



I.S.I.S.S. "Marco Casagrande"
TESINA DI MATURITA'

ANALISI MATEMATICA DI UN CIRCUITO RL

L'INNAMORARSI DI UN PROGETTO NELLE SCIENZE MATEMATICHE

Mattia Pavan Francesca Zaffalon

Candidato: **Mattia Pavan**

Classe: V B Liceo Scientifico

Anno scolastico 2015/2016
Pieve di Soligo, giugno 2016

*"La matematica,
vista nella giusta luce,
possiede non soltanto verità
ma anche suprema bellezza."*

-Bertrand Russell

Indice

1	Introduzione	4
2	Circuito RL	5
3	Funzione della prima carica e scarica	6
4	Funzione generale	8
5	Massimi e minimi della funzione	12
6	Funzione lipschitziana	14
7	Conclusione	20
8	Bibliografia e sitografia	21

1 Introduzione

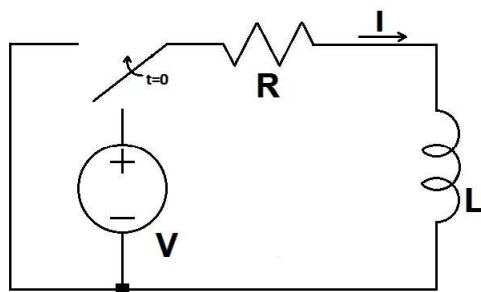
L'approfondimento seguente ha origine da un'idea nata durante un progetto organizzato dalla scuola, il "Progetto Archimede", che ha permesso a me e alla mia compagna di classe di fare un'esperienza sui circuiti RL, che ci ha consentito di scoprire una funzione particolare che un po' alla volta ci ha affascinato sempre di più. All'inizio avevamo ipotizzato una semplice funzione caratterizzata da due equazioni esponenziali ma successivamente studiandola ci siamo accorti che era molto più particolare di così, una funzione unica su cui si potrebbe lavorare per una vita e ogni volta scoprire qualcosa di speciale.

A mio parere questa funzione, pur rappresentando i cicli di un circuito RL mostra come la matematica vada oltre le altre scienze, è un'affascinante avventura dell'immaginazione, un processo creativo e gratificante di invenzione e scoperta che permette al matematico di uscire dal mondo reale per rivelare un nuovo universo da scoprire ogni volta che inizia a studiare ogni problema, un universo che si espande ogni giorno di più e in cui il matematico si perde.

Questa tesina è stata elaborata da me e dalla mia compagna di classe, Francesca Zaffalon, e ci siamo divisi lo studio delle equazioni in due parti: io mi sono concentrato maggiormente sulla funzione in sé e sul suo grafico, analizzando il primo ciclo e successivamente 300 cicli mentre Francesca ha studiato i massimi e i minimi e in seguito una proprietà della funzione, la lipschitzianeità.

2 Circuito RL

Un circuito è detto "circuito RL" se è formato da una resistenza R e un'induttanza L collegate in serie a una batteria di forza elettromotrice V_0 e a un interruttore. La resistenza è la tendenza di un oggetto a ostacolare il passaggio degli elettroni, il loro movimento è infatti sempre in parte rallentato: affinché gli elettroni riescano a vincere la resistenza del filo deve essere applicata una differenza di potenziale agli estremi di questo. La differenza di potenziale o forza elettromotrice è quella grandezza che misura il lavoro compiuto da una batteria di fem V_0 per trasportare una carica ΔQ da uno dei due poli della batteria all'altro. L'induttanza è definita come il valore assoluto del rapporto tra il flusso del campo magnetico concatenato al circuito e l'intensità di corrente. Essa quindi è la proprietà fisica di un corpo che tende a opporsi alla variazione di campo magnetico.



L'induttanza impedisce alla corrente di crescere linearmente e non rende possibile il facile raggiungimento del suo valore finale. Al circuito è associato un tempo caratteristico definito come il rapporto tra l'induttanza e la resistenza

$$\tau = \frac{L}{R}$$

La carica del circuito RL può essere descritta con la funzione:

$$I = \frac{V_0}{R}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

Questa costante di tempo τ rappresenta il tempo che ci metterebbe il circuito a caricarsi completamente se non ci fosse l'induttanza.

Si può notare infatti che $\lim_{L \rightarrow 0^+} \tau = \lim_{L \rightarrow 0^+} \frac{L}{R} = 0$ e

$$\lim_{\tau \rightarrow 0^+} \frac{V_0}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = \frac{V_0}{R}$$

Studiando la funzione si nota che matematicamente la corrente raggiungerebbe il valore massimo a $+\infty$ ma fisicamente la carica si può considerare conclusa dopo un tempo pari a 5τ .

3 Funzione della prima carica e scarica

Nell'esperienza realizzata durante il progetto Archimede si può osservare nel monitor dell'oscilloscopio il grafico della carica e della successiva scarica del circuito RL. L'obiettivo è quello di determinare l'equazione della funzione avente tale grafico. Primo aspetto da osservare è che la funzione sembra continua e periodica. La funzione di carica del circuito RL si ricava dalla soluzione dell'equazione differenziale:

$$V(t) = -L \frac{dI(t)}{dt} + RI(t)$$

dove $V(t)$ è pari alla somma del potenziale ai capi della resistenza $RI(t)$ e del potenziale ai capi della batteria $-L \frac{dI(t)}{dt}$ e risulta quindi pari a

$$y = V_0 \cdot (1 - e^{-\frac{x}{\tau}})$$

Sapendo che la funzione di carica è approssimabile a un'esponenziale, si può ricavare la funzione di scarica attraverso delle simmetrie:

$$y = V_0 \cdot e^{-\frac{x}{\tau}}$$

Dal punto di vista fisico la funzione cresce inizialmente velocemente e poi sempre più lentamente: il circuito, cioè, non si carica mai al 100% di $\frac{V_0}{R}$ e la carica viene perciò solitamente considerata conclusa quando la corrente raggiunge il valore di $1 - e^{-5} = 99,3262\%$ di V_0 . L'impulso necessario per raggiungere almeno questo valore e quindi perché il processo si possa considerare esaurito deve avere durata qualsiasi maggiore o uguale di 5τ .

Partendo da questi dati fisici, abbiamo costruito un modello matematico supponendo che la frequenza dell'impulso sia esattamente 5τ . Di conseguenza una carica e una scarica avvengono in 10τ .

