Liceo Scientifico Marco Casagrande

Matteo Spadetto
5° B

Esame di Stato 2013/2014

La sezione aurea, ovvero l’armonia

Indice

1 - Prefazione

Come ci fecero notare Kant e gli Idealisti, siamo noi esseri umani a creare la realtà. Il modo con cui noi concepiamo la realtà è una nostra produzione. Il mondo reale coincide con il modo con cui l'umanità lo vuole intendere.
Tale concezione dell'universo è stata concepita per la prima volta dall'illuminista Immanuel Kant (1724-1804), considerato l'anticipatore dell'Idealismo. Come si è visto, questi operò nel pensiero umano una 'rivoluzione copernicana'. Kant fu infatti il primo a ipotizzare che non è la mente umana a modellarsi passivamente sulla realtà durante la conoscenza di quest'ultima, ma bensì la realtà stessa ad essere plasmata dalle attività cognitive umane. Portata alle estreme conseguenze da Fichte ed Hegel, tale concezione sarà alla base della corrente filosofica dell'Idealismo, la quale concepisce la realtà come continuo attuarsi del pensiero, come suo libero svolgimento creativo. È dunque l'umanità, secondo l'Idealismo, a creare la realtà sulla base della propria mentalità: il mondo viene formandosi sulla cultura umana, sulle modalità con cui essa si pone nei confronti del mondo stesso.
E generalmente l'umanità nel corso della storia ha voluto concepire la realtà attraverso un ordine, attraverso un'armonia. È come se l'uomo, nel mezzo del divenire, abbia avuto bisogno di vedere un ordine nell'universo, di *creare* un ordine, un *logos* (come lo chiamavano gli Stoici), una certezza, un determinismo. In effetti, è in un mondo ordinato che l'uomo in genere riesce a vivere sereno e fiducioso. La filosofia nel mondo occidentale nasceva anzitutto per questo motivo, per vivere bene, per emanciparsi dai turbamenti dell'anima (se vengono prese in analisi le filosofie ellenistiche), per ricamare nella natura un ordine in cui vivere con serenità. L'uomo, inteso sia come individuo che come umanità, ha avuto in un certo senso bisogno di provare fiducia ponendosi di fronte al cosmo (ovvero ordine, appunto) in cui vive e per questo motivo, attraverso la sua filosofia, ha solitamente voluto descrivere il suo universo attraverso un ordine.
E poi con i secoli XVI e XVII veniva alla luce la scienza moderna, che si poneva come una "più efficiente" continuazione della filosofia classica. I suoi artefici si ritenevano anch'essi dei pensatori del tutto uguali ai filosofi delle epoche precedenti, desiderosi di portare avanti la conoscenza filosofica. Per rendersi conto di questo sia sufficiente il fatto che Newton, nei suoi scritti, era solito definire il suo campo di studi "filosofia naturale" (termine che oggi si traduce con "fisica"), palesando in questo modo la sua volontà di porsi non come "rivoluzionario", bensì come umile continuatore della conoscenza della epoche passate, come egli stesso esprime nella celebre sentenza:

> *"Se ho visto più lontano è perché stavo sulle spalle di giganti."*[1]

È vero, nella stragrande maggioranza dei casi il rapporto di questi nuovi studiosi della natura delle cose con la filosofia precedente non fu certamente il più felice: si pensi a Copernico, che demolì la concezione geocentrica dell'universo, rimasta intatta e indubitata fin dai tempi di Aristotele, si pensi poi a Cartesio, che decise di dubitare di tutto il sapere costituitosi nella storia dell'uomo e di fondare dal nulla una nuova scienza... Sicuramente la rivoluzione scientifica si pose come "rivoluzione", appunto, nei confronti del sapere tramandato fino a quel periodo e non come normale continuazione delle ricerche scientifiche e filosofiche. Ma in ogni caso esiste comunque un particolare che accomuna i pensatori dei tempi antichi con quelli del Cinquecento e del Seicento (e in generale con tutti i ricercatori della storia dell'umanità), e cioè la volontà di dominare l'universo. Di porlo all'interno di un sistema logico, ordinato e il più possibile armonico. Che cos'era la scienza di Keplero, di Galileo, di Cartesio, di Pascal, di Newton e degli altri figli della rivoluzione scientifica, se non un nuovo sistema di filosofia naturale che si poneva comunque l'obiettivo di descrivere l'universo con logica, coerenza e bellezza?
Una bellezza che veniva gradualmente identificandosi con la descrizione dei fenomeni della natura attraverso la matematica. Una bellezza che veniva strutturata attraverso la più nobile e astratta ideazione della mente dell'uomo. Una bellezza che veniva a coincidere con la matematica. Se è

vero che, come dicevano gli idealisti, la realtà è una produzione dell'uomo, allora non c'è da stupirsi se questa realtà arrivò a fondersi con la matematica a tal punto da indurre Keplero, Cartesio, Spinoza e Newton a credere che le equazioni fossero realmente presenti nella natura, in attesa di essere scoperte.
Lo scopo di questo saggio è analizzare, se è veramente possibile, la bellezza della matematica, chiedersi in che cosa essa consista, e rendere manifesti i motivi che la rendono tanto bella alle menti di chi la sa apprezzare. Tale percorso si svolgerà anzitutto prendendo in considerazione alcuni esempi di equazioni, teoremi e proprietà matematiche che possono suscitare interesse e ammirazione, nonché stupore e incredulità, e ricavando da essi i motivi che in generale rendono la matematica una disciplina a cui competono la bellezza e l'armonia. In particolare sarà dedicata un'approfondita attenzione alla *sezione aurea*, concetto matematico da sempre associato al canone di bellezza da parte di matematici e artisti. In secondo luogo è contemplato il pensiero di alcuni fra i più prolifici pensatori che nel corso della storia hanno voluto descrivere l'universo con armonia, ordine e bellezza servendosi della matematica, che ritenevano presente nella natura. Il periodo più bello della storia dell'uomo, quello di Keplero e di Galileo, di Cartesio e di Spinoza, di Newton e di Leibniz, ossia il periodo della rivoluzione scientifica, permetterà di discutere il ruolo della matematica nei concetti di bellezza, di armonia e di ordine. Ciò sarà utile per indagare i motivi che spingevano i figli della rivoluzione scientifica ad associare la matematica a queste idee di *cosmos* e di bellezza. Parallelamente saranno esplicitati l'ordine e l'armonia che si possono percepire rileggendo la storia della cultura e del pensiero di alcuni periodi presi in analisi, della quale la filosofia è depositaria.
Nel corso del saggio la bellezza della matematica sarà anche filtrata attraverso alcuni concetti filosofici che si possono ritrovare al suo interno, come nel caso della dialettica idealista, attraverso la quale si può ritenere che la matematica si accresca, come si vedrà. Infine, se la matematica è davvero un'arte detentrice dei canoni di bellezza e di armonia, come era convinto il matematico inglese Godfrey Harold Hardy (1887-1966), allora sarà possibile confrontarla con le arti figurative, valutare in che modo la sezione aurea nel corso della storia si inserì nel mondo dell'architettura e persino analizzare che cosa una banalissima equazione possa avere in comune con la sinteticità dei versi di un poeta e con l'armonia delle statue di uno scultore classico.
Come commentò il filosofo Bertrand Russell:

> *"La matematica non solo possiede la verità, ma anche la suprema bellezza, una bellezza fredda e austera, come quella della scultura, senza attrattive per la parte più debole della nostra natura."*[2]

2 - Pitagora, i pitagorici e la bellezza dei numeri

La storia della filosofia, intesa come storia del pensiero umano, come progressiva evoluzione del modo di intendere la realtà da parte dell'umanità, fa notare agli uomini moderni una costante che più volte si impone nelle menti dei più grandi pensatori: la volontà di dominare l'universo. La natura in cui l'uomo si ritrova deve essere in qualche modo soggiogata al suo volere, deve sottostare alle leggi che lui le impone. L'uomo, in altre parole, ha da sempre manifestato questo desiderio di capire ciò che lo circonda, e, in questo senso, dominarlo. Perché conoscere vuol dire dominare, conoscere le leggi che governano la natura vuole dire fare propria la natura stessa, sottometterla al proprio volere. Perché, come ci hanno fatto notare gli idealisti, noi, conoscendo, creiamo. Creiamo la realtà in cui ci inseriamo e cerchiamo di spiegarla attraverso un modello che noi abbiamo inventato dal nulla, che noi stessi abbiamo voluto ritrovare nella realtà.
Questa grande volontà dell'uomo di soggiogare il mondo e avere il pieno controllo sulla realtà che lo circonda si esprime il più delle volte con l'elaborazione di complessi modelli filosofici o scientifici che hanno lo scopo di garantire il pieno controllo sull'universo, dotandolo di una razionalità che l'uomo possa essere in grado di prevedere e comprendere appieno. Tutto questo con la finalità ultima di garantirsi la pace e la serenità di chi è consapevole della realtà perfetta e dominata della cui esistenza è riuscito a convincersi.
Tra coloro che hanno ricercato regolarità nascoste nella complessità dell'universo percepito ci sono sicuramente i pitagorici, probabilmente i primi a porre un primo abbozzo alla concezione di ampia portata di un cosmo permeato di matematica e governato da essa. Una matematica intesa dunque come un dio, come *il* Dio, il quale, governando il cosmo, fa sì che esso sia tale e dominato da leggi che l'uomo può intendere. La storia della filosofia attribuisce questa concezione al filosofo e matematico greco Pitagora.
Prima di stabilirsi a Crotone e circondarsi di fedeli adepti, Pitagora, nato all'inizio del VI secolo a.C. sull'isola di Samo, situata presso la costa rivolta verso l'Egeo della penisola anatolica, ebbe probabilmente modo di viaggiare parecchio durante la sua giovinezza tra l'Egitto e la città di Babilonia, dove entrò in contatto con le dottrine numeriche che all'epoca stavano crescendo con grande fervore. Nelle mentalità egiziana e babilonese infatti la matematica era concepita come un mezzo concretamente utile alla vita pratica, destinato cioè al soddisfacimento di bisogni sostanzialmente pratici e sociali. Tuttavia, da tale concezione della matematica come mero e semplice strumento di pubblica utilità, il pensatore si distaccò presto.
Nel pensiero di Pitagora la matematica era qualcosa di superiore alla realtà di tutti i giorni. I numeri erano concepiti come entità astratte, dotate cioè di una propria esistenza autonoma dal mondo concreto. Pitagora e i pitagorici non erano scienziati nel vero significato del termine. Il concetto chiave del loro sapere era anzitutto questa concezione filosofica metafisica dei numeri. Essi permeavano ogni cosa, dalla natura a priori fino all'organizzazione sociale che si sono dati gli uomini. Essi si potevano dunque allo stesso tempo sia riscontrare nella concretezza fisica, sia ritenere enti astratti sui quali ogni singolo elemento della realtà si formava.
Furono i pitagorici i primi a fondere assieme teoria dei numeri, filosofia della vita e misticismo, ricavando da questo non solo un discreto sistema di conoscenze, che si può sicuramente definire alquanto originale e sviluppato in rapporto alla cultura dell'epoca, ma anche un vero e proprio stile di vita che, come aveva imposto il capostipite Pitagora, si doveva basare sulla sobrietà della vita e sulla dieta rigorosamente vegetariana. Il poeta latino Ovidio dedicò parte del XV e ultimo libro del suo poema epico mitologico in esametri, *Le metamorfosi*, alla figura del filosofo, celebrandone la grandezza d'ingegno e la frugalità delle abitudini e permettendogli di esporre per mezzo di un lungo monologo la teoria della metempsicosi, ossia della trasmigrazione delle anime immortali da un corpo all'altro dopo il decadimento fisico, la quale concezione rivestiva un ruolo di primo piano nell'originale misticismo sviluppato dai pitagorici. Ovidio si servì di questa concezione per dare fondamento teorico al concetto generale di 'metamorfosi', tema fondamentale dell'intero poema. Esaminando alcuni frammenti del passo citato è possibile ricavare alcuni fondamentali aspetti della

personalità di Pitagora, che questi volle diffondere tra la gente di Crotone e in particolare tra i suoi discepoli che condividevano con lui l'amore per il sapere. Ovviamente non è possibile stabilire con certezza se il personaggio di cui parla Ovidio coincida con la reale personalità storica di Pitagora, ma i critici letterari sono abbastanza fiduciosi nel sostenere che la descrizione fornita dal poeta latino si avvicina molto all'idea che la tradizione ci ha tramandato del pensatore.
Nel seguente frammento del monologo di Pitagora Ovidio offre una verosimile concezione che il matematico potesse avere della consumazione di animali:

"La terra vi fornisce a profusione ogni ben di dio per nutrirvi
e vi offre banchetti senza bisogno d'uccisioni e sangue.
Con la carne placano la fame gli animali e neppure tutti:
cavalli, greggi e armenti vivono d'erba.
Solo quelli d'indole feroce e selvatica,
le tigri d'Armenia, i collerici leoni
e i lupi, gli orsi gustano cibi lordi di sangue.
Ahimè, che delitto infame è ficcare visceri nei visceri,
impinguare un corpo ingordo rimpinzandolo con un altro corpo,
mantenersi in vita con la morte di un altro essere vivente!"[1]

Esponendo il fatto che persino alcune specie di animali, per quanto infime possano essere, non si abbassano al soddisfacimento della propria fame nutrendosi di carne, Pitagora viene a sostenere che è d'obbligo per l'umanità, per non essere da meno, darsi al vegetarianismo e abbandonare l'empia pratica, propria solamente delle creature *d'indole feroce e selvatica*, di *ficcare visceri nei visceri, impinguare un corpo con un altro corpo* (si notino le due ripetizioni espressive e patetiche), *mantenersi in vita con la morte [...]* (potente antitesi). Il vegetarianismo viene dunque a porsi pei pitagorici come una pratica necessaria, e il motivo di ciò viene annunciato nel successivo frammento proposto:

"E voi (tanta è nell'uomo la bramosia di cibi vietati)
osate cibarvene, genia di mortali? No, non fatelo,
vi supplico, ascoltate attentamente i miei ammonimenti,
e quando al vostro palato offrite membra di buoi sgozzati,
sappiate e abbiate coscienza che state mangiando i vostri coloni."[1]

Con la magistrale evocazione di un'immagine concreta e viva, il poeta, parlando sempre attraverso la bocca dell'amato pensatore, anticipa con tono profetico che la causa della necessità di tanto vegetarianismo risiede nella teoria della metempsicosi, la quale cosa viene esplicitata poco dopo:

"O stirpe sbigottita dal terrore di una morte gelida,
perché temete lo Stige, le tenebre, nomi privi di senso,
nutrimento di poeti, pericoli di un mondo immaginario?
I corpi, dissolti dalle fiamme del rogo o dai guasti del tempo,
non sono più in grado di soffrire, questo è certo.
Le anime invece non muoiono e sempre, lasciata l'antica sede
e accolte in un nuovo corpo, vi si insediano e continuano a vivere.
[...]
Tutto si evolve, nulla si distrugge. Lo spirito vaga
dall'uno all'altro e viceversa, impossessandosi del corpo
che capita, e dagli animali passa in corpi umani,
da noi negli animali, senza mai deperire nel tempo.
Come la cera duttile si plasma in nuovi aspetti,
non rimanendo qual era e senza conservare la stessa forma,

ma sempre cera è, così, vi dico, l'anima
è sempre la stessa, ma trasmigra in varie figure.
Dunque, perché la pietà non sia vinta dall'ingordigia del ventre,
vi ammonisco, evitate d'esiliare con strage nefanda l'anima
di chi può esservi parente, e che di sangue si alimenti il sangue."[1]

In tale frammento viene dunque annunciata la teoria della metempsicosi, concetto fondamentale della filosofia pitagorica, nonché dello stile di vita di tutti i pitagorici, in quanto principio logico da cui deriva il loro rifiuto di saziare la fame con la carne degli altri animali. La teoria della metempsicosi è una diretta conseguenza del rigido dualismo con cui i pitagorici tessevano la realtà che li circondava, e che aveva a che fare con qualunque aspetto di questa. Anche l'uomo è composto da due elementi contrapposti, ossia l'anima e il corpo. L'anima deve nel corso della vita separarsi dal corpo, purificarsi dai suoi impulsi irrazionali e dalle sue passioni attraverso il perseguimento di un'esistenza austera, fino a liberarsene del tutto attraverso la morte. Questa, secondo Pitagora, riguarda solo il corpo. L'anima, immortale, ad ogni morte torna ad incarnarsi, seguendo il destino che si è costruita durante la vita precedente: a seconda del livello di purificazione raggiunto, l'anima si può incarnare nell'animale più infimo come nell'uomo più illustre, avendo persino la possibilità di uscire dal ciclo delle reincarnazioni, come, secondo la tradizione, sarebbe accaduto a Pitagora.
È degna di nota la virtuosistica similitudine con cui Ovidio paragona l'anima alla *cera duttile*: entrambe sono in grado di mutare la loro forma pur mantenendosi comunque uguali a se stesse nel divenire. Della teoria della metempsicosi il poeta latino si serve infatti come principio teorico da cui derivare poco dopo, sempre servendosi delle parole di Pitagora, il concetto stesso di metamorfosi, chiave di lettura di tutto il poema. *Tutto si evolve, nulla si distrugge (omnia mutantur, nihil interit)*: è davvero stupefacente il messaggio di straordinaria modernità contenuto in queste parole (da notare il parallelismo). Esso pare un'anticipazione di circa diciassette secoli del *Principio di Lavoisier* (noto anche come *Principio di conservazione della massa*), formulato nel XVIII secolo dal "padre della chimica" Antoine Lavoisier, secondo cui in una reazione chimica si conservano le proprietà estensive della materia. Esso è meglio conosciuto con il seguente enunciato: *"In natura nulla si crea, nulla si distrugge, tutto si trasforma"*[2]. Si può sicuramente notare una qualche analogia tra tale sentenza formulata dal chimico francese e l'emistichio del poeta latino.
In verità, già nei filosofi pluralisti, e in particolare in Empedocle e Anassagora, si ritrovano importanti idee del tipo *"Nulla viene dal nulla"* e *"Nulla può diventare nulla"*, e concetti analoghi si ritrovano pure negli atomisti Leucippo e Democrito. A mio parere, desta sicuramente ammirazione, nonché fiducia nell'evoluzione del pensiero umano nel corso della storia, il persistere di certe idee a distanza di moltissimi secoli, o l'anticipazione di alcuni concetti che nell'epoca moderna hanno il privilegio di essere denominati "leggi" e di costituire dunque l'ossatura logica su cui si articola poi la scienza. Avevano ragione Galileo e Bacone quando definivano il metodo scientifico basandolo su un sapere che doveva necessariamente essere *cumulativo*. E aveva ragione Hegel quando strutturava il suo sistema filosofico su un pensiero che doveva diventare cosciente di sé ragionando su tutto il pensiero e su tutto il sapere che era stato precedentemente.
Chiudendo il breve excursus e ritornando a Pitagora e ai suoi fedeli discepoli, questi sono sicuramente ricordati anzitutto per il contributo che si presume abbiano apportato allo sviluppo della matematica, nonché per l'associazione di questa disciplina al già accennato concetto di "ordine", di cui si avrà modo di discutere più avanti. La tradizione attribuisce a Pitagora il famosissimo teorema che porta, per ovvi motivi, il suo nome, secondo il quale per un triangolo rettangolo l'area del quadrato di lato congruente all'ipotenusa è pari alla somma delle aree dei quadrati di lati rispettivamente congruenti ai cateti. Espresso attraverso un'equazione, detta f la lunghezza dell'ipotenusa e dette g e h le lunghezze dei cateti, si ha che $f^2 = g^2 + h^2$. Per quanto semplice possa essere, non si può negare che tale teorema (come, del resto, la stragrande maggioranza dei teoremi della matematica) sia detentore di una qualche idea di bellezza e di armonia, e tale "estetica" non gli appartiene solamente per la complessità dei ragionamenti che

possono esserci o non esserci stati alle sue spalle, ma per "l'universalità" che tale teorema racchiude. Questa semplice equazione in effetti, per la quale si possono potenzialmente offrire infinite dimostrazioni attraverso il rigoroso metodo deduttivo della geometria euclidea, vale universalmente per tutti i triangoli rettangoli. La matematica ama ragionare al generale, ama generalizzare le sue proposizioni, i suoi dogmi e i suoi teoremi il più possibile. Lo stesso teorema di Pitagora può essere generalizzato per i triangoli qualunque, può cioè essere posto come semplice caso particolare all'interno di un teorema più vasto che valga universalmente per un qualsivoglia triangolo. Ma di questo si parlerà più approfonditamente nel capitolo successivo.

Probabilmente il teorema di Pitagora era in verità già conosciuto secoli prima, forse non ancora come verità assoluta pei triangoli rettangoli, dai babilonesi e dagli egizi, i quali tuttavia, come già si è detto, non consideravano queste verità che la matematica offriva loro come qualche cosa di divino, ma come uno strumento socialmente utile nella vita pratica.

Furono i pitagorici i primi a considerare la matematica una sorta di divinità. Gli ionici Talete, Anassimandro e Anassimene avevano precedentemente fatto coincidere la ricerca della verità con l'analisi della verità sul piano "qualitativo". La verità giaceva cioè sugli aspetti qualitativi della realtà. La scuola pitagorica di Crotone intendeva invece la ricerca della realtà da un punto di vista "quantitativo". Ciò che accomuna tutte le cose è cioè il fatto che tutte sono misurabili e, in ultima analisi, riconducibili a numeri ed equazioni. Ogni singolo aspetto della realtà, da qualunque punto di vista – si considerino ad esempio l'ordine celeste, la musica e le stagioni – presenta secondo Pitagora e i suoi fedeli adepti una regolarità matematica. Dagli oggetti materiali come la Terra ai concetti astratti di giustizia e morale. La realtà non è dunque una qualità, un elemento, bensì il "numero". E non si tratta più di comprendere di che cosa sia fatto l'universo, quali elementi ogni ente abbia in comune, ma di comprendere e apprezzare (e venerare) l'ordine che la matematica genera imponendosi nella realtà. Viene alla luce per la prima volta l'idea di *cosmos*, ovvero la concezione secondo la quale nell'universo esista un'armonia, un ordine, una regolarità che si esprime attraverso realtà numeriche, e che si può comprendere attraverso lo studio della matematica, unica divinità pitagorica.

