LOGARITMI DEI COMPLESSI

ISISS Marco Casagrande, Pieve di Soligo
Liceo Scientifico, Anno Scolastico 2015-2016

tesina di:

CHIARA CARNIEL

1 Introduzione

Fin dai primissimi anni di studio, l'apprendimento della matematica risulta legato alla memorizzazione di molteplici regole e procedimenti che spesso vengono assimilati dagli alunni senza che essi ricevano una giustificazione o dimostrazione esauriente della motivazione per cui vengono applicati.
Così gli studenti apprendono che non è possibile dividere per zero, estrarre la radice di un numero negativo, calcolare il logaritmo di un numero negativo e così via.
In particolare nell'ambito dell'Analisi, è noto che la funzione esponenziale $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$ è definita solo nel caso in cui la base a sia positiva; parimenti la sua inversa, la funzione logaritmica $f(x) = \log_a(x)$, è definita solamente quando l'argomento è positivo e quando $a > 0 \wedge a \neq 1$.
Per comprendere la motivazione alla base di queste condizioni è necessario riflettere sulla funzione esponenziale e più in generale sul concetto di elevamento a potenza.
Sappiamo innanzitutto che un qualsiasi numero negativo elevato a un esponente pari, darà come risultato un numero positivo; quindi esistono sempre due numeri opposti che elevati a esponente pari danno il medesimo risultato.
Veniamo ora alla funzione esponenziale: se ammettessimo la possibilità di considerare anche potenze con base negativa, si presenterebbero dei casi in cui il grafico della funzione è rappresentato da una distribuzione discontinua di punti. Analizziamo l'esempio di una funzione di questo tipo: $f(x) = (-3)^x$.

$$f(1) = -3 \qquad f(2) = 9 \qquad f(3) = -27$$

Inoltre una funzione di questo tipo, non potrà mai essere calcolata per valori razionali con un numero pari al denominatore infatti:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{-3} \notin \mathbb{R}$$

In generale considerare potenze con base negativa porta ad ottenere risultati ambigui e contraddittori come nel caso seguente dove la base è la stessa e così l'esponente infatti $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$; ci aspettiamo quindi di ottenere lo stesso risultato:

$$(-4)^{\frac{4}{8}} = (-4)^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt[8]{(-4)^4} = \sqrt[2]{-4}$$

ma evidentemente $\sqrt[8]{(-4)^4} = 2$ mentre $\sqrt[2]{-4} \notin \mathbb{R}$ quindi le due potenze sembrano uguali ma in realtà non sono nemmeno definite nello stesso insieme numerico.
Anche in questo caso abbiamo due potenze con base e esponente uguali:

$$(-8)^{\frac{2}{6}} = (-8)^{\frac{1}{3}}$$

Tuttavia perveniamo a due risultati diversi:

$$\sqrt[6]{(-8)^2} \neq \sqrt[3]{(-8)}$$

$$2 \neq -2$$

La scelta di considerare solo esponenziali con base positiva è comunque puramente convenzionale, e nasce dall'esigenza di avere funzioni del tipo $y = a^x$ con $x \in \mathbb{R}$ semplici da studiare e da rappresentare, ma che soprattutto non presentino tutte le contraddizioni e i casi di ambiguità sopra descritti. Si sceglie inoltre di considerare solamente esponenziali con base positiva e diversa da 1 in quanto $f(x) = 1^x$ è una funzione costante.
In generale il logaritmo del tipo $\log_a(b)$ è definito per $a > 0, a \neq 1$ e $b > 0$. Alla luce delle considerazioni fatte riguardo alla funzione esponenziale, il motivo che ci spinge a porre queste condizioni appare evidente se si ricorda che la funzione logaritmica è l'inversa dell'esponenziale.

Finora la nostra riflessione si è concentrata su funzioni definite all'interno dell'insieme dei numeri reali cioè $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ma spingendosi oltre è possibile considerare esponenziali e logaritmi all'interno del più ampio insieme dei complessi e lo scopo di questo articolo è proprio quello di cercare una definizione per potenze e logaritmi complessi al fine ampliare le possibilità di calcolo tradizionali; inoltre la trattazione verterà sulle proprietà di queste operazioni e verranno analizzate le differenze con le medesime nell'insieme $\mathbb{R}$.
Il ragionamento è incentrato in particolar modo sulla definizione di logaritmo complesso dalla quale partirà la nostra riflessione, e sulla quale baseremo la definizione di potenza complessa.