La funzione $y = V_0(1 - e^{-\frac{x}{\tau}})$ parte dall'origine del sistema di riferimento e in 5τ arriva al punto $M_1(5\tau; V_0(1 - e^{-5}))$. Per rendere la funzione continua la scarica deve partire dal punto M_1 . L'induttanza, in modo analogo alla carica, in un periodo pari a 5τ non si scarica del 100% ma solo fino al $1 - e^{-5} = 99,3262\%$ dal valore di partenza. Quindi se la scarica parte dal valore $V_0(1 - e^{-5})$ arriva a $V_0(1 - e^{-5})e^{-5}$ cioè al punto $m_1(10\tau; V_0(1 - e^{-5})e^{-5})$.

Sapendo che il modello della funzione della scarica è del tipo $f(x) = a \cdot e^{-bx+c} + d$ possiamo ricavarla, senza l'uso delle equazioni differenziali, imponendo il passaggio della funzione per i punti M_1 e m_1

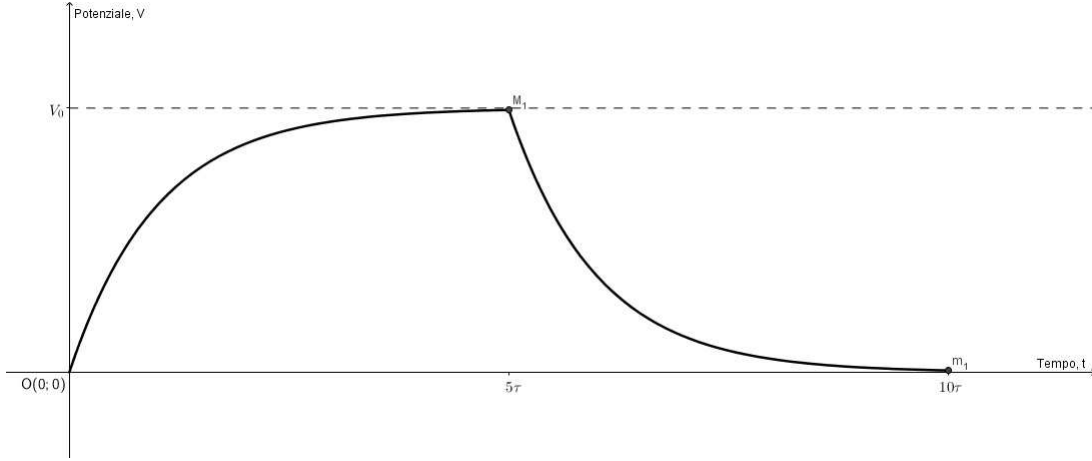
$$\begin{cases} f(5\tau) = V_0(1 - e^{-5}) \\ f(10\tau) = V_0(1 - e^{-5})e^{-5} \end{cases}$$

Da cui si ricava:

$$y = V_0 e^{-\frac{x}{\tau} + \ln(1 - e^{-5}) + 5}$$

Si può quindi descrivere l'andamento della prima carica e della successiva scarica con la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} V_0 (1 - e^{-\frac{x}{\tau}}) & \text{se } 0 \leq x < 5\tau \\ V_0 e^{-\frac{x}{\tau} + \ln(1 - e^{-5}) + 5} & \text{se } 5\tau \leq x \leq 10\tau \end{cases}$$



Verifichiamo che la tangente alla funzione in $O(0;0)$ incontra la retta di equazione $y = V_0$ in $x = \tau$. La derivata della funzione $f(x)$ è:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{V_0}{\tau e^{\frac{x}{\tau}}} & \text{se } 0 \leq x < 5\tau \\ -\frac{V_0}{\tau} e^{-\frac{x}{\tau} + \ln(e^5 - 1)} & \text{se } 5\tau \leq x \leq 10\tau \end{cases}$$

La funzione è continua ma non è derivabile in tutti i suoi punti, infatti

$$f'_-(5\tau) = \lim_{x \rightarrow 5\tau^-} \frac{V_0}{\tau e^{\frac{x}{\tau}}} = \frac{V_0}{\tau e^5}$$

$$f'_+(5\tau) = \lim_{x \rightarrow 5\tau^+} -\frac{V_0}{\tau} e^{-\frac{x}{\tau} + \ln(e^5 - 1)} = -\frac{V_0}{\tau} e^{-5 + \ln(e^5 - 1)}$$

nel punto $M_1(5\tau; V_0(1 - e^{-5}))$ la funzione presenta quindi un punto angoloso.

In particolare l'equazione della retta tangente in O può essere calcolata attraverso l'utilizzo della formula del fascio di rette $y - y_0 = m(x - x_0)$ dove x_0 e y_0 sono le coordinate del punto O . Questa risulta quindi pari a

$$y = \frac{V_0}{\tau} x$$

e risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} y = \frac{V_0}{\tau} x \\ y = V_0 \end{cases}$$

possiamo notare che la tangente interseca la retta $y = V_0$ nel punto $T_1(\tau; V_0)$.

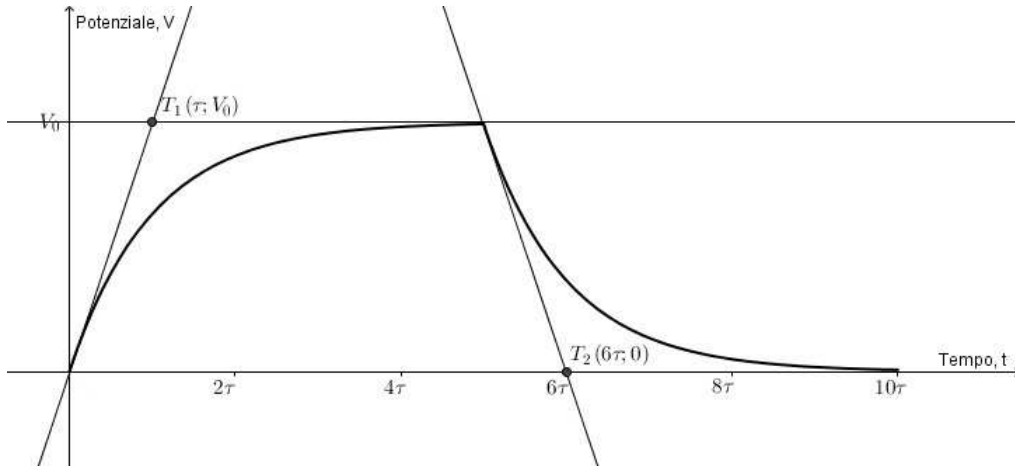
Abbiamo quindi deciso di calcolare la tangente in 5^+ per vedere se l'intersezione di questa con la retta $y = 0$ presenta delle simmetrie con il punto precedente. La tangente in $M_1(5\tau; V_0(1 - e^{-5}))$ può essere calcolata come la precedente. Dal momento che in questo punto la funzione non è derivabile, poiché presenta un punto angoloso, consideriamo la derivata destra $f'_+(5\tau)$. Questa ha equazione

$$y = -\frac{V_0}{\tau} (1 - e^{-5}) \cdot x + 6V_0 (1 - e^{-5})$$

Risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} y = -\frac{V_0}{\tau} (1 - e^{-5}) \cdot x + 6V_0 (1 - e^{-5}) \\ y = 0 \end{cases}$$

possiamo notare che l'intersezione della tangente destra il M_1 con l'asse x corrisponde al punto $T_2(6\tau; 0)$