In ogni caso il fatto che i Pitagorici trovassero il mondo dei numeri affascinante non è poi così sorprendente. Esistono moltissime relazioni tra i numeri naturali che susciterebbero praticamente in chiunque stupore e ammirazione nei confronti del mondo astratto della matematica. Si consideri ad esempio il numero dei giorni che ci sono in un anno: *365*. Ebbene, si ha che tale numero è pari alla somma di tre quadrati consecutivi. In effetti $365 = 10^2 + 11^2 + 12^2$. Inoltre, vale che lo stesso numero è pari alla somma dei due quadrati seguenti, ovvero che $365 = 13^2 + 14^2$. Esistono poi i cosiddetti "numeri perfetti", numeri naturali che godono della proprietà di essere pari alla somma di tutti i rispettivi divisori, come ad esempio il *28*, tale che $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$. I numeri perfetti sono numeri relativamente 'rari' all'interno dell'insieme dei numeri naturali. Basti pensare che entro i primi diecimila numeri se ne ritrovano solamente quattro, e cioè *6*, *28*, *496*, *8218*. Attualmente se ne conoscono solamente 48, dei quali il maggiore, il *48*esimo, possiede 34.850.340 cifre, ma non si è ancora verificato se ne esistono degli altri tra questi stessi 48, in quanto non esiste una formula chiusa (come esiste invece pei numeri triangolari, esagonali e stellati) che permetta di determinare l'*n*esimo numero perfetto in funzione della sua 'posizione' *n*.

I primi a interessarsi a queste coinvolgenti proprietà dei numeri naturali furono proprio i Pitagorici. Esiste un teorema enunciato da Pitagora, e successivamente dimostrato da Euclide, secondo cui, dato un numero primo di Mersenne (ovvero un numero primo M_{n+1} tale che $M_{n+1} = 2^{n+1} - 1$, dove $n+1$ è un numero naturale primo), è un numero perfetto il numero P_n tale che:

$$P_n = 2^n(M_{n+1}) = 2^n(2^{n+1} - 1)$$

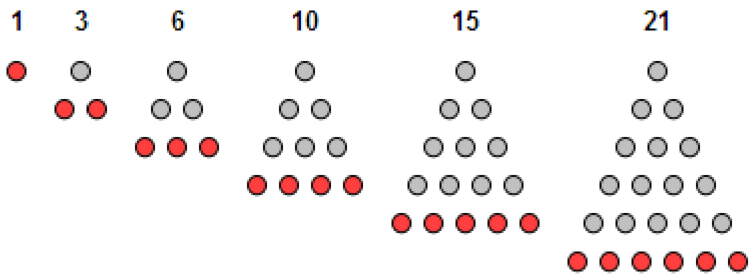
Nel caso dell'amico *28*, si parte dal numero primo $n+1 = 3$ (verificando che $M_3 = 2^3 - 1 = 7$ è in effetti un primo di Mersenne), da cui si ricava che $n = 2$. Si ha dunque che:

$$P_2 = 2^2(M_3) = 2^2(2^3 - 1) = 28$$

ovvero che *28* è il secondo numero perfetto di questo tipo, come già si è detto.
I numeri perfetti godettero di grande rispetto e ammirazione nelle culture ebraica e cristiana. Si pensi ad esempio al fatto che nella *Genesi* Dio crea il mondo in *6* giorni, e si pensi poi al fatto che il calendario ebraico si basava sul mese lunare di *28* giorni. Riguardo a questo, è interessante una '*sententia*' di Sant'Agostino contenuta all'interno de *La Genesi alla lettera*:

> *"Sei è un numero perfetto in sé stesso, e non perché Dio ha creato tutte le cose in sei giorni. Anzi è vero l'opposto: Dio ha creato tutte le cose in sei giorni proprio perché questo è un numero perfetto."*[3]

Si è convenuto che i numeri possono essere affascinanti. I pitagorici rimasero a tale punto abbagliati dalle loro ammirevoli proprietà da non essere solamente convinti che tutte le cose possiedano un numero, me soprattutto che tutte le cose *siano* numeri. Questa loro concezione secondo la quale la realtà risieda nel "numero", mettendo per un attimo da parte ogni misticismo che da questa idea i pitagorici fanno derivare, contiene in verità un messaggio di straordinaria modernità. Per la prima volta non si ricerca più l'aspetto qualitativo, ma quello quantitativo. Per conoscere la realtà, questa va quantificata, va cioè espressa attraverso leggi matematiche che ne esplicitino l'armonia e ne esaltino l'ordine. Questa concezione della realtà coincide alla perfezione con la mentalità che svilupperanno nei secoli XVI e XVII i figli della rivoluzione scientifica, e che sarà tramandata fino al giorno d'oggi nel *modus operandi* degli studiosi moderni. Per Keplero e Galileo, per Cartesio e per Pascal la realtà è dominata dalla perfezione della matematica, e ciò che è scientifico, ovvero ciò che si pone come base di un sapere certo e coerente, è ciò che è misurabile.
Per comprendere l'ossessione dei pitagorici per i numeri è fondamentale tenere presente che essi erano soliti raffigurare i numeri per mezzo di punti, in modo tale che ad ogni punto corrispondesse l'unità naturale. Questa pratica, definita *aritmogeometria*, è una diretta conseguenza della convinzione secondo cui i numeri non siano concetti astratti, ma entità reali. In particolare, si definiscono *figurati* i numeri naturali che possono essere rappresentati mediante uno schema geometrico e regolare. Tra questi vi sono i numeri *poligonali*, ovvero numeri figurati che possono essere disposti in modo tale che raffigurino un poligono regolare. Numeri poligonali sono ad esempio i numeri triangolari, ovvero numeri figurati che si possono rappresentare in modo da formare un triangolo equilatero, quali ad esempio 1, 3, 6, 10, 15 e 21:



I numeri triangolari sono infiniti, e sono tutti racchiusi in potenza all'interno della formula di Gauss, che permette di determinare l'*n*esimo numero triangolare *T(n)* in funzione della sua posizione *n* all'interno della serie:

$$T(n) = \frac{n}{2}(n + 1)$$

Così ad esempio il *42*esimo numero triangolare *T(42)* varrà:

$$T(42) = \frac{42}{2}(42 + 1) = 903$$

Altri numeri poligonali sono i numeri quadrati, che possono essere disposti a formare un quadrato, i numeri pentagonali, che rappresentano un pentagono regolare, e quelli esagonali, che rappresentano un esagono regolare (tutti questi ultimi in particolare sono anche triangolari). Essi sono dati rispettivamente dalle seguenti formule:

$$Q(n) = n^2$$

$$P(n) = \frac{n}{2}(3n - 1)$$

$$E(n) = \frac{n}{2}(4n - 2) = n(2n - 1)$$

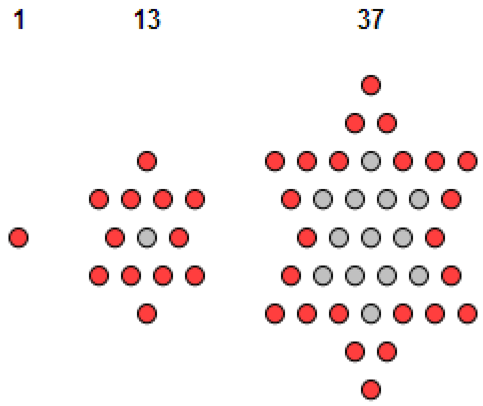
Si noti come tra le varie formule esiste una sorta di simmetria, di similitudine. In effetti per i vari sottoinsiemi di numeri pentagonali le rispettive formule si pongono come casi particolari di un'unica formula generatrice universale, dalla quale derivano poi tutte le altre. Detto *f* il numero dei lati del poligono che un numero poligonale può rappresentare, e detta *n* la posizione di tale poligonale all'interno della rispettiva sottoserie, l'*n*esimo numero *f*gonale L_f *(n)* è dato dalla seguente equazione:

$$L_f(n) = \frac{n}{2}[(f - 2)n - (f - 4)]$$

Per ottenere le formule più particolari dei numeri triangolari *T(n)*, dei numeri quadrati *Q(n)*, dei numeri pentagonali *P(n)* e così via, è sufficiente sostituire a *f* il rispettivo numero di lati del sottoinsieme dei numeri poligonali richiesto. Volendo conoscere ad esempio la formula generatrice dei numeri ottagonali *O(n)* in funzione della rispettiva posizione *n* all'interno della serie si sostituisce a *f* il valore *8*, ricavando che:

$$O(n) = L_8(n) = \frac{n}{2}[(8 - 2)n - (8 - 4)] = \frac{n}{2}(6n - 4) = n(3n - 2)$$

Tornando ai già citati numeri perfetti, suscita stupore e idea di bellezza il fatto che ogni numero perfetto è anche triangolare (ma non viceversa), e che ogni numero perfetto pari è sia triangolare che esagonale. Ad esempio l'amico *28*, il secondo dei numeri perfetti, è tale che *28 = T(7) = E(4)*. Tuttavia, oltre all'insieme dei numeri poligonali, sono studiati nella *Teoria dei numeri* altri sottoinsiemi di numeri figurati molto interessanti per le loro proprietà e relazioni. Vi sono ad esempio i numeri stellati, numeri figurati che possono essere disposti a formare una stella esagonale, quali ad esempio 1, 13, 37, 73 e 121:



La formula per l'*n*esimo numero stellato *S(n)* è la seguente:

$$S(n) = 6n(n-1) + 1$$

Da notare in particolare come l'*n*esimo numero stellato *S(n)* possa essere ottenuto come la somma dell'unità naturale e di dodici volte l'*(n-1)*esimo numero triangolare *T(n-1)*. In effetti:

$$12[T(n-1)] + 1 = 12\left[\frac{n-1}{2} \cdot n\right] + 1 = 6n(n-1) + 1 = S(n)$$

Interessantissimo è il caso dei due numeri stellati *37* e *73*. Oltre ad essere accomunati dal fatto che sono l'uno il 'rovescio' dell'altro, si ha che sia il *37* che il *73* sono primi permutabili l'uno con l'altro, ovvero, sono numeri primi tali che, in una data base di numerazione (in questo caso in base dieci), qualunque permutazione delle loro cifre genera ancora un numero primo. Inoltre *37* è il *12*esimo numero primo, mentre *73* è il *21*esimo numero primo, dunque anche le loro posizioni nella serie dei numeri primi sono l'una il 'rovescio' dell'altra. Si noti poi che *21* è il prodotto delle cifre che compongono *73*. Infine, il prodotto dei due stellati *37 x 73 = 2701* è il *73*esimo numero triangolare e il *37*esimo numero esagonale. *2701* è anche la sommatoria di *73*, ovvero *2701 = 1+2+3+4+…+73* (in effetti l'*n*esimo numero triangolare è sempre la sommatoria del rispettivo *n*).