2 Logaritmi complessi

Innanzitutto consideriamo un numero complesso $z = |z|e^{\imath \cdot arg(z)}$ dove con $|z|$ indica il modulo e $\arg(z)$ l'argomento; definiremo quindi il logaritmo naturale $\ln(z)$ un numero complesso tale che:

$$e^{\ln(z)} = z$$

e, considerando la definizione precedente di z, otteniamo:

$$e^{\ln(z)} = |z|e^{\imath \cdot arg(z)}$$

in altri termini:

$$e^{\Re \ln(z)} e^{\imath \Im \ln(z)} = |z|e^{\imath \cdot arg(z)}$$

ove con $\Re z$ si intende la parte reale di z e con $\Im z$ la sua parte immaginaria.
Pertanto avremo:

$$\begin{cases} e^{\Re \ln(z)} = & |z| \\ e^{\Im \ln(z)} = & e^{\imath \cdot arg(z)} \end{cases}$$

che equivale a:

$$\begin{cases} \Re \ln(z) = & \ln|z| \\ \Im \ln(z) = & \imath \cdot arg(z) \end{cases}$$

Quindi, essendo $\ln(z) = \Re \log(z) + \Im \ln(z)$, la formulazione finale risulta essere:

$$\ln(z) = \ln|z| + \imath \cdot arg(z)$$

Secondo questa definizione il logaritmo complesso è definito in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ infatti se volessimo calcolare $\ln(0 + 0\imath)$ avremo:

$$\ln(0 + 0\imath) = \ln(0) + \imath \arctan\left(\frac{0}{0}\right)$$

Evidentemente $\ln(0)$ non è definito e $\arctan\left(\frac{0}{0}\right)$ è indeterminata.

Notiamo che ciascuna determinazione assume infiniti valori a causa della periodicità dell'$arg(z)$; definiremo quindi logaritmo principale il valore del logaritmo complesso calcolato considerando quello che convenzionalmente viene identificato come argomento principale $\arg(z)$ con $z = a + \imath b$, cioè all'interno dell'intervallo $[-\pi; \pi]$:

$$\arg(z) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & se \quad a = 0 \ \wedge \ b > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & se \quad a = 0 \ \wedge \ b < 0 \\ non \quad definito & se \quad a = 0 \ \wedge \ b = 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) & se \quad a > 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \quad + \pi & se \quad a < 0 \ \wedge \ b \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \quad - \pi & se \quad a < 0 \ \wedge \ b < 0 \end{cases}$$

Esempio:
Analizziamo ora un esempio numerico e calcoliamo il logaritmo naturale di $z = 1 + \imath$:

$$\ln(1 + \imath) = \ln(\sqrt{2}) + \imath \arctan(1)$$

$$\ln(1 + \imath) = \frac{1}{2}\ln(2) + \imath\left(\frac{\pi}{4} + 2\kappa\pi\right)$$

Il logaritmo è quindi periodico di $2\kappa\pi$ con $\kappa \in \mathbb{Z}$.
Si può dimostrare che calcolando il logaritmo di un numero reale tramite la formula precedentemente determinata, si ottiene il medesimo risultato che si avrebbe utilizzando il metodo di calcolo tradizionale.

Esempio:
Calcoliamo ora a titolo di esempio il logaritmo di 2 pensandolo come $\ln(2 + 0\imath)$:

$$\ln(2 + 0\imath) = \ln(2) + \imath \arctan\left(\frac{0}{2}\right)$$

Otteniamo:

$$\ln(2) = \ln(2) + \imath(0 + 2\kappa\pi)$$

Calcolando l'argomento principale di $z = 2 + 0\imath$ troviamo che il valore coincide con quello del logaritmo reale.

$$\ln(2) = \ln(2)$$

In definitiva il logaritmo complesso può essere considerato una generalizzazione del logaritmo reale anche se, come abbiamo visto, $\ln(z)$ con $z \in \mathbb{C}$ ha infinite soluzioni con periodicità $2\kappa\pi$ mentre se $z \in \mathbb{R}, z > 0$, il logaritmo ha un unico valore.