4 Funzione generale

Come abbiamo precedentemente visto il circuito non si carica/scarica mai del 100% ma solo del $1 - e^{-5} = 99,3262\%$ rispetto al minimo/massimo precedente. Cioè:

$$M_n - m_{n-1} = (1 - e^{-5})^{2n-1}$$

Con questo ragionamento abbiamo calcolato i primi 3 punti di massimo della funzione che hanno coordinate:

$$\begin{aligned} M_1 & (5\tau; V_0(1 - e^{-5})) \\ M_2 & (15\tau; V_0[(1 - e^{-5}) - (1 - e^{-5})^2 + (1 - e^{-5})^3]) \\ M_3 & (25\tau; V_0[(1 - e^{-5}) - (1 - e^{-5})^2 + (1 - e^{-5})^3 - (1 - e^{-5})^4 + (1 - e^{-5})^5]) \end{aligned}$$

Allo stesso modo abbiamo calcolato i primi 3 punti di minimo della funzione di coordinate:

$$\begin{aligned}
& m_1 (10\tau; V_0[(1 - e^{-5}) - (1 - e^{-5})^2]) \\
& m_2 (20\tau; V_0[(1 - e^{-5}) - (1 - e^{-5})^2 + (1 - e^{-5})^3 - (1 - e^{-5})^4]) \\
& m_3 (30\tau; V_0[(1 - e^{-5}) - (1 - e^{-5})^2 + (1 - e^{-5})^3 - (1 - e^{-5})^4 + (1 - e^{-5})^5 - (1 - e^{-5})^6])
\end{aligned}$$

Generalizzando il nostro ragionamento abbiamo calcolato le coordinate dei punti di massimo e di minimo relativo della funzione

$$\begin{aligned}
& M_n \left(5\tau (2n - 1); V_0 \sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^{k+1} (1 - e^{-5})^k \right) \\
& m_n \left(10n\tau; V_0 \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} (1 - e^{-5})^k \right)
\end{aligned}$$

con $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 1$.

Da queste coordinate, sapendo che la funzione doveva essere del tipo:

$$f(x) = \begin{cases} V_0 a \cdot e^{-\frac{x-b}{\tau}+c} + d \\ y = V_0 \left(1 - f \cdot e^{-\frac{xg}{\tau}+h} + i \right) \end{cases}$$

abbiamo costruito un sistema per determinare la funzione di una carica/scarica n .

Da questi sistemi abbiamo quindi ricavato la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} V_0 \left(1 - e^{-\frac{x}{5\tau} \cdot \ln \left(\frac{1 - (e^{-5} - 1)^{2n-1}}{1 - (e^{-5} - 1)^{2n}} \right) + (2n-1) \cdot \ln \left(\frac{1 - (e^{-5} - 1)^{2n-1}}{2 - e^{-5}} \right) + (-2n+2) \cdot \ln \left(\frac{1 - (e^{-5} - 1)^{2n}}{2 - e^{-5}} \right)} \right) \\ V_0 \cdot e^{-\frac{x}{5\tau} \cdot \ln \left(\frac{e^{-5} - 1 - (e^{-5} - 1)^{2n}}{-1 + e^{-5} - (e^{-5} - 1)^{2n+1}} \right) + 2n \ln \left(\frac{e^{-5} - 1 - (e^{-5} - 1)^{2n}}{e^{-5} - 2} \right) + (-2n+1) \ln \left(\frac{-1 + e^{-5} - (e^{-5} - 1)^{2n+1}}{e^{-5} - 2} \right)} \end{cases}$$

Per disegnare la funzione fino a una carica/scarica n , abbiamo elaborato un programma in geogebra.

Le funzioni $f(x, z)$ e $l(x, z)$ rappresentano rispettivamente la funzione della scarica e quella della carica di un circuito RL dove z indica il numero di carica e scarica che vogliamo rappresentare. Questo valore viene inserito tramite lo slider: in questo caso la variabile è compresa tra i valori 1 e 300 ma si può ampliare o restringere a seconda delle proprie esigenze.

Le funzioni $g(x, z)$ e $n(x, z)$ servono per limitare le equazioni $f(x, z)$ e $l(x, z)$ nei 5τ che abbiamo imposto come frequenza dell'impulso. I limiti delle due funzioni $f(x, z)$ e $l(x, z)$ devono essere diversi perché, prendendo in considerazione ad esempio il primo ciclo di carica/scarica, la funzione della carica è compresa nell'intervallo $[0; 5\tau]$ mentre la scarica nell'intervallo $]5\tau; 10\tau]$: per questo motivo sono necessarie tre rette $a(z)$, $b(z)$, $d(z)$ per limitare i vari rami della funzione.