All'interno del vasto mondo dei numeri, che – come spero con tutto il cuore di aver fatto notare al lettore – può essere davvero interessante e stupefacente – e mi sento abbastanza sicuro nel dire che ciò abbia valenza (quasi) oggettiva –, i pitagorici erano attratti in particolar modo da quello che essi erano soliti chiamare *tetraktis*, ossia *tetrade*, *quattricità*, e cioè il numero *10*. Tale è il quarto numero triangolare T_4, tale cioè che:

$$T(4) = \frac{4}{2}(4+1) = 10$$

Questo importante valore, largamente usato nel sistema numerico decimale sviluppato in occidente, era ritenuto perfetto in quanto somma dei primi quattro numeri naturali *1*, *2*, *3*, *4*. Tradotta in figura, nella sua bellezza di numero triangolare avente ogni lato costituito da quattro punti, la tetrade era considerata da Pitagora e dai suoi discepoli qualcosa di sacro, utilizzato per simboleggiare la perfezione e gli elementi che la compongono, come suggerisce la *sententia* del grande maestro:

"Il triangolo perfetto, il nostro giuramento"[4]

Il filosofo neoplatonico Giamblico (250-325 d.C. circa) testimonia che i pitagorici erano in effetti soliti giurare sulla tetrade con le seguenti parole:

"Io giuro su colui che scoprì la Tetraktis,
che è la sorgente di tutta la nostra saggezza,
la radice perenne della fonte della Natura."[5]

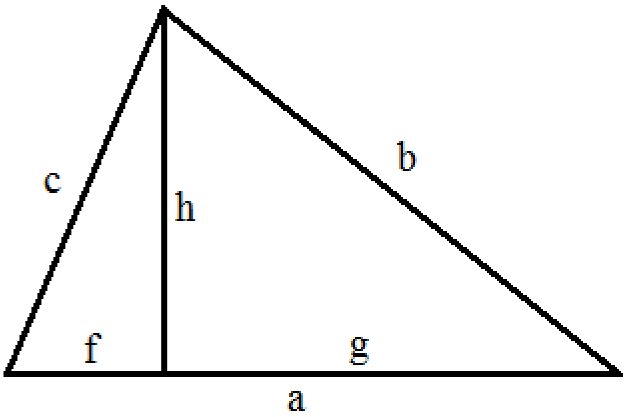
Tornando al concetto di bellezza dei numeri, che ossessionò i pitagorici a tale punto da farne una divinità, è interessante la distinzione che il pensiero di Pitagora muove in ogni ambito della realtà, ovvero il già citato dualismo della natura tra "bene" e "male", "perfetto" e "imperfetto", "maschile" e "femminile", "numeri dispari" e "numeri pari". È su questa opposizione che, secondo i pitagorici, si basa l'armonia dell'universo. Il bene è ciò che ha un limite, il "finito", ciò che può essere delimitato, definito, ciò che è "misurabile". Al contrario l'infinito è male, in quanto "aperto", imperfetto, "indefinibile", non quantificabile. Questo concetto di opposizione tra finito e infinito è un *topos* nella cultura classica. In genere per l'uomo classico l'armonia coincide col finito, col definibile, mentre l'infinito è disarmonico, privo di attrattive. Non a caso sarà lo stesso Leopardi a spiegare il motivo per cui l'uomo moderno è infelice. La causa della sua infelicità non è altro che la tensione verso un piacere infinito che non può possedere. Al contrario, l'uomo classico vive felice e spensierato proprio perché si sente a suo agio nel finito. In lui non c'è alcuna tensione verso l'infinito, il quale è al contrario percepito disarmonico. E sarà anche Hegel a introdurre il concetto di *morte dell'arte* nel periodo romantico in quanto incapacità di racchiudere il contenuto di infinito in una forma d'arte idonea, come invece era in grado di operare l'arte classica. Ed è incredibile pensare che la matematica, l'unica forma d'arte che, da questo punto di vista, 'non muore mai', sia riuscita anche in questo, sia riuscita a parlare dell'infinito in termini razionali, sia riuscita a "misurare" l'infinito tanto temuto dall'uomo classico. La matematica è bella anche per questo motivo. Si pensi ai concetti di limite, di derivata, di integrale, di convergenza di una serie: è un'arte inutile che è riuscita a trionfare dove le altre arti hanno fallito. È riuscita a cogliere ed abbracciare l'infinito.
Pei pitagorici i numeri dispari sono i prediletti in quanto danno l'idea di "limitato", di "chiuso", di "ordine". Al contrario, i numeri pari sono "aperti", "inconclusi" e suggeriscono dunque "illimitatezza" e "disarmonia". È dunque importante distinguere, in ogni singolo aspetto della realtà, il finito dall'infinito. E comprendere dunque l'armonia che deriva dal perfetto equilibrio che esiste tra bene e male. In conclusione dunque, al di là di ogni eccessivo e smisurato "misticismo dei numeri", non si può negare che i pitagorici abbiano fornito un primo elegante abbozzo del concetto di armonia dell'universo, un'armonia contemplabile e misurabile intuendo la bellezza e l'onniscienza della matematica.

3 - La bellezza delle generalizzazioni

Il teorema di Pitagora, offerto in dono all'uomo moderno dai pitagorici, viene definito da Keplero come il primo dei "due grandi tesori della matematica" (il secondo, di cui non è ancora giunto il momento di parlare, è il tema centrale del saggio, e cioè la sezione aurea). Esso, per chi ne sa apprezzare la bellezza, gode di un fascino non trascurabile e di un'estetica profonda. Probabilmente la bellezza del teorema risiede nella "nobile semplicità", come direbbe Winckelmann, con cui si esprime: dopo tutto non si può negare che alla matematica appartengano i canoni di bellezza neoclassica di cui parlava il teorico d'arte, ovvero la capacità di porsi come armonia tra le parti che la compongono, magari come simmetria, come profondo ordine nelle equazioni in cui si esplica. Dette a e b le lunghezze dei cateti e c la lunghezza dell'ipotenusa, in un triangolo rettangolo si ha che:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

È sicuramente motivo di fascino il fatto che tale teorema sia valido per tutti i triangoli rettangoli, che esprima per qualunque di questi una verità di fatto indubitabile. Forse è proprio questa tendenza del sapere matematico di esprimersi e porsi come sapere assoluto ad avvolgerla di bellezza. In effetti non si può negare come il carattere universale di una qualche realtà la rafforzi alquanto, la renda più potente e dunque più attraente agli occhi di chi sa stupirsi ammirandola. Ed è questa la tanto bella armonia con cui la matematica, nonché le scienze teoriche che da essa dipendono, tende a crescere in continuazione su se stessa: la "regina delle scienze" (come la definì Gauss) pare accrescersi ponendosi sempre come continua generalizzazione dei saperi precedenti. La matematica tende cioè ad un'universalità sempre maggiore del suo sapere, ad un continuo generalizzarsi in teoremi sempre più complessi e sintetici. Teoremi che racchiudono in se stessi altri teoremi precedenti più particolari, sintetizzandoli e ponendoli appunto come casi particolari di più generali verità assolute che in questi teoremi più generali si manifestano e si esplicano.
Si può ritenere che giaccia in questa caratteristica unica delle scienze più teoriche e quantificate la loro bellezza, e cioè nella capacità di queste di rendersi in continuazione sempre più generali, di sintetizzarsi in poche equazioni da cui si possa poi derivare tutto lo scibile in esse costruito. Per molte filosofie l'universale è stato ritenuto canone di bellezza e di armonia. Si prenda come esempio Spinoza: egli era convinto che tutta la realtà derivasse dal solo principio unitario di "sostanza", realtà assoluta che fa sì che tutto sia tale. E proprio per questo per il filosofo di Amsterdam la realtà doveva essere perfetta, per il fatto che essa dipendesse tutta da un'unica realtà assoluta a cui tutto appartiene.
Non si può dunque negare che l'universale affascini, che una determinata realtà sia più bella se è in grado di porsi come "universale". E il teorema di Pitagora (preso in questo caso come esempio per mostrare tale caratteristica di "validità generale" propria di tutta la matematica) gode di questo canone di universalità, appunto, che lo rende tanto bello: è valido per *tutti* i triangoli rettangoli. Questo è chiaramente solo un esempio particolare di tale aspetto proprio di tutta la realtà matematica, la quale, come già si è ripetuto ormai più volte, tende a generalizzarsi di continuo. I vari teoremi tendono a porsi all'interno di teoremi sempre più universali. Lo stesso teorema di Pitagora viene conglobato all'interno di un teorema più ampio, del quale lo stesso teorema di Pitagora viene a porsi come caso particolare. Trattasi del teorema di Carnot, un potentissimo teorema della trigonometria, che esprime una relazione, formalmente simile a quella del teorema di Pitagora, tra i lati di un qualsivoglia triangolo. Trattasi dunque di una generalizzazione del teorema di Pitagora ai triangoli scaleni.
Volendo dunque determinare una relazione tra i tre lati di un triangolo qualunque, si consideri il triangolo scaleno di lati a, b e c in figura, dove h è la lunghezza dell'altezza riferita al lato a:



Anzitutto si nota che, essendo rettangolo il triangolo di lati *h*, *g* e *b*, vale che, detto γ l'angolo formato da *g* e *b*:

$$h = b \sin \gamma \text{ e che } g = b \cos \gamma.$$

Ne deriva che, essendo $a = f + g$:

$$f = a - g = a - b \cos \gamma.$$

L'obiettivo del ragionamento è determinare una relazione tra i tre lati *a*, *b* e *c* del triangolo. Avendo ottenuto *h* ed *f* in funzione di *a* e *b*, si tratta ora di scoprire un anello di congiunzione tra questi valori a *c*, e tale legame è il teorema di Pitagora applicato al triangolo di lati *c*, *h* ed *f*:

$$c^2 = h^2 + f^2;$$

ma, come già si è detto:

$$h = b \sin \gamma \text{ e } f = a - b \cos \gamma;$$

Tale "sillogismo" determina come conclusione che:

$$c^2 = (b \sin \gamma)^2 + (a - b \cos \gamma)^2 =$$

$$= b^2(\sin \gamma)^2 + a^2 - 2ab \cos \gamma + b^2 (\cos \gamma)^2 =$$
$$= a^2 + b^2[(\sin \gamma)^2 + (\cos \gamma)^2] - 2ab \cos \gamma =$$
$$= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

Dunque:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Tale equazione è detta "teorema di Carnot". Dato il ruolo preminente che vi assume la funzione *coseno*, l'equazione prende anche il nome di "teorema del coseno". Esso esprime dunque una relazione tra i quadrati dei lati di un triangolo qualunque. In particolare, esso afferma che *in un triangolo il quadrato della lunghezza di un lato è uguale alla somma dei quadrati delle lunghezze degli altri due lati diminuita del doppio prodotto delle lunghezze di tali due lati moltiplicato per il coseno dell'angolo tra essi compreso*. Da questo punto di vista il teorema gode di una grande bellezza per la simmetria che lo accomuna al teorema di Pitagora. In effetti entrambi i due teoremi si pongono come relazioni tra i quadrati dei lati dei triangoli. Ma, come già si è accennato, il teorema di Carnot si pone anche come generalizzazione del teorema di Pitagora. È come se il teorema di Pitagora, verità assoluta e indubitabile per tutti i triangoli rettangoli, confluisse all'interno di questa verità ben più estesa che viene a sua volta abbracciando *tutti* i triangoli, non solo quelli rettangoli. In altri termini, il teorema di Pitagora non è che un caso particolare di una realtà ancora più universale, ovvero il teorema di Carnot. Per rendersi conto di ciò, si consideri il caso in cui il triangolo in figura sia rettangolo: in questo caso particolare, appunto, il teorema di Carnot viene a coincidere con il teorema di Pitagora. Infatti, se:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \text{ e se } \gamma = \pi/2,$$

allora si ha che:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\pi/2).$$

Ma poiché $cos(\pi/2) = 0$, si ritorna al caso particolare del teorema di Pitagora:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Per questo motivo, il teorema di Carnot viene anche detto "teorema di Pitagora generalizzato", per il fatto che racchiude in sé il teorema di Pitagora, riducendolo a caso particolare di un'universalità ancora più assoluta.

La matematica riesce ad affascinare coloro che sono in grado di apprezzarla per la sua tendenza a generalizzare di continuo le sue proposizioni e a porsi di conseguenza come sapere in continua universalizzazione progressiva. Il teorema di Carnot è un esempio di questa tendenza della matematica ad "agglomerare" teoremi ed equazioni più semplici e particolari in unificazioni più complesse e universali. E quando riesce a fare questo, la matematica si rivela davvero sorprendente e affascinante, quando è sufficiente conoscere un'unica formula riassuntiva per derivare da essa tutte quelle più particolari che da essa, in un certo senso, dipendono.