Esempio:
Poste queste premesse, è ora possibile calcolare il logaritmo naturale di un numero reale negativo, per esempio pensiamo $\ln(-1)$ come $\ln(-1 + 0\imath)$:

$$\ln(-1 + 0\imath) = \ln(1) + \imath\left(\arctan\left(\frac{0}{-1}\right)\right)$$

Quindi:

$$\ln(-1 + 0\imath) = \imath(\pi + 2\kappa\pi)$$

3 Proprietà dei logaritmi complessi

Verificheremo ora che il logaritmo complesso possiede le stesse proprietà del corrispettivo reale.

3.1 Logaritmo della potenza

Consideriamo il logaritmo complesso $\ln(z) = w \to z = e^w$, ponendo $z = e^w$ eleviamo entrambi i membri all'esponente n:

$$z^n = (e^w)^n$$

$$z^n = e^{n \cdot w}$$

$$\ln(z^n) = n \cdot w$$

Essendo $\ln(z) = w$ otteniamo:

$$n \ln(z) = \ln(z^n)$$

Esempio:
Calcoliamo a titolo di esempio $\ln\left((2+\imath)^{3-\imath}\right)$:

$$\ln\left((2+\imath)^{3-\imath}\right) = (3-\imath)\ln(2+\imath)$$

$$\ln\left((2+\imath)^{3-\imath}\right) = (3-\imath)\left(\ln(\sqrt{5}) + \imath\left(\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + 2\kappa\pi\right)\right)$$

3.2 Proprietà del prodotto e del rapporto

Sappiamo che per i logaritmi reali vale $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$ con $a > 0 \wedge b > 0$. Consideriamo ora il logaritmo complesso $\ln(z) = w \to z = e^w$, avremo:

$$\log(xy) = \log(x) + \log(y)$$

$$e^{\log(xy)} = e^{\log(x)+\log(y)}$$

$$e^{\log(xy)} = e^{\log(x)} \cdot e^{\log(y)}$$

Otteniamo quindi un'identità:

$$x \cdot y = x \cdot y$$

Analogamente dimostriamo che se $\ln(z) = w \to z = e^w$ con $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, abbiamo:

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$$

$$e^{\ln\left(\frac{x}{y}\right)} = e^{\ln(x)-\ln(y)}$$

$$e^{\ln\left(\frac{x}{y}\right)} = \frac{e^{\ln(x)}}{e^{\ln(y)}}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{x}{y}$$

Esempio:
Calcoliamo ora $\ln(0 + 2\imath)$:

$$\ln(0 + 2\imath) = \ln(2) + \imath\left(\frac{\pi}{2} + 2\kappa\pi\right)$$

Se invece lo pensiamo come:

$$\ln(2\imath) = \ln(2) + \ln(\imath)$$

$$\ln(2\imath) = \ln(2) + \imath\left(\frac{\pi}{2} + 2\kappa\pi\right)$$

Otteniamo quindi lo stesso risultato.

Esempio:
Determiniamo $\ln\left(0 + \frac{\imath}{2}\right)$:

$$\ln\left(0 + \frac{\imath}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \imath\left(\frac{\pi}{2} + 2\kappa\pi\right)$$

$$\ln\left(0 + \frac{\imath}{2}\right) = \ln(1) - \ln(2) + \imath\left(\frac{\pi}{2} + 2\kappa\pi\right)$$

$$\ln\left(0 + \frac{\imath}{2}\right) = \imath\left(\frac{\pi}{2} + 2\kappa\pi\right) - \ln(2)$$

Se invece scriviamo:

$$\ln\left(\frac{\imath}{2}\right) = \ln(\imath) - \ln(2)$$

$$\ln\left(\frac{\imath}{2}\right) = \imath\left(\frac{\pi}{2} + 2\kappa\pi\right) - \ln(2)$$

Evidentemente i risultati coincidono.