Funzione in più variabili


- $f(x, z) = 1 - e^{-1 \ln\left(\frac{1 + \frac{z}{10} e^{\frac{z}{10}}}{1 + \frac{z}{10} e^{\frac{z}{10}}}\right)} - 2 \ln\left(\frac{1 + \frac{z}{10} e^{\frac{z}{10}}}{1 + \frac{z}{10} e^{\frac{z}{10}}}\right) + 2 \ln\left(\frac{1 + \frac{z}{10} e^{\frac{z}{10}}}{1 + \frac{z}{10} e^{\frac{z}{10}}}\right)$
- $g(x, z) = \text{Se} \left[10z - 10 < x < 10z - 5, 1 - e^{-1 \ln\left(\frac{1 + \frac{z}{10} e^{\frac{z}{10}}}{1 + \frac{z}{10} e^{\frac{z}{10}}}\right)} - 2 \ln\left(\frac{1 + \frac{z}{10} e^{\frac{z}{10}}}{1 + \frac{z}{10} e^{\frac{z}{10}}}\right) + 2 \ln\left(\frac{1 + \frac{z}{10} e^{\frac{z}{10}}}{1 + \frac{z}{10} e^{\frac{z}{10}}}\right) \right]$
- $h(x, z) = e^{-1 \ln\left(\frac{1 + \frac{z}{10} e^{\frac{z}{10}}}{1 + \frac{z}{10} e^{\frac{z}{10}}}\right)} - 2 \ln\left(\frac{1 + \frac{z}{10} e^{\frac{z}{10}}}{1 + \frac{z}{10} e^{\frac{z}{10}}}\right) + 2 \ln\left(\frac{1 + \frac{z}{10} e^{\frac{z}{10}}}{1 + \frac{z}{10} e^{\frac{z}{10}}}\right)$
- $n(x, z) = \text{Se} \left[10z - 5 < x < 10z, e^{-1 \ln\left(\frac{1 + \frac{z}{10} e^{\frac{z}{10}}}{1 + \frac{z}{10} e^{\frac{z}{10}}}\right)} - 2 \ln\left(\frac{1 + \frac{z}{10} e^{\frac{z}{10}}}{1 + \frac{z}{10} e^{\frac{z}{10}}}\right) + 2 \ln\left(\frac{1 + \frac{z}{10} e^{\frac{z}{10}}}{1 + \frac{z}{10} e^{\frac{z}{10}}}\right) \right]$

Funzione

- $a(x) = 10x - 10$
- $b(x) = 10x - 5$
- $d(x) = 10x$

Numero

$c = 2$

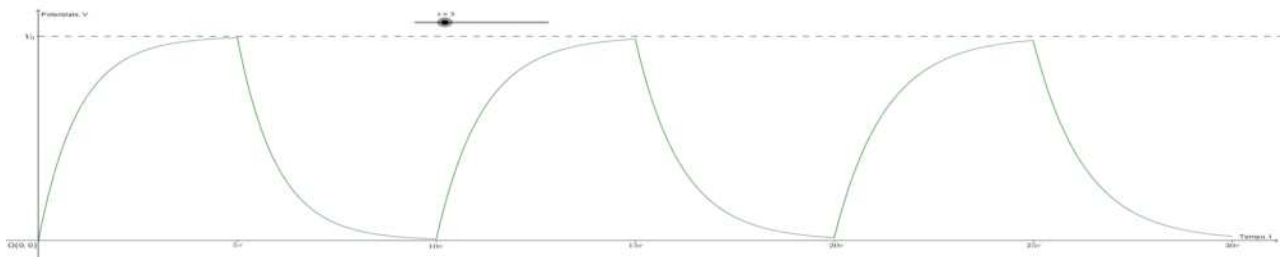
1  300

Lista

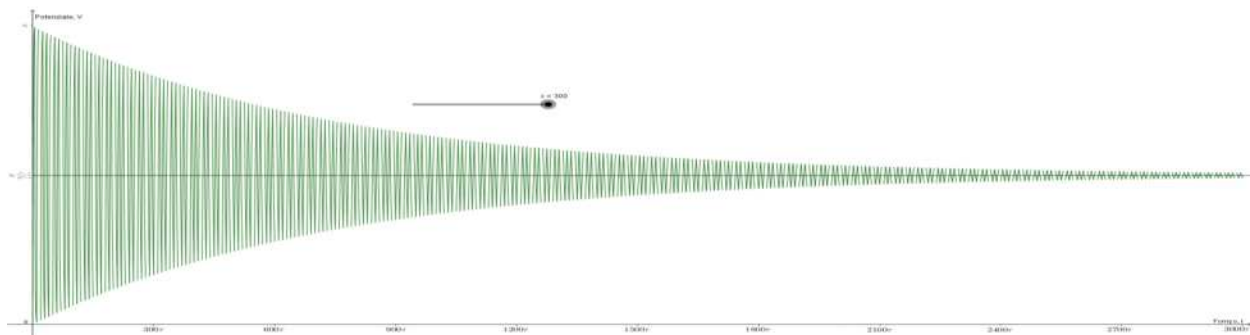
- lista1 = $\left\{ \text{Se} \left[10 \cdot 1 - 10 < x < 10 \cdot 1 - 5, 1 - e^{-1 \ln\left(\frac{1 + \frac{z}{10} e^{\frac{z}{10}}}{1 + \frac{z}{10} e^{\frac{z}{10}}}\right)} - 2 \ln\left(\frac{1 + \frac{z}{10} e^{\frac{z}{10}}}{1 + \frac{z}{10} e^{\frac{z}{10}}}\right) + 2 \ln\left(\frac{1 + \frac{z}{10} e^{\frac{z}{10}}}{1 + \frac{z}{10} e^{\frac{z}{10}}}\right) \right], \text{Se} \left[10 \cdot 2 - 10 < x < 10 \cdot 2 - 5, 1 - e^{-1 \ln\left(\frac{1 + \frac{z}{10} e^{\frac{z}{10}}}{1 + \frac{z}{10} e^{\frac{z}{10}}}\right)} - 2 \ln\left(\frac{1 + \frac{z}{10} e^{\frac{z}{10}}}{1 + \frac{z}{10} e^{\frac{z}{10}}}\right) + 2 \ln\left(\frac{1 + \frac{z}{10} e^{\frac{z}{10}}}{1 + \frac{z}{10} e^{\frac{z}{10}}}\right) \right] \right\}$
- lista2 = $\left\{ \text{Se} \left[10 \cdot 1 - 5 < x < 10 \cdot 1, e^{-1 \ln\left(\frac{1 + \frac{z}{10} e^{\frac{z}{10}}}{1 + \frac{z}{10} e^{\frac{z}{10}}}\right)} - 2 \ln\left(\frac{1 + \frac{z}{10} e^{\frac{z}{10}}}{1 + \frac{z}{10} e^{\frac{z}{10}}}\right) + 2 \ln\left(\frac{1 + \frac{z}{10} e^{\frac{z}{10}}}{1 + \frac{z}{10} e^{\frac{z}{10}}}\right) \right], \text{Se} \left[10 \cdot 2 - 5 < x < 10 \cdot 2, e^{-1 \ln\left(\frac{1 + \frac{z}{10} e^{\frac{z}{10}}}{1 + \frac{z}{10} e^{\frac{z}{10}}}\right)} - 2 \ln\left(\frac{1 + \frac{z}{10} e^{\frac{z}{10}}}{1 + \frac{z}{10} e^{\frac{z}{10}}}\right) + 2 \ln\left(\frac{1 + \frac{z}{10} e^{\frac{z}{10}}}{1 + \frac{z}{10} e^{\frac{z}{10}}}\right) \right] \right\}$

Infine le due liste permettono di rappresentare una serie di coppie di carica/scarica, dalla prima fino alla z che decidiamo attribuendo un valore allo slider.