I filosofi Fichte e Hegel da questo punto di vista vedrebbero nella matematica la realizzazione del loro sistema idealista di *tesi*, *antitesi* e *sintesi*, secondo il quale per un dato caso particolare, la tesi, corrisponde una negazione di esso in una moltitudine di casi particolari diversi da quello dato, che costituiscono l'antitesi, e infine una generalizzazione, detta sintesi, che afferma allo stesso tempo sia la tesi che l'antitesi, nella quale i due momenti precedenti, ovvero tesi e antitesi, trovano la loro *condicio sine qua non*, in quanto la realtà non si trova nei casi particolari, ma nel caso generale, che li riassume, da cui essi dipendono e che essi incarnano. L'intera matematica può essere filtrata attraverso il sistema idealista, può cioè essere vista come un continuo svolgimento creativo del pensiero che plasma la realtà matematica avvolgendo su se stessi i suoi teoremi e generalizzandoli in teoremi sempre più universali e riassuntivi. Per questo motivo, le equazioni più belle che si ritrovano nel mondo della matematica e delle scienze sono quelle che si pongono come unificazione di equazioni più semplici. Si è già visto un esempio di questa bellezza della matematica nella formula generatrice di tutti i numeri poligonali, che associa alla posizione *n* e al numero di lati *f* l'*n*esimo numero *f*gonale:

$$L_f(n) = \frac{n}{2}[(f-2)n-(f-4)]$$

Questa è un'equazione che gode di moltissimo fascino per il fatto che racchiude in sé tutte le formule generatrici più particolari dei vari numeri poligonali. È dunque una sorta di grande madre di infinite formule figlie che trovano, in un certo senso, in lei la loro condizione di esistenza, in quanto da essa derivano e dipendono. Ragionando in termini idealistici si potrebbe partire con il giudizio "il *quarto* numero quadrato è il *16*": questo è il momento della tesi. A questo punto ci si può rendere conto dell'esistenza di infiniti altri numeri quadrati diversi da *16*, quali il *4*, ossia il *secondo* numero quadrato dopo l'*1*, il *9*, il *terzo*, il *25*, il *quinto*, il *36*, il *sesto*... giungendo in questo modo al momento dell'antitesi. Ne deriva la formula per l'*n*esimo numero quadrato, che associa alla posizione *n*, l'*n*esimo numero quadrato, ossia il numero quadrato che si trova in *n*esima posizione:

$$Q(n) = n^2$$

Questo è il momento della sintesi: l'equazione, racchiudendo in sé tutti gli infiniti numeri quadrati, riconferma contemporaneamente sia la tesi che l'antitesi, riassumendole, e permettendo di cogliere che esse sono casi particolari di un'unità universale da cui dipendono e da cui derivano.
A sua volta l'equazione dei numeri quadrati si pone come tesi nel momento in cui ci si rende conto dell'esistenza dei numeri triangolari, dei numeri pentagonali, esagonali, ettagonali... e delle rispettive formule generatrici, simmetriche a quella dei numeri quadrati. Si hanno dunque: una tesi, la formula dei numeri quadrati, e un'antitesi, le infinite altre formule degli altri numeri che possono essere disposti a formare triangoli, pentagoni, esagoni, ettagoni, ottagoni... Si arriva dunque a capire che le varie formule dei vari numeri *poligonali* (già questa parola in corsivo è un preludio all'unificazione) non sono che casi particolari di un'unica equazione che le riassume tutte, che è appunto la già citata formula per l'*n*esimo numero *f*gonale. Questa viene a costituire la grande sintesi, o, come la definisce Hegel, il momento "positivo – razionale".
Anche la vicenda dei teoremi di Pitagora e di Carnot può essere vista come la successione dei momenti del sistema idealistico. Il teorema di Pitagora può infetti costituire la tesi nel momento in cui ci si rende conto che esso è valido solo per i triangoli rettangoli. La delimitazione del "raggio d'azione" del teorema presuppone dunque essa stessa l'esistenza di "zone" in cui esso non ha competenza, zone in cui si rivela "impotente". Tali "zone" sono tutti i triangoli che non sono rettangoli, che non hanno un angolo retto. Ci si ritrova nuovamente di fronte ad uno scontro tra tesi (il teorema di Pitagora è valido per i triangoli rettangoli) e antitesi (il teorema di Pitagora non è valido per i triangoli non rettangoli). Questo stesso conflitto della ragione matematica presuppone una rappacificazione, in quanto la matematica è pura bellezza fine a se stessa, e come tale non ammette conflitti irrisolti. La risoluzione del conflitto, la sintesi, è dunque il teorema di Carnot, che ricrea l'armonia dove prima c'era lo scontro irrazionale, che riconduce a una bellezza infinitamente più grande e generale le bellezze più piccole e particolari che prima entravano in conflitto.

4 - Keplero, un figlio del suo tempo

Giovanni Keplero (1571-1630), figlio della rivoluzione scientifica, è un uomo ‘illuminato’. Egli non è sottomesso ai dogmi che la Chiesa impone e non si fa scrupoli a rischiarare con il lume della ragione le ombre che la Controriforma ha voluto avvolgere attorno alle menti degli uomini, soggiogandoli e mantenendoli in uno ‘stato di minorità’ (come lo definirà Kant). Questo, tuttavia, non nei panni di chi vuole far emergere eventuali assurdità insite nel pensiero cristiano, ma in qualità di profondo credente che vuole operare una conciliazione tra la fede cristiana e il progresso scientifico.
Di mentalità tipicamente neoplatonica, Keplero basa le sue supposizioni teoriche e le sue ricerche pratiche su un’unica convinzione, e cioè che nell’universo esiste un’armonia, un ordine, una struttura matematica. L’universo è perfetto in quanto creato da Dio, e come tale è tutto esprimibile attraverso delle leggi, attraverso delle equazioni che siano in grado di descrivere questa sua perfezione, questo ordine, questo *cosmos*.
Analizzando in primo luogo da un punto di vista culturale il periodo in cui Keplero venne al mondo, occorre tenere presente che, grazie anche al lavoro di Luca Pacioli (approfondito nel capitolo 14), si stavano diffondendo tra gli intellettuali post-rinascimentali idee neo-platoniche e pitagoriche, le quali mettevano nuovamente in primo piano la grande volontà di creare un collegamento tra la matematica razionale e logica e l’universo naturale e concreto. Anche lo stesso concetto di ‘sezione aurea’ (di cui si parlerà più avanti), o, come la definiva Pacioli, *divina proportione,* gettava ponti non solo tra matematica e funzionamento dell’universo, ma anche tra fisica e pensieri teologico e metafisico. E Keplero, come direbbe Hegel, è parte della sua epoca, prodotto della sua cultura, rappresentante il pensiero intellettuale dell’epoca e tale in virtù della stessa cultura in cui è inserito. Dietro questo profondo fervore scientifico-filosofico che gli intellettuali manifestavano, esisteva tuttavia anche una non trascurabile atmosfera di paura, confusione e soprattutto scrupolo morale e religioso. Ebbene, non bisogna dimenticare che il periodo manieristico - barocco in cui Keplero visse è profondamente segnato dallo scisma della Chiesa Cattolica provocato da Lutero, il quale interpretando rigorosamente la Bibbia, fece notare come solo la fede potesse giustificare l’uomo di fronte a Dio, e, soprattutto, dalla Controriforma, la quale, con i suoi orrori, le sue atrocità, le sue ‘Sante Inquisizioni’, i suoi ‘Indici di Libri Proibiti’, i suoi atti volti ad epurare il mondo da tanto scempio provocato da luterani e calvinisti, avvolgeva la società di insicurezza, ansie e preoccupazioni per la propria anima. Senza contare poi la Guerra dei Trent’anni.
È ammirevole vedere come Keplero (e, del resto, pure gli altri figli della rivoluzione scientifica, tra cui Galileo Galilei, suo contemporaneo) sia riuscito a contribuire al progresso del sapere umano in un periodo così contradditorio e turbolento. Ecco, evidentemente Keplero riuscì a edificare la concezione di un universo teologico - scientifico in cui sentirsi effettivamente fiducioso e sereno. Egli è ricordato al giorno d’oggi in primo luogo come uno dei più grandi astronomi della storia, ma anche come matematico di valore portato per le speculazioni teoriche e formulatore delle tre leggi del moto planetario che portano il suo nome. Non a caso l’astronomia era allora considerata una branca della matematica. La sua intera carriera scientifica, nonostante si basasse sulla teoria eliocentrica di Niccolò Copernico e la condividesse appieno, non è da vedersi finalizzata alla demolizione dei fondamenti della Chiesa Cattolica, la quale sosteneva invece la teoria geocentrica del modello aristotelico - tolemaico, o comunque contraria ad essa. Al contrario, essa è da ritenersi funzionale alla sua mentalità assolutamente credente in un Dio matematizzante che organizza l’universo secondo leggi universali, perfette e immutabili, che l’uomo è in grado di riconoscere attraverso la matematica, “l’unica scienza che Dio ha voluto finora donare al genere umano”[1], come la perifraserà Thomas Hobbes nel *Leviatano*.
Keplero nacque il 27 dicembre 1571 a Weil der Stadt da un padre mercenario e da una madre inquieta che conosceva le presunte proprietà magiche delle erbe e che sarà arrestata nel 1620 accusata di stregoneria. Indirizzato fin da giovane, secondo il volere dei genitori, agli studi ecclesiastici presso l’Università di Tubinga, Keplero è attratto dalla teologia e dalla matematica, due

discipline che nella sua mente erano strettamente legate. Assistendo a lezioni di astronomia che presentavano ancora il sistema tradizionale geocentrico come sistema ufficiale, Keplero parve fin da subito interessato al sistema copernicano, del quale ebbe modo di discutere con il suo professore Maestlin, e del quale condivideva pienamente la teoria eliocentrica. In effetti Keplero, profondamente religioso, era convinto che il Sole, trovandosi al centro dell'universo, dovesse in qualche modo rappresentare il proprio Creatore, e che la triade Sole – stelle – spazio intermedio rispecchiasse la trinità Padre – Figlio – Spirito Santo.
Prossimo a concludere i suoi studi teologici, nel 1594 Keplero venne raccomandato dall'Università di Tubinga come sostituto per uno dei professori di matematica (appena deceduto) a Graz, in Austria. In sostanza, la vita dello studioso mutò repentinamente da pastore a docente di matematica. Questo fatto non segnò per Keplero l'abbandono della sua grandissima fede in Dio, ma, al contrario, la grande opportunità, che gli permetteva di adempiere comunque al suo dovere di cristiano, di contribuire alla comprensione dell'universo in quanto creazione divina.
Accettando definitivamente il sistema eliocentrico copernicano, Keplero si distaccò leggermente dalla mentalità comune degli altri astronomi, che si limitavano a prendere nota della struttura dell'universo, per il fatto di porsi anche il problema del motivo per il quale l'universo dovesse avere tale struttura, del motivo per il quale Dio avesse voluto dare all'universo tale conformazione. Keplero aspirava a una teoria che spiegasse i dati ricavabili dall'osservazione dei cieli:

> *"In ogni acquisizione di conoscenza accade che, partendo da ciò che colpisce i sensi, siamo condotti dal funzionamento della mente a entità più elevate che i sensi, per quanto acuti, non possono cogliere. Lo stesso accade nella disciplina dell'astronomia, nella quale innanzitutto percepiamo con gli occhi le diverse posizioni dei pianeti in momenti differenti, dopo di che il ragionamento si sovrappone alle osservazioni e guida la mente al riconoscimento della forma dell'universo."*[2]

Anzitutto, la prima teoria di Keplero, con la quale egli cercava di far tornare i conti nella misurazione delle orbite dei pianeti e dei loro tempi di rivoluzione, consistette nell'ipotesi che le orbite dei pianeti del sistema solare fossero strutturate dai poligoni regolari: partendo dall'orbita circolare di Saturno (avente per centro il Sole), inscrivendo in essa un triangolo equilatero, e inscrivendo poi in tale triangolo un'altra circonferenza, quest'ultima avrebbe dovuto costituire l'orbita di Giove. Data poi l'orbita di Giove, inscrivendovi il poligono regolare successivo per il numero di lati, ovvero il quadrato, e inscrivendo in tale quadrato un'altra circonferenza, questa sarebbe dovuta essere l'orbita di Marte. E così via per tutti i sei pianeti conosciuti (Mercurio, Venere, Terra, Marte, Giove e Saturno).
È evidente come Keplero fosse effettivamente convinto dell'esistenza di un ordine nell'universo, di un *logos*, di una "mirabile armonia". Tale ordine deve esistere, secondo lo scienziato, per il semplice fatto che l'universo è stato creato da Dio, da un Dio – matematico, il quale non può che avere dotato la sua creazione di una struttura matematica ben precisa. Nella mentalità di Keplero, dunque, lo scienziato ha solamente il compito di svelare tali segreti che l'universo racchiude attraverso quel grande strumento che Dio ha dato agli uomini, la matematica. I fenomeni vanno espressi dunque attraverso delle equazioni, attraverso poche formule che riassumano l'armonia percepibile nell'universo. È questa la mentalità tipica della rivoluzione scientifica, che Hegel definirà 'Ragione osservativa', ovvero la ragione che osserva la realtà esterna volendovi trovare un ordine razionale, senza però rendersi conto che – come farà notare l'Idealismo – la razionalità è nella Ragione stessa, che è la Ragione, secondo la corrente filosofica dell'Idealismo, a dare un ordine alla natura, a creare una razionalità nell'universo.
Tornando a Keplero, rendendosi questi conto che la sua prima teoria non forniva un modello dell'universo che lo descrivesse con precisione (ad esempio le lunghezze delle orbite non risultavano corrette), egli non si arrese: ritenendo, attraverso una mentalità assolutamente platonica, che "Dio geometrizza sempre", riformulò la sua ipotesi considerando le 'tre dimensioni'. Studiando "il numero, l'estensione e il periodo" delle orbite dei pianeti e cercando la ragione per la quale esse

sono così e non altrimenti, ritenne che fosse possibile far corrispondere alla grandezza delle sei orbite le dimensioni dei cinque poliedri platonici. Come Platone nel *Timeo* aveva fatto di questi cinque solidi regolari il fondamento dell'ordine del cosmo, così Keplero suppose che ciascun solido regolare risultasse inscritto e circoscritto a una sfera planetaria (sulla quale giacesse l'orbita del rispettivo pianeta), con la stessa logica compositiva della vecchia teoria. In sostanza, secondo tale teoria esposta nel *Mysterium Cosmographicum*, data la sfera di Saturno, quella di Giove avrebbe dovuto coincidere con la sfera inscritta in un cubo inscritto a sua volta nella sfera di Saturno. E così via per gli altri pianeti fino a Mercurio. Con tale modello dell'universo Keplero dava anche una risposta di natura teologico – matematica al perché i pianeti fossero esattamente sei: essendo cinque i poliedri regolari, è palese che, seguendo il modello di Keplero, inscrivendo quindi in ogni sfera un solido platonico e inscrivendo in quest'ultimo un'altra sfera e procedendo così fino a Mercurio, è esclusa la possibilità che esitano altri pianeti, in quanto, se così fosse, dovrebbero esistere altri solidi platonici per ricavare le rispettive sfere celesti, la quale cosa sarebbe tuttavia assurda.
È ammirevole vedere come Keplero, partendo da un unico assioma posto a priori, e cioè che nell'universo esiste un'armonia matematica attraverso la quale Dio si manifesta agli uomini, sia riuscito a imporre tale ordine che aveva in mente nell'universo in cui viveva. Keplero si era costruito una "mirabile armonia" in cui vivere sereno, e attraverso la quale non solo descrivere la struttura in sé dell'universo, ma anche il motivo per il quale esso dovesse avere questa struttura e non un'altra:

> *"La sfera della Terra è la misura di tutte le altre orbite. Le si circoscriva un dodecaedro. La sfera che lo circonda sarà quella di Marte. Si circoscriva un tetraedro intorno a Marte. La sfera che lo circonda sarà quella di Giove. Si circoscriva un cubo a Giove. La sfera che lo circonda sarà quella di Saturno. Ora, si inscriva un icosaedro nell'orbita della Terra. La sfera inscritta sarà quella di Venere. Si inscriva un ottaedro dentro Venere. La sfera inscritta sarà quella di Mercurio. Ecco la base del numero dei pianeti."*[3]

Nonostante questo modello cosmologico fosso completamente sbagliato, Keplero fece compiere un enorme passo avanti all'idea pitagorica di un cosmo suscettibile di essere compreso attraverso la matematica. Tale modello conteneva infatti le premesse del nascituro "metodo scientifico": si noti la tendenza a spiegare i fatti osservati tramite un modello della natura. Tale metodo si avvicina molto alle attuali teorie fisiche che cercano di spiegare l'esistenza di tutte le particelle elementari e le loro interazioni attraverso delle simmetrie matematiche. Keplero inoltre tende a dedurre aspetti sia di ordine teologico che fisico da principi unitari, allo stesso modo in cui le odierne teorie tentano di spiegare una molteplicità di fenomeni tramite pochi principi fondamentali. La moderna fisica delle particelle postula infatti entità fondamentali oltre un miliardo di miliardi di volte più sottili di un nucleo atomico, dette *string* ("corde"), dalle quali derivino tutte le proprietà di tutte le particelle elementari. Non trasmettono l'idea di una perfetta armonia quei modelli scientifici che puntano a spiegare tutti i fenomeni della natura partendo da un unico principio unitario? Ebbene, questa è la grande ambizione della fisica moderna. La cosiddetta GUT (*grand unification theory*, teoria della grande unificazione), ad esempio, prevede l'unificazione delle tre forze di origine non gravitazionale (elettromagnetica, nucleare forte e nucleare debole) in un'unica forza, che, supportata da un insieme di teorie che costituiscono appunto la GUT, le spieghi unitariamente tutte e tre. I fisici arrivano addirittura a sostenere che le tre forze esistono solamente se vale questo principio unitario postulato, che i singoli fenomeni sono validi solamente se ricondotti a questa unità che deve necessariamente esistere, che tutte le teorie proposte nel secolo scorso si possono accettare solamente se esiste un modello unitario, un'unica teoria, un unico principio, un'unica equazione che le riassuma tutte. Questo modo di pensare, questo modo di percepire una realtà unificata in un'armonia matematica, si avvicina moltissimo alla mentalità idealista di Hegel, il quale ritiene che ogni singolo aspetto della realtà non sia tale di per sé, ma in virtù delle relazioni che ha con la totalità, con l'unità. È l'intero che dà realtà al particolare, e non viceversa. E questa concezione

'unificata' dell'universo è, secondo la filosofia 'classica', l'ingrediente fondamentale per fare della natura in cui si vive una natura ordinata e armonica (si pensi ai razionalisti Cartesio e Spinoza).
Il 24 ottobre 1601, alla morte di Tycho Brahe, Keplero fu nominato Matematico Imperiale. Servendosi anche delle osservazioni astronomiche che gli lasciò Brahe, col quale ebbe modo di discutere a Praga del suo modello cosmologico, lo scienziato formulò le prime due leggi dei moti planetari che portano ancora oggi il suo nome:

> *Prima legge di Keplero:*
> *le orbite dei pianeti sono ellissi di cui il Sole occupa uno dei fuochi.*
>
> *Seconda legge di Keplero:*
> *le velocità orbitali dei pianeti non sono costanti, ma seguono una legge per cui in tempi uguali sono uguali le aree spazzate dal raggio vettore che congiunge il Sole con il pianeta.*

Si tenga presente che Keplero era un matematico, non un fisico: egli si limitava a descrivere ciò che vedeva scrutando i cieli, ma non sapeva spiegarsi a livello fisico il motivo per il quale i pianeti dovessero obbedire a tali leggi. Egli infatti, nel dare una risposta razionale al perché le velocità dei pianeti dovessero variare nel corso della rivoluzione attorno alla loro stella, propose una soluzione tipicamente mistico – religioso – astrologica. Ebbene, vedendo il Sole come un rappresentante di Dio, lo scienziato suppose che i pianeti si muovessero non di per se stessi, ma grazie a una qualche energia che viene loro fornita dallo stesso Sole. Tale è un enorme passo avanti nell'evoluzione del pensiero umano. In effetti, secondo il modello aristotelico – tolemaico, i pianeti e il Sole si muovevano attorno alla Terra di moto circolare uniforme, associato dalla concezione dell'universo dell'uomo classico al concetto di perfezione, per il semplice fatto che essi erano ritenuti perfetti: essendo perfetti, puri e immutabili, è naturale che i pianeti si muovano di tale moto circolare uniforme che non dipende da alcuna energia, da alcuna forza loro concessa, ma dalla loro perfezione.
Keplero doveva invece porre una nuova soluzione. Egli ritenne appunto che i pianeti variassero la loro velocità a seconda della loro distanza dal Sole. In effetti, essendo l'orbita della Terra un'ellisse della quale il Sole occupa uno dei due fuochi, come espresso nella Prima legge, è palese l'esistenza di un perielio e di un afelio, ovvero i punti dell'orbita nei quali la Terra è rispettivamente più vicina e più lontana dal Sole. Ebbene, Keplero suppose che la Terra, come del resto gli altri pianeti, fosse spinta dai raggi del Sole con tanta maggiore forza quanto minore è la distanza. Questo era per Keplero il motivo per il quale la velocità dei pianeti risultasse maggiore al perielio e minore all'afelio: è il Sole, e cioè Dio, la causa del movimento dei pianeti, e non la loro perfezione. Il moto non è insito nei pianeti per la loro perfezione, ma è causato dalla loro stella.
Si noti il carattere mistico e altamente filosofico della soluzione proposta da Keplero, un'ulteriore prova del fatto che per Keplero matematica e teologia erano due discipline molto legate. Sarà Isaac Newton (1642-1727) a spiegare come le leggi di Keplero siano in verità determinate dalla forza gravitazionale, come sia la gravità a mantenere i pianeti nelle loro orbite. In ogni caso, non si può negare il fatto che Keplero abbia dato il via ad un enorme passo avanti nella concezione umana dell'universo. L'ipotesi che il Sole fosse responsabile del moto dei pianeti aveva infatti aperto una nuova prospettiva alla ricerca fisica: la ricerca delle forza. Per la prima volta fisica e astronomia venivano percepite come strettamente collegate. Keplero in sostanza aveva esplicitamente fatto presente ai futuri scienziati la necessità di una teoria sulla forza responsabile del moto (come si è detto, il fisico che diede una risposta a tale richiesta di Keplero fu Newton). Come si è visto, la necessità di tale forza è data dal fatto che i pianeti non percorrono più, come si credeva un tempo, orbite circolari con velocità costanti, ma orbite ellittiche in cui la velocità varia assieme alla direzione e alla distanza dal Sole, e dunque una forza diventava l'unica spiegazione possibile di un moto così irregolare.