3.3 Proprietà del cambio di base

Innanzitutto sappiamo che è sempre possibile effettuare un cambio di base per i logaritmi reali secondo la regola $\log_a(b) = \dfrac{\ln(b)}{\ln(a)}$; nel caso complesso possiamo agire in modo analogo, infatti se consideriamo $\log_x(y) = z$ con $y \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ abbiamo:

$$\log_x(y) = z \qquad \longrightarrow \qquad y = x^z$$

$$x^z = e^{\ln(x^z)} = e^{z\ln(x)}$$

$$\ln(y) = z\ln(x) \Rightarrow z = \frac{\ln(y)}{\ln(x)}$$

Quindi ritroviamo:

$$\log_x(y) = \frac{\ln(y)}{\ln(x)}$$

Grazie a questa proprietà è possibile calcolare logaritmi complessi in base complessa:

Esempio:

$$\log_{1+\imath}(2-\imath) = \frac{\ln(2-\imath)}{\ln(1+\imath)}$$

$$\log_{1+\imath}(2-\imath) = \frac{\ln(\sqrt{5}) + \imath(\arctan\left(\frac{-1}{2}\right) + 2\kappa\pi)}{\ln(\sqrt{2}) + \imath(\arctan\left(\frac{1}{1}\right) + 2\lambda\pi)}$$

Notiamo che il logaritmo in questo caso ha infinite soluzioni che dipendono da due costanti $\kappa \in \mathbb{Z}$ *e* $\lambda \in \mathbb{Z}$.

Esempio:
Calcoliamo ora $\log_{-1}(-3)$ con base e argomento negativi, pensandolo come $\log_{-1+0\imath}(-3+0\imath)$:

$$\log_{-1+0\imath}(-3+0\imath) = \frac{\ln(-1+0\imath)}{\ln(-3+0\imath)}$$

$$\log_{-1+0\imath}(-3+0\imath) = \frac{\imath(\pi+2\kappa\pi)}{\ln(3)+\imath(\pi+2\lambda\pi)}$$

4 Potenze complesse

4.1 Prerequisiti: potenza e forma esponenziale di un complesso

Sappiamo che è possibile calcolare la potenza ennesima di un numero complesso z^n dove $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e $n \in \mathbb{Z}^+$ tramite la formula di De Moivre:

$$(\rho(\cos\Theta + \imath\sin\Theta))^n = \rho^n(\cos n\Theta + \imath \sin n\Theta)$$

Dove con ρ indichiamo il modulo del numero complesso, e con Θ il suo argomento. Date le condizioni poste, questa formula limita il calcolo a potenze con esponente intero positivo e non consente di determinare potenze con $n \in \mathbb{C}$
Ricordiamo inoltre che è possibile esprimere un numero complesso in forma esponenziale come:

$$e^{\alpha\imath} = \cos\alpha + \imath\sin\alpha \qquad \text{e} \qquad e^{-\alpha\imath} = \cos\alpha - \imath\sin\alpha$$

Dove e indica il numero di Nepero.

4.2 Potenze con esponente complesso

Per estendere il calcolo a potenze con esponente complesso ci serviremo della definizione di logaritmo complesso precedentemente analizzata.
Consideriamo un numero z^w dove $z, w \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ e scriviamolo come $(a+\imath b)^{(x+\imath y)}$; sapendo che $z^w = e^{\ln(z)^w}$ avremo:

$$(a+\imath b)^{(x+\imath y)} = e^{\ln(a+\imath b)^{(x+\imath y)}}$$

Per la proprietà del logaritmo di una potenza abbiamo:

$$(a+\imath b)^{(x+\imath y)} = e^{(x+\imath y)\ln(a+\imath b)}$$

Esempio:
Calcoliamo ora $(1+2\imath)^{3+\imath}$:

$$(1+2\imath)^{3+\imath} = e^{(3+\imath)\ln(1+2\imath)}$$

$$(1+2\imath)^{3+\imath} = e^{(3+\imath)(\ln(\sqrt{5})+\imath(\arctan(2)+2\kappa\pi))}$$

Notiamo che esistono infinite determinazioni della potenza al variare della costante $\kappa \in \mathbb{Z}$.

Esempio:
Determiniamo $(-2)^3$ pensandolo come $(-2+0\imath)^{(3+0\imath)}$:

$$(-2+0\imath)^{(3+0\imath)} = e^{(3+0\imath)\ln(-2+0\imath)}$$

$$(-2+0\imath)^{(3+0\imath)} = e^{(3+0\imath)(\ln(2)+\imath(\pi+2\kappa\pi))}$$

Ponendo $\kappa = 0$ consideriamo il logaritmo principale:

$$(-2)^3 = e^{3\ln(2)+3\imath\pi}$$
$$(-2)^3 = e^{\ln(8)+3\imath\pi}$$
$$(-2)^3 = 8 \cdot (\cos\pi + \imath\sin\pi)^3$$
$$(-2)^3 = 8 \cdot (-1)^3 = -8$$

La scelta di κ è arbitraria dato che otterremmo il medesimo risultato per qualunque valore della costante.