In questo modo, attribuendo allo slider il valore $z = 3$ siamo riusciti a rappresentare i primi tre rami di carica e i primi tre rami di scarica della funzione



Allo stesso modo abbiamo rappresentato, ponendo $z = 300$, le prime 300 serie di carica e scarica della funzione.



Osservando entrambi i grafici possiamo notare come man mano che si prosegue nel verso dell'asse x i punti di massimo risultino sempre più distanti dalla retta $y = V_0$ e, allo stesso modo, anche i punti di minimo si allontanano dalla retta $y = 0$.

Funzione in più variabili

$f(x, z) = 1 - e^{-\frac{1}{2} \ln \left(\frac{x^2 + 4z^2}{1 + 4x^2 + z^2} \right)} + (2x - 1) \ln \left(\frac{x^2 + 4z^2}{1 + 4x^2 + z^2} \right) + (2z - 1) \ln \left(\frac{x^2 + 4z^2}{1 + 4x^2 + z^2} \right)$

$f(x, z) = \ln \left[10z - 10 < x < 10z - 5, 1 - e^{-\frac{1}{2} \ln \left(\frac{x^2 + 4z^2}{1 + 4x^2 + z^2} \right)} + (2x - 1) \ln \left(\frac{x^2 + 4z^2}{1 + 4x^2 + z^2} \right) + (2z - 1) \ln \left(\frac{x^2 + 4z^2}{1 + 4x^2 + z^2} \right) \right]$

$f(x, z) = e^{-\frac{1}{2} \ln \left(\frac{x^2 + 4z^2}{1 + 4x^2 + z^2} \right)} + 2x \ln \left(\frac{x^2 + 4z^2}{1 + 4x^2 + z^2} \right) + (2z - 1) \ln \left(\frac{x^2 + 4z^2}{1 + 4x^2 + z^2} \right)$

$g(x, z) = \ln \left[10z - 5 < x < 10z, e^{-\frac{1}{2} \ln \left(\frac{x^2 + 4z^2}{1 + 4x^2 + z^2} \right)} + 2x \ln \left(\frac{x^2 + 4z^2}{1 + 4x^2 + z^2} \right) + (2z - 1) \ln \left(\frac{x^2 + 4z^2}{1 + 4x^2 + z^2} \right) \right]$

Funzione

$a(z) = 10z - 10$

$b(z) = 10z - 5$

$d(z) = 10z$

Numero

$e = 2$

1

Libero

$\ln a z = \left\{ \ln \left[10 - 1 - 10 < x < 10 - 1 - 5, 1 - e^{-\frac{1}{2} \ln \left(\frac{x^2 + 4z^2}{1 + 4x^2 + z^2} \right)} + (2x - 1) \ln \left(\frac{x^2 + 4z^2}{1 + 4x^2 + z^2} \right) + (2z - 1) \ln \left(\frac{x^2 + 4z^2}{1 + 4x^2 + z^2} \right) \right] \cdot \ln \left[10 - 2 - 10 < x < 10 - 2 - 5, 1 - e^{-\frac{1}{2} \ln \left(\frac{x^2 + 4z^2}{1 + 4x^2 + z^2} \right)} + (2x - 1) \ln \left(\frac{x^2 + 4z^2}{1 + 4x^2 + z^2} \right) + (2z - 1) \ln \left(\frac{x^2 + 4z^2}{1 + 4x^2 + z^2} \right) \right] \right\}$

$\ln a z z = \left\{ \ln \left[10 - 1 - 5 < x < 10 - 1, e^{-\frac{1}{2} \ln \left(\frac{x^2 + 4z^2}{1 + 4x^2 + z^2} \right)} + 2x \ln \left(\frac{x^2 + 4z^2}{1 + 4x^2 + z^2} \right) + (2z - 1) \ln \left(\frac{x^2 + 4z^2}{1 + 4x^2 + z^2} \right) \right] \cdot \ln \left[10 - 2 - 5 < x < 10 - 2, e^{-\frac{1}{2} \ln \left(\frac{x^2 + 4z^2}{1 + 4x^2 + z^2} \right)} + 2x \ln \left(\frac{x^2 + 4z^2}{1 + 4x^2 + z^2} \right) + (2z - 1) \ln \left(\frac{x^2 + 4z^2}{1 + 4x^2 + z^2} \right) \right] \right\}$

5 Massimi e minimi della funzione

Abbiamo visto che la coordinata y dei punti di massimo e minimo è rappresentata in entrambi i casi da una sommatoria.

Cerchiamo quindi di capire se le serie $V_0 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} (1 - e^{-5})^k$ e $V_0 \cdot \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} (1 - e^{-5})^k$ convergono ed, eventualmente, a che limiti.

Se consideriamo la prima, possiamo osservare che

$$\sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^{k+1} (1 - e^{-5})^k = \sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^k (-1) (1 - e^{-5})^k = - \sum_{k=1}^{2n-1} (e^{-5} - 1)^k$$

Questa può quindi essere scritta con la serie geometrica

$$\sum_{k=1}^{\infty} (e^{-5} - 1)^k$$

e, poiché $|e^{-5} - 1| \leq 1$, essa converge. Più precisamente

$$\sum_{k=0}^{\infty} (e^{-5} - 1)^k = \frac{1}{1 - (e^{-5} - 1)} = \frac{1}{2 - e^{-5}}$$

Quindi

$$\sum_{k=1}^{\infty} (e^{-5} - 1)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (e^{-5} - 1)^k - 1 = \frac{e^{-5} - 1}{2 - e^{-5}}$$

Concludendo

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} (1 - e^{-5})^k = - \sum_{k=1}^{\infty} (e^{-5} - 1)^k = \frac{1 - e^{-5}}{2 - e^{-5}} = \frac{e^5 - 1}{2e^5 - 1}$$

L'ordinata dei punti M_n tende quindi a $V_0 \cdot \frac{e^5 - 1}{2e^5 - 1} \approx V_0 \cdot 0,498309819075486$.