In conclusione il duro lavoro di Keplero aveva portato l'umanità alla constatazione del fatto che il moto dei pianeti e il moto dei corpi terrestri non sono poi così diversi: sono entrambi moti dati come conseguenza di forze. Dunque il pensiero kepleriano aveva dato origine al concetto più importante di tutta la rivoluzione scientifica, e cioè l'uniformità delle leggi che regolano il cosmo. Tale idea che l'universo sia omogeneo, ovvero che in ogni sua regione valgano le stesse leggi che valgono anche sulla Terra, oltre ad essere motivo di grande armonia che si può cogliere guardando al cosmo, fu il presupposto della ricerca scientifica di Newton, nonché l'emblema di ogni altro pensatore del periodo compreso tra la rivoluzione scientifica e l'oggi. Tale idea è il fondamento della scienza, e il momento della storia in cui l'umanità accettò tale concetto e lo inserì nella sua cultura, nella sua mentalità e nella sua concezione dell'universo si può considerare la data di nascita della scienza moderna.
In sostanza Keplero, come, del resto, tutti gli altri pensatori dell'epoca, aveva dato origine alla scienza come oggi la intendiamo. Le leggi che ancora oggi portano il suo nome saranno accettate dagli astronomi con l'avvento di Newton, che le riprenderà nel quadro della sua teoria della gravitazione universale.
Ma Keplero aveva bisogno di un ordine ancora maggiore. Doveva sentirsi fiducioso e sereno all'interno del suo universo matematico, e questa sua volontà si realizzò all'interno del suo secondo grande trattato, intitolato non a caso *Harmonices mundi*, e cioè 'L'armonia dell'universo'. In tale trattato viene esposto il più significativo risultato astronomico di Keplero, ovvero la Terza legge che porta il suo nome, che costituisce il culmine del suo tormentato studio delle orbite dei pianeti e dei loro periodi di rivoluzione, finalizzato all'affermazione di quella "mirabile armonia" della quale l'intellettuale aveva avuto tanto bisogno:

> *Terza legge di Keplero:*
> *il rapporto tra il quadrato del periodo di rivoluzione T e il cubo del semiasse maggiore dell'orbita R è costante, ovvero* $T^2 / R^3 = K_S$, *dove* $K_S = 2{,}96 \cdot 10^{-19}\ s^2/m^3$ *e tale valore è lo stesso per tutti i pianeti del sistema solare.*

In poche parole, Keplero aveva trovato una relazione perfetta all'interno di un fatto della realtà a prima vista casuale e privo di un qualche motivo teologico o fisico, il fatto che i pianeti vagassero su delle orbite ellittiche variando inoltre la loro velocità. Perché mai l'universo, creato da un Dio – matematico, doveva comportarsi così fortuitamente? Perché mai i Pianeti, posti in un universo deterministico e perfetto, dovevano assumere un moto che suggerisce a prima vista nientemeno che caso e fortuna, anziché ordine e leggi immutabili? No, Keplero non poteva accettare di vivere in un tale disordine, era più che sicuro che presto o tardi sarebbe venuta a galla una legge che avrebbe creato ordine nel caos. È questa la mentalità tipica della rivoluzione scientifica: lo scienziato deve andare oltre al senso comune, oltre all'apparenza. Deve essere in grado di ricavare un nuovo *cosmos* dove prima la cultura del popolo vedeva un *caos*. Così Keplero con la sua terza legge aveva squarciato il senso comune, era andato oltre all'apparenza che percepiva una realtà fortuita, e vi aveva trovato un ordine (si noti dunque come la mentalità scientifica, che 'squarcia il velo di Maya' e ricerca le leggi ordinate, è l'esatto contrario della depressa concezione della vita basata su una volontà casuale e irrazionale del filosofo Arthur Schopenhauer). Esisteva infatti una relazione matematica universale tra il periodo di rivoluzione di un pianeta e le dimensioni della sua orbita. E così fu creato il cosmo.
In conclusione, si può dire ammirevole il lungo lavoro di questo primo figlio della rivoluzione scientifica. Egli dedicò tutta la sua vita alla creazione di un "universo quantificabile", ovvero un mondo in cui tutto fosse conoscibile attraverso delle equazioni. E da *questo* derivò l'armonia dell'universo e la serenità interiore di Keplero:

> *"La geometria è l'archetipo della bellezza del mondo."*[4]

5 - Keplero e la divina proporzione

La sezione aurea, detta anche ragione aurea, proporzione trascendentale, divina proporzione, o costante di Fidia, è definita in matematica come il rapporto tra due lunghezze disuguali, la prima maggiore della seconda, tali che la seconda sia medio proporzionale tra la prima e la loro differenza (in modulo). Applicata al concetto geometrico di segmento, la sezione aurea si può definire come rapporto tra la lunghezza *a* di un segmento dato e la lunghezza *b* della sua sezione, detta a sua volta sezione aurea di *a*, tale che la lunghezza *a* stia alla lunghezza *b* come la lunghezza *b* sta alla lunghezza *a-b* della sezione residua.
Si dice dunque che un segmento è diviso secondo la sua sezione aurea se la lunghezza dell'intera linea sta alla lunghezza della parte maggiore, ovvero la sezione aurea, allo stesso modo in cui la lunghezza di tale parte maggiore sta alla lunghezza della parte minore, ossia la sezione residua. Quest'ultima è all'incirca la prima definizione di tale concetto matematico che coniò Euclide nei suoi *Elementi*, la Bibbia di ogni matematico, denominandola però non con il moderno "sezione aurea", ma "proporzione estrema e media":

> *"Si può dire che una linea retta sia stata divisa secondo la proporzione estrema e media quando l'intera linea sta alla parte maggiore così come la maggiore sta alla minore."*[1]

Ma la più bella definizione di sezione aurea è quella più algebrica, trascendente e "a priori", in quanto non necessitante del concetto definito di segmento, di rapporto tra due valori puri reali e concordi *a* e *b* tali che $a : b = b : (a-b)$.
La sezione aurea, in qualsivoglia definizione, dunque, è un numero puro, una costante matematica, un valore adimensionale qualunque, prodotto da una proposizione formulata da Euclide. Ebbene, come si vedrà, in verità tale numero, indicato con la lettera greca minuscola φ (*phi*), non è poi così banale come può a prima vista sembrare. Esso racchiude in sé numerose proprietà algebriche e geometriche che suscitano l'interesse di svariate menti del passato, del presente e, sicuramente, anche del futuro. Esso è a tale punto presente nella realtà fisica, da richiamare l'attenzione di tutti quegli uomini che hanno saputo commuoversi di fronte alla perfezione della totalità e di tutti coloro che ancora oggi si sforzano di vedere e conoscere l'universo in cui vivono con armonia, ordine e serenità.
Lo stesso Keplero fu affascinato moltissimo da tale numero che, prodotto da una definizione teorica nell'ambito della matematica pura, è tanto legato alla realtà da poterlo ritrovare, come si vedrà, persino nella disposizione dei petali del girasole, nel guscio del nautilo e nella spirale in cui si avvolgono molte galassie. Keplero si riferiva alla sezione aurea chiamandola divina. Non a caso, come si è visto, la mescolanza di elementi razionali e fede cristiana ha caratterizzato praticamente tutto il lavoro intellettuale dello scienziato, il quale, nei panni di 'filosofo cristiano della natura', riteneva che fosse suo preciso dovere quello di conoscere l'universo in quanto prodotto del suo Creatore. Ci si può rendere conto di tale concezione della natura, leggendo il seguente frammento tratto da una lettera scritta nel 1608 a un professore di Lipsia in merito allo stretto legame che Keplero aveva scoperto esistere tra la sezione aurea e i numeri della successione di Fibonacci. Il brano è commentato passo per passo:

> *"Una peculiarità di questa proporzione risiede nel fatto che essa può essere ricavata dalla parte maggiore e dal tutto; quella che prima era la parte maggiore ora diventa la minore, quello che prima era il tutto diventa la parte maggiore, mentre la somma di queste due acquista nel rapporto il posto del tutto. E si può andare avanti indefinitamente, senza che la proporzione divina venga mai meno."*[2]

Dato un segmento *AB*, definito nel brano il *tutto*, diviso secondo la sua sezione aurea nel suo punto *C*, tale che *AC* sia sezione aurea di *AB*, la quale è detta *parte maggiore*, e che sia invece *CB* la sezione residua, denominata da Keplero *parte minore*, il matematico, col frammento letto, vuole semplicemente manifestare la sua ammirazione e la sua meraviglia nella constatazione del fatto che non soltanto il rapporto tra la lunghezza di *AB* e la lunghezza di *AC* è pari a φ, ma eguaglia tale valore pure il rapporto tra la lunghezza di *AB* + *AC* e la lunghezza di *AB* (e persino il rapporto tra la lunghezza di *AC* e la lunghezza di *CB*). La cosa sarà più chiara con un disegno:

Dato il segmento *AB*, il *tutto*, e data la sua sezione aurea *AC*, la *parte maggiore*, si sa, per la definizione della sezione aurea, che il rapporto tra la lunghezza di *AB* e la lunghezza di *AC* è pari al numero aureo φ:

Ebbene, sia ora il *tutto* il segmento somma *AB* + *AC*, ovvero il segmento *AD* in figura (per comprendere il ragionamento si tenga presente che il segmento *BD* sommato ad *AB* è congruente al segmento *AC*), e sia la *parte maggiore* il segmento *AB* (oppure il segmento *CD*). Keplero nel brano letto spiega che la "proporzione divina" si conserva, ovvero che *AB* è la sezione aurea di *AD*, e che, dunque, il rapporto tra la lunghezza di *AB* + *AC*, ossia *AD*, e la lunghezza di *AB* eguaglia anch'esso la ragione aurea φ:

Keplero nel frammento fa poi notare che è possibile proseguire indefinitamente con la somma del segmento ottenuto *AD* e della sua sezione aurea *AB*, ottenendo ancora una volta un segmento somma tale che il maggiore dei due segmenti addendo, ovvero *AD*, sia la sezione aurea del segmento ottenuto. E così via. È possibile ripetere la stessa operazione all'infinito, *senza che la proporzione divina venga mai meno*: il segmento somma ottenuto sarà sempre tale che il maggiore dei due segmenti addendo da cui è stato generato sia la sua sezione aurea. Detto in altri termini, il rapporto tra le lunghezze del segmento somma e del segmento addendo maggiore eguaglierà sempre la ragione aurea φ.
Questa suggestiva caratteristica di φ, che è l'unico numero reale positivo a godere di tale divina proprietà (l'altro valore reale, negativo, che la possiede è il suo antireciproco $-1/\varphi$), a quanto pare, affascinò a tale punto Keplero da guadagnarsi l'appellativo di *proporzione divina*. Come si può ricavare dal frammento successivo del brano, in effetti, il matematico considerava la sezione aurea un concetto molto vicino a Dio:

> *"Credo che da questa proporzione geometrica abbia preso spunto il Creatore quando introdusse la produzione del simile dal simile, che proseguisse anch'essa indefinitamente."*[2]