5 Considerazioni conclusive

Com'è noto la definizione di unità immaginaria è totalmente arbitraria e nasce dall'esigenza di estrarre la radice di numeri negativi e quindi di ampliare le possibilità di calcolo:

$$\sqrt{-1} = \pm\imath \Leftrightarrow \imath^2 = -1$$

Quest'operazione appare molto semplice e scontata ma se volessimo sviluppare il medesimo ragionamento e dire, per esempio, che $\frac{1}{0} = \phi$, perverremmo con facilità alla conclusione che questa definizione porta a evidenti contraddizioni.
Se infatti calcolassimo il reciproco di ϕ, definito come numero che moltiplicato per ϕ dà 1, avremo:

$$\frac{1}{\phi} = \frac{0}{1}$$

ma:

$$\frac{1}{\phi} \cdot \phi = 0 \cdot \frac{1}{0} \neq 1$$

contrariamente alla regola secondo cui qualsiasi numero moltiplicato per 0 dà risultato nullo.
Al contrario, basandosi sulla definizione di unità immaginaria, è possibile eseguire tutte le operazioni tradizionali e inoltre le relative proprietà rimangono inalterate ed è proprio per questo motivo che la suddetta definizione e in generale l'insieme dei complessi, risulta coerente.
Ricordiamo comunque che i complessi possiedono delle peculiari caratteristiche come il fatto di non essere ordinabili in quanto definiti da una coppia di numeri reali; proprio in virtù di questo fatto è possibile rappresentarli in un sistema di riferimento cartesiano detto piano di Gauss.
Come abbiamo visto nei paragrafi precedenti, le definizioni di potenza e logaritmo complessi risultano essere generalizzazioni dei corrispettivi reali; in particolare abbiamo dimostrato che calcolare potenze e logaritmi di numeri reali pensandoli come complessi con parte immaginaria nulla, ci porta agli stessi risultati che otterremmo con il metodo di calcolo tradizionale. Inoltre la definizione di logaritmo complesso mantiene le stesse proprietà del logaritmo reale.
Nondimeno è interessante notare come alcuni oggetti matematici che all'apparenza risultano completamente slegati da qualsiasi quantità reale, corrispondano a quantità note:

$$\imath^\imath = e^{ln\imath^\imath} = e^{\imath\ln\imath} \Rightarrow e^{\imath\left(\imath\left(\frac{\pi}{2}+2\kappa\pi\right)\right)}$$
$$\Rightarrow e^{\imath^2\left(\frac{\pi}{2}+2\kappa\pi\right)} = e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2\kappa\pi\right)}$$

In particolare per $\kappa = 1$ abbiamo: $\imath^\imath = e^{-\frac{\pi}{2}}$.
Infine ricordiamo che a partire dalla forma esponenziale di un complesso, è possibile arrivare alla cosiddetta identità di Eulero, ritenuta una delle più affascinanti della matematica:

$$e^{\imath\pi} + 1 = 0$$

Come si può notare quest'identità collega alcune delle costanti matematiche più importanti: 0, l'elemento neutro dell'addizione; 1, l'elemento neutro della moltiplicazione; π, il valore del rapporto tra circonferenza e relativo diametro in un cerchio, costante fondamentale in trigonometria; e, costante di Nepero, la base dei logaritmi naturali; e infine $\imath$, unità immaginaria.
Secondo la formula di Eulero possiamo scrivere:

$$e^{\imath\pi} = \cos\pi + \imath\sin\pi$$

$$e^{\imath\pi} = -1 + 0$$

per cui ritroviamo:

$$e^{\imath\pi} = -1 \Leftrightarrow e^{\imath\pi} + 1 = 0$$

Difficilmente è possibile figurarsi un oggetto come $e^{\imath\pi}$, dove una quantità irrazionale è elevata a un esponente irrazionale complesso, e ancor più paradossale è il fatto che questa quantità valga -1.
Tuttavia questa formulazione rende evidente il fatto che quantità definite astratte, irrazionali, o addirittura "immaginarie", sono in realtà legate da relazioni precise, ed è forse l'identità che meglio riesce a rendere l'essenza più intima della matematica, che pur fondata su basi logiche rigorosamente definite, possiede allo stesso tempo un'innegabile eleganza.