E' possibile fare lo stesso ragionamento anche con la sommatoria $\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} (1 - e^{-5})^k$, infatti

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} (1 - e^{-5})^k = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k (-1) (1 - e^{-5})^k = - \sum_{k=1}^{2n} (e^{-5} - 1)^k$$

Anche in questo caso quindi si tratta di una serie geometrica

$$\sum_{k=1}^{\infty} (e^{-5} - 1)^k$$

e, poiché $|e^{-5} - 1| \leq 1$, essa converge. In particolare essendo uguale alla precedente

$$-\sum_{k=1}^{\infty} (e^{-5} - 1)^k = \frac{e^5 - 1}{2e^5 - 1}$$

L'ordinata dei punti m_n tende quindi a $V_0 \cdot \frac{e^5 - 1}{2e^5 - 1} \approx V_0 \cdot 0,498309819075486$.

Molto interessante osservare anche che le ordinate dei punti M_n , senza considerare V_0 , sono una successione di numeri che presenta una definizione ricorsiva. Infatti, indicando per semplicità con $A = 1 - e^{-5}$, i primi termini sono

$$\begin{aligned} S_1 &= A \\ S_2 &= A - A^2 + A^3 = S_1 - A^2 + A^3 \\ S_3 &= A - A^2 + A^3 - A^4 + A^5 = S_2 - A^4 + A^5 \\ &\dots \end{aligned}$$

quindi possiamo scrivere

$$\begin{cases} S_1 = A \\ S_n = S_{n-1} - A^{2n-2} + A^{2n-1} \end{cases}$$

o ancora meglio

$$\begin{cases} S_1 = A \\ S_n = S_{n-1} - A^{2n-2}(1 - S_1) \end{cases}$$

quindi con un piccolo algoritmo si può ottenere un elenco di valori grandissimo se pur finito. Ecco un esempio in vba:

```
Sub elenco()
s = 1 - Exp(-5)
For n = 2 To 3000
s = s - (1 - Exp(-5)) ^ (2 * n - 2) * (Exp(-5))
Range("A" & n).Value = s
Next
End Sub
```

Abbiamo quindi cercato una funzione che descrivesse l'andamento dei minimi e una che descrivesse l'andamento dei massimi. Se consideriamo la successione dei punti di minimo possiamo notare che presentano un asintoto orizzontale pari al valore a cui convergono a $+\infty$ ovvero $y = V_0 \cdot \frac{e^5 - 1}{2e^5 - 1}$

Abbiamo quindi ipotizzato che la funzione che descrivesse meglio l'andamento dei punti di minimo fosse un'esponenziale del tipo

$$n(x) = a(1 - e^{-bx+c}) + d$$

Dal momento che il primo minimo è il punto $O(0;0)$, $c = d = 0$.

Poniamo poi:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} a(1 - e^{-bx}) = V_0 \cdot \frac{e^5 - 1}{2e^5 - 1} & \text{condizione per l'asintoto orizzontale} \\ y(10\tau) = V_0 \cdot [(1 - e^{-5}) - (1 - e^{-5})^2] & \text{condizione di passaggio per il primo minimo} \end{cases}$$

Otteniamo in questo modo la funzione passante per i punti di minimo

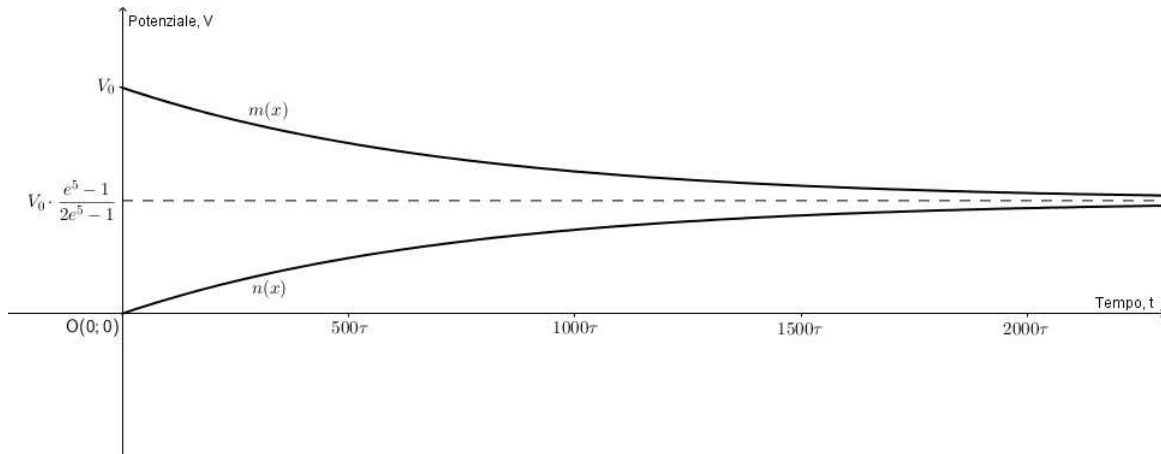
$$n(x) = V_0 \cdot \frac{e^5 - 1}{2e^5 - 1} \cdot \left(1 - e^{\left(\frac{1}{5} \cdot \ln(e^5 - 1) - 1\right)x}\right)$$

Anche la funzione che descrive l'andamento dei massimi presenta un asintoto orizzontale pari al valore a cui convergono a $+\infty$, $y = V_0 \cdot \frac{e^5 - 1}{2e^5 - 1}$. Più in particolare questa risulta simmetrica a $n(x)$ rispetto all'asintoto orizzontale $y = V_0 \cdot \frac{e^5 - 1}{2e^5 - 1}$. Sostituiamo quindi

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = 2V_0 \cdot \frac{e^5 - 1}{2e^5 - 1} - y \end{cases}$$

alla funzione $y' = \frac{e^5 - 1}{2e^5 - 1} \cdot \left(1 - e^{\left(\frac{1}{5} \cdot \ln(e^5 - 1) - 1\right)x'}\right)$ e otteniamo la funzione passante per i massimi

$$m(x) = V_0 \cdot \frac{e^5 - 1}{2e^5 - 1} \cdot \left(1 + e^{\left(\frac{1}{5} \cdot \ln(e^5 - 1) - 1\right)x}\right)$$



6 Funzione lipschitziana

Una caratteristica della funzione di carica e scarica di un circuito RL è la lipschitzianeità.

Definizione 1 Una funzione $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ è detta lipschitziana se esiste una costante $L \geq 0$, detta costante di Lipschitz, tale che:

$$|f(x) - f(y)| \leq L |x - y|, \quad x, y \in [a; b]$$

Teorema 1 Se la funzione $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile in $]a; b[$ e la funzione derivata prima $f'(x)$ è limitata in $]a; b[$ allora la funzione f è lipschitziana in $[a; b]$.

Dimostrazione.