In poche parole, è evidente come Keplero considerasse il rapporto aureo φ uno dei principali strumenti della creazione divina dell'universo. Come la sezione aurea si mantiene tale pur sommando o sottraendo tra di loro i segmenti coinvolti nella divina proporzione, così le varie specie di animali si moltiplicano e si diffondono mantenendosi però uguali a se stesse nell'infinito divenire. Ed è questa una considerazione sulla natura delle cose che ispira sicuramente fiducia e sicurezza. Si prosegua con il passo seguente:

> *"Vedo il numero 5 in quasi tutti i fiori che preannunciano la venuta dei frutti, cioè la loro creazione, e che esistono non per se stessi, ma per il frutto che verrà. [...] Ma in geometria il numero 5, cioè il pentagono, è costituito per mezzo della proporzione divina che intendo il prototipo della creazione."*[2]

Da esso si può notare la predilezione del matematico, ereditata dai pitagorici, per il numero 5. In particolare è evidente che Keplero fosse al corrente del fatto che, come verrà dimostrato in seguito, il lato del pentagono regolare è sezione aurea della sua diagonale, altro argomento a sostegno della tesi che il numero aureo sia, secondo il parere dello scienziato, fondamento dell'ossatura logica su cui si esplicita nella natura il creato. Tutto per Keplero è basato sulla divina sezione aurea:

> *"Inoltre, esiste tra il movimento del Sole (o, come ritengo, della Terra) e quello di Venere, che sta al culmine della capacità generatrice, un rapporto di 8 a 13 che, come sentiremo, è assai vicino alla proporzione divina. Infine, secondo Copernico la sfera terrestre è a metà strada tra quella di Marte e di Venere. La proporzione tra loro si ottiene dal dodecaedro e dall'icosaedro, che in geometria derivano entrambi dalla proporzione divina."*[2]

Il passo mostra che Keplero era al corrente dello stretto collegamento tra il numero aureo φ e i numeri naturali della Successione di Fibonacci (di questo legame si parlerà più avanti) come i numeri 8 e 13. D'altra parte, il brano dimostra anche come il matematico sapesse che i solidi platonici hanno anch'essi a che fare con φ.
Il brano si conclude con il ribadimento della concezione kepleriana già espressa in precedenza, e cioè che la stessa riproduzione degli esseri viventi avviene sulla falsariga del numero aureo. La divina proporzione è onnipresente nell'universo intessuto nella mente di Keplero:

> *"È sulla nostra Terra, tuttavia, che ha luogo l'atto della procreazione.*
> *Vedete ora come l'immagine dell'uomo e della donna scaturisca dalla divina proporzione. Secondo la mia opinione, la propagazione delle piante e gli atti di procreazione degli animali hanno tra loro lo stesso rapporto esistente tra le proporzioni geometriche, cioè le proporzioni rappresentate da segmenti di linea, e la proporzione aritmetica, cioè espressa in modo numerico."*[2]

6 - La sezione aurea, ovvero l'armonia

Probabilmente le prime cose che vengono in mente pensando alla sezione aurea, per chi sa di che si tratta, sono i concetti di bellezza, di equilibrio e di proporzione. Questo modesto valore, che si rappresenta, come si è visto, con la lettera greca minuscola φ, è stato scelto dalla musa dei numeri protagonista di una fitta rete di relazioni e proprietà numeriche incredibili, nonché di inaspettati legami tra gli aspetti più astratti e teorici della matematica, la natura e le creazioni umane. Dice l'astrofisico Mario Livio:

> *"Che cos'hanno in comune la mirabile disposizione dei petali di una rosa, il celebre 'Sacramento dell'Ultima Cena' di Salvador Dalì, l'armoniosa spirale di alcune conchiglie e l'allevamento dei conigli? Per quanto possa sembrare strano, queste realtà così disparate condividono un numero."*[1]

Questa divina proporzione sembra dotata di un'inesauribile capacità di generare armonia fra le parti in cui viene posta. Racchiusa in un insieme di proprietà sbalorditive, per certi versi è un numero ancora più misterioso dell'altrettanto onnipresente π, costante matematica, che, come si sa, compare in svariate relazioni matematiche e formule fisiche. È incredibile pensare come un numero così apparentemente insignificante doni una tale armonia a quei rettangoli, detti, per ovvi motivi, "aurei", il rapporto delle cui lunghezze eguaglia la ragione aurea. Che dire poi delle stelle pentagonali e delle armoniche spirali? Tutte queste figure sono strettamente vincolate alla sezione aurea e da essa ricavano l'equilibrio con cui si presentano agli occhi di chi le sa apprezzare e riconoscere figlie della divina proporzione da cui dipendono.
Ed è questo un aspetto della realtà ancora oggi eccezionale, il fatto che tale numero d'oro sia legato a tale punto a concetti presenti in tutta la storia dell'umanità, quali l'armonia e l'equilibrio, da farsi garante del fatto che una scienza completamente a priori come la matematica (si pensi che una costante come π, strettamente legata, nella concezione di chiunque, alla lunghezza di una circonferenza e a quella del suo diametro, è in verità definita in modo puramente astratto, indipendente da misurazioni di carattere fisico) sia in verità detentrice del concetto di bellezza, che la mentalità popolare è solita associare solamente all'arte e alla letteratura. Ma, nel senso kantiano del termine, anche la matematica è in verità un'arte.
Il filosofo tedesco, nella sua *Critica del giudizio*, definì infatti l'arte una "finalità senza fine". In altre parole, per Kant, l'arte si definisce tale solo nel momento in cui non ha alcuna finalità. L'arte non ha obiettivo o scopo. È finalizzata a se stessa, trova cioè nel suo stesso esistere il motivo, lo scopo, per cui esiste. Il "bello" per Kant, inteso da un punto di vista tipicamente neoclassico come armonia fra le parti (e proprio per questo motivo opposto al "sublime", che è invece romantico per la sua disarmonia), è ciò che universalmente suscita un piacere disinteressato, un piacere senza scopi (fisici o intellettuali che siano). La bellezza e l'arte smettono di essere tali nel momento in cui esistono in virtù di uno scopo e non più in virtù di se stesse. Da questo punto di vista ancora per certi versi molto vicino alla mentalità moderna, allora è necessario ammettere che anche la matematica sia arte. Dopo tutto tale scienza è una disciplina assolutamente teorica che non solo è totalmente distaccata dalla realtà concreta, ma pare addirittura fiera ed orgogliosa di non volersi mescolare con essa, di non volere essere, per così dire, applicata. Chiaramente in verità la matematica la si applica: dagli elementari conti sul denaro raccolto, ai calcoli strutturali per assicurarsi la stabilità di un edificio, dalle discipline sperimentali, come la fisica e la chimica, che senza la matematica non potrebbero sostentarsi, alle speculazioni economico – finanziarie in borsa, le applicazioni della "regina delle scienze", come la definì per questo stesso motivo il *princeps mathematicorum* Carl Friedrich Gauss (1777-1852), pare avere applicazioni praticamente illimitate (e ciò sarà il motivo della grande fiducia del Positivismo nel progresso).
Ciononostante, continua ad esistere lo studio teoretico della matematica, intesa come qualche cosa che esiste a priori, come direbbe Sant'Anselmo d'Aosta, ossia a prescindere dall'esistenza della

realtà fisica come la conosciamo. Ogni singola proposizione di questa scienza è infatti totalmente sganciata dal mondo fisico, e dipende solamente dai postulati, verità indubitabili, indeducibili e perciò intuite, dalle quali dipende la validità di tutto il sistema scientifico della matematica, che è rigorosamente deduttivo, sul quale insistettero alquanto i razionalisti Cartesio e Spinoza e dal quale trassero anche un metodo di ragionamento, detto appunto "metodo deduttivo", che ritenevano universale, perfetto e applicabile a ogni branca del sapere umano.
Se la matematica è cosa a tale punto teorica e sganciata dalla realtà, allora, dal punto di vista kantiano, essa è arte. In effetti, è finalità senza fine: ha chiaramente, come si è visto, delle applicazioni pratiche e concrete, ma non esiste in virtù di queste, non è finalizzata a tanto. Ha come fine solamente la continua crescita di se stessa, a prescindere dalle applicazioni pratiche. Ha cioè ricondotto a se stessa la propria finalità. Lo stesso matematico britannico Godfrey Harold Hardy (1877-1947), orgoglioso di lavorare esclusivamente nell'ambito della matematica pura, avvicinandosi per le questioni di estetica a Kant, non si faceva problemi ad ammettere (anzi, a lodare) il fatto che la matematica fosse inutile in ambito pratico:

> *"Nessuna mia scoperta ha aggiunto qualcosa, né verosimilmente aggiungerà qualcosa, direttamente o indirettamente, nel bene e nel male, alle attrattive del mondo."*[2]

In questo senso la matematica è anche detentrice del concetto di bellezza, una bellezza intesa come armonia tra le parti, come estrema rigorosità e proporzione nei continui ragionamenti deduttivi che la compongono. Un "bello" inteso come equilibrio nella struttura in cui si manifesta. E, d'altra parte, sempre kantianamente parlando, un bello disinteressato, privo di una qualche empia finalità pratica che lo corromperebbe, discriminandolo dalla sua stessa definizione che formulò Kant.
La sezione aurea è un esempio della bellezza matematica, che si può scorgere tra le equazioni che descrivono le sue proprietà algebriche, di cui si parlerà tra pochissimo, e tra le figure geometriche che dipendono strettamente da essa. Per cominciare è anzitutto necessario calcolare questo numero, e per farlo ci si serve della sua definizione. È conveniente in particolare considerare la definizione geometrica della sezione aurea, in quanto collega il concetto astratto di numero all'immagine più concreta di segmento, rendendo dunque la cosa più comprensibile.
Come si è visto, la sezione aurea di un dato segmento è la sezione del segmento dato la cui lunghezza è medio proporzionale tra la lunghezza del segmento dato e lunghezza della sezione rimanente. La sezione aurea φ è poi il rapporto tra la lunghezza di un segmento e la lunghezza della sua sezione aurea.
Ci si figuri allora un segmento *AB* diviso nel punto *C* secondo la sua sezione aurea:

Si ha dunque che il segmento *AC* è la sezione aurea del segmento *AB*, e che dunque il rapporto tra la lunghezza di *AB* e la lunghezza di *AC* deve eguagliare φ, ossia che:

$$\overline{AB}/\overline{AC} = \varphi.$$

Per definizione di sezione aurea di un segmento deve valere che:

$$\overline{AB}/\overline{AC} = \overline{AC}/\overline{BC};$$

ma $\overline{BC} = \overline{AB} - \overline{AC}$, dunque:

$$\overline{AB}/\overline{AC} = \overline{AC}/\left(\overline{AB} - \overline{AC}\right).$$

Portando i membri a denominatore comune e trasportando tutto al primo membro, si ottiene l'equazione equivalente:

$$\overline{AB}^2 - \overline{AB} \cdot \overline{AC} - \overline{AC}^2 = 0;$$

Infine, moltiplicando per il reciproco del quadrato della lunghezza di *AC*, si ricava che:

$$\left(\overline{AB}/\overline{AC}\right)^2 - \overline{AB}/\overline{AC} - 1 = 0$$

Questa, nell'incognita $\overline{AB}/\overline{AC}$ è un'equazione di secondo grado risolvibile nell'insieme dei numeri reali con discriminante Δ positivo tale che $\Delta = 5$. Ma il numero $\overline{AB}/\overline{AC}$ è proprio il valore che si voleva ottenere attraverso il ragionamento, in quanto, come già si è visto, per definizione di sezione aurea, in quanto rapporto tra la lunghezza di un segmento e la lunghezza della sua sezione aurea, eguaglia la