www.fmboschetto.it/tde2/gravit6.htm>
- <http://www.brera.inaf.it/covino/DVG/NEW/A3042DOP.HTM>
- <https://fuffologia.wordpress.com/2016/02/11/confermate-le-onde-gravitazionali-einstein-aveva-ragione/>
- http://www.ego-gw.it/virgodescription/italiano/pag_4.html

Tesina realizzata con l'uso di *TeXMaker* e del linguaggio *MikTeX*.

Disegni realizzati con l'uso di *Geogebra 5.0*