Dal momento che la funzione derivata prima $f'(x)$ è limitata in $]a; b[$, allora esiste di sicuro un numero $k > 0$ tale che:

$$|f'(x)| \leq k, \quad \forall x \in]a; b[$$

Siano x, y due punti appartenenti a $[a; b]$ con $x < y$. Nell'intervallo $[x; y]$ la funzione soddisfa le ipotesi di Lagrange infatti, dal momento che è derivabile, è anche continua. Possiamo quindi scrivere:

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(z)$$

dove z è un punto interno all'intervallo $[x; y]$ tale che $x < z < y$

Possiamo quindi scrivere anche:

$$\left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right| = |f'(z)| \leq k$$

Da qui possiamo ricavare

$$|f'(y) - f'(x)| \leq k \cdot |y - x|$$

Ponendo come numero di Lipschitz $L = k$, otteniamo

$$|f'(y) - f'(x)| \leq L \cdot |y - x|$$

La funzione $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ risulta quindi lipschitziana in $[a; b]$. \square

La nostra funzione non è però derivabile in tutto il suo dominio infatti presenta infiniti punti di non derivabilità, in particolare questi sono punti angolosi, come verificato nel paragrafo 3.

Teorema 2 Sia I l'intervallo ottenuto dall'unione dell'intervallo $I_1 [a(I_1); b(I_1)]$ e dell'intervallo $I_2 [a(I_2); b(I_2)]$ con $I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$. Se la funzione $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ è lipschitziana sia su I_1 che su I_2 , allora sarà lipschitziana su tutto I .

Dimostrazione.

Consideriamo due punti x_1 e x_2 tali che:

$$x_1, x_2 \in I_1$$

\(\vee\)

$$x_1, x_2 \in I_2$$

allora la disuguaglianza $|f'(x_2) - f'(x_1)| \leq L \cdot |x_2 - x_1|$ è verificata dal momento che essa è verificata per qualsiasi punto $x_1, x_2 \in I_1 \vee x_1, x_2 \in I_2$.

e invece i due punti x_1 e x_2 sono tali che

$$x_1 \in I_1 \not\ni x_2$$

e

$$x_1 \notin I_2 \ni x_2$$

Allora $x_1 \leq b(I_1) \leq x_2$ e poiché $x_2 \in I_2$ allora $a(I_2) \leq x_2$ Poiché abbiamo necessariamente $a(I_2) \leq b(I_1)$ perché altrimenti I risulterebbe disgiunto allora abbiamo:

$$x_1 \leq a(I_2) \leq b(I_1) \leq x_2$$

Poniamo

$$x' \in I_1 \cap I_2$$

allora dal momento che $x_1 \in I_1$ e $x' \in I_1$

$$\exists L_1 \quad \text{tale che} \quad |f(x') - f(x_1)| \leq L_1 \cdot |x' - x_1|$$

e dal momento che $x' \in I_2$ e $x_2 \in I_2$

$$\exists L_2 \quad \text{tale che} \quad |f(x_2) - f(x')| \leq L_2 \cdot |x_2 - x'|$$

allora possiamo dire

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq |f(x_2) - f(x')| + |f(x') - f(x_1)| \leq L_2 \cdot |x_2 - x'| + L_1 \cdot |x' - x_1|$$

Sia $L = \max(L_1, L_2)$ allora possiamo scrivere

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq |f(x_2) - f(x')| + |f(x') - f(x_1)| \leq L \cdot (|x_2 - x'| + |x' - x_1|)$$

Da cui

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq L \cdot |x_2 - x_1|$$

La funzione $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ è quindi lipschitziana. \square

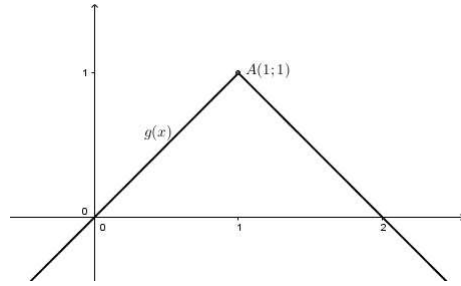
Possiamo osservare quindi che una funzione $f : I[a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ che presenta un punto angoloso in $x_P \in I$ e lipschitziana sia nell'intervallo $[a; x_P]$ sia nell'intervallo $[x_P; b]$, è lipschitziana in tutto I infatti il fatto che $f'_-(x_P) \neq f'_+(x_P)$ non influisce sulla lipschitzianeità della funzione.

Esempi

Consideriamo le funzioni:

$$\begin{aligned} g(x) &= -|x - 1| + 1 \\ h(x) &= -\sqrt[3]{(x - 1)^2} + 1 \\ i(x) &= \sqrt[3]{x - 1} + 1 \end{aligned}$$

La funzione $g(x)$ ha grafico:



La sua derivata è pari a:

$$g'(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 1 \\ 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

Possiamo notare che la funzione presenta un punto di non derivabilità in $x = 1$ infatti

$$g'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} -1 = -1$$

$$g'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 1 = 1$$

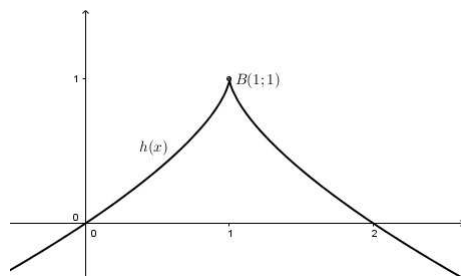
Il punto $A(1;1)$ è quindi un punto angoloso.

La funzione $g(x) : I_1]-\infty; 1] \rightarrow \mathbb{R}$, avendo derivata prima $g'(x) = -1$ è derivabile in $]-\infty; 1[$ e ha derivata limitata in $]-\infty; 1[$. Perciò, per il teorema 1, è lipschitziana.

Allo stesso modo la funzione $g(x) : I_2]1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, avendo derivata prima $g'(x) = 1$ è derivabile in $]1; +\infty[$ e ha derivata limitata in $]1; +\infty[$. Perciò, per il teorema 1, è lipschitziana.

La funzione $g(x)$ è quindi lipschitziana sia in I_1 sia in I_2 , ed essendo $I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$, allora per il teorema 2 la funzione $g(x)$ è lipschitziana nell'intervallo $I]-\infty; +\infty[$

La funzione $h(x) = -\sqrt[3]{(x-1)^2} + 1$ ha invece grafico:



La derivata di $h(x)$ è pari a:

$$h'(x) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x-1}}$$

Possiamo notare che anche questa funzione presenta un punto di non derivabilità in $x = 1$, infatti

$$h'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} -\frac{2}{3\sqrt[3]{x-1}} = -\frac{2}{3 \cdot 0^-} = +\infty$$

$$h'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} -\frac{2}{3\sqrt[3]{x-1}} = -\frac{2}{3 \cdot 0^+} = -\infty$$

La funzione $h(x)$ presenta quindi una cuspide nel punto $B(1; 1)$

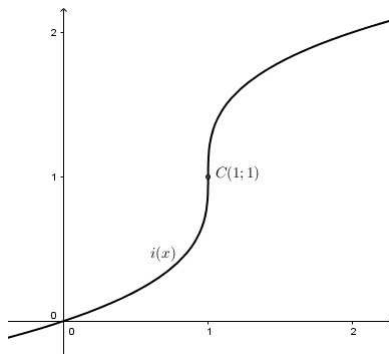
La funzione $h(x) : I_1]-\infty; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile in $] -\infty; 1[$ ma la sua derivata non è limitata in tutti i punti di $] -\infty; 1[$, infatti, come abbiamo appena dimostrato,

$$h'_-(1) = +\infty.$$

Allo stesso modo, la funzione $h(x) : I_2]1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile in $]1; +\infty[$ ma la sua derivata non è limitata in tutti i punti di $]1; +\infty[$, infatti, come abbiamo appena dimostrato, $h'_+(1) = -\infty$.

La funzione $h(x)$ quindi, non essendo lipschitziana ne su I_1 ne su I_2 , non soddisfa le ipotesi del teorema 2 e perciò non è lipschitziana nell'intervallo $I]-\infty; +\infty[$.

Infine la funzione $i(x) = \sqrt[3]{x-1} + 1$ ha grafico:



La derivata di $i(x)$ è pari a:

$$i'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}$$

Possiamo notare che la funzione presenta un punti di non derivabilità in $x = 1$ infatti

$$i'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}} = \frac{1}{3 \cdot 0^+} = +\infty$$

$$i'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}} = \frac{1}{3 \cdot 0^+} = +\infty$$

La funzione $i(x)$ presenta quindi un flesso a tangente verticale nel punto $C(1; 1)$.

La funzione $i(x) : I_1]-\infty; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile in $] -\infty; 1[$ ma la sua derivata $i'(x)$ non è limitata in tutti i punti di $] -\infty; 1[$ infatti, come abbiamo appena dimostrato, $i'_-(1) = +\infty$.

Allo stesso modo la funzione $i(x) : I_2]1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile in $]1; +\infty[$ ma la sua derivata $i'(x)$ non è limitata in tutti i punti appartenenti all'intervallo $]1; +\infty[$ infatti, come abbiamo appena dimostrato, $i'_+(1) = +\infty$.

La funzione $i(x)$ quindi, non essendo lipschitziana ne su I_1 ne su I_2 , non soddisfa le ipotesi del teorema 2 e perciò non è lipschitziana nell'intervallo $I]-\infty; +\infty[$.

Quindi nonostante tutte e tre funzioni presentino un punto di non derivabilità in $x = 1$, solo la funzione $g(x)$, dove questo punto è un punto angoloso, è lipschitziana.

La funzione di carica e scarica di un circuito RL quindi può essere definita lipschitziana nonostante presenti dei punti angolosi, punti di non derivabilità. Cerchiamo quindi la costante di Lipschitz della funzione.

Possiamo notare dal grafico che in ciascun ramo di carica il valore assoluto del coefficiente angolare della retta tangente alla funzione in un suo punto è massimo nel punto di minimo m_n in cui inizia tale ramo.

Allo stesso modo, in ciascun ramo di scarica il valore assoluto del coefficiente angolare della retta tangente alla funzione in un suo punto è massimo nel punto di massimo M_n in cui inizia tale ramo.

Dal grafico si può inoltre vedere come il valore assoluto delle derivate destre a ciascun punto di minimo $|f'_+(m_n)|$ diminuisca man mano che si prosegue nel verso dell'asse x . Analogamente il valore assoluto delle derivate destre a ciascun punto di massimo $|f'_+(M_n)|$ diminuisce man mano che si prosegue nel verso dell'asse x .

Il valore assoluto del coefficiente angolare massimo delle tangenti ai rami di carica è quindi pari alla derivata della funzione in $O(0; 0)$. Il valore assoluto del coefficiente angolare massimo delle tangenti ai rami di scarica è invece pari alla derivata destra della funzione in $M_1(5\tau; (1 - e^{-5}))$. Le confrontiamo per stabilire quale delle due sia maggiore:

$$|f'(0)| = \left| \frac{V_0}{\tau e^{\frac{0}{\tau}}} \right| = \left| \frac{V_0}{\tau \cdot 1} \right| = \frac{V_0}{\tau}$$

$$|f'_+(5\tau)| = \left| -\frac{V_0}{\tau} e^{\frac{5\tau}{\tau} + \ln(e^5 - 1)} \right| = \left| -\frac{V_0}{\tau} e^{-5 + \ln(e^5 - 1)} \right| = \left| -\frac{V_0}{\tau} e^{\ln(1 - e^{-5})} \right| = (1 - e^{-5}) \cdot \frac{V_0}{\tau}$$

Dal momento che $1 - e^{-5} < 1$ la derivata risulta massima nel punto $O(0; 0)$ e quindi

$$L = \frac{V_0}{\tau}$$

7 Conclusione

Nel nostro lavoro siamo partiti dalle classiche funzioni di carica e scarica di un circuito RL e ci siamo resi conto che, considerando un impulso pari a 5τ , esse presentano un punto di discontinuità in $x = 5\tau$: abbiamo quindi cercato di trovare una soluzione a questo problema e ci siamo chiesti se ciò si ripresentasse anche nelle cariche/scariche successive. Abbiamo quindi costruito una funzione che possa descrivere una carica/scarica n e abbiamo notato alcune particolarità dei massimi e dei minimi di questa funzione. Infine abbiamo notato che la funzione era lipschitziana e lo abbiamo dimostrato sfruttando delle caratteristiche tipiche di questo tipo di funzioni.

Questo lavoro, nonostante sia stato molto impegnativo, ci ha permesso di analizzare e approfondire alcuni argomenti e capire la mentalità necessaria in un ragionamento matematico, dandomi anche la possibilità di avvicinarmi al mondo dei miei prossimi studi.

8 Bibliografia e sitografia

- J.WALKER *Dalla meccanica alla fisica moderna*, Milano-Torino, Pearson Italia, 2014, vol. 3.
- L. LECCI, *www.matematicaescuola.it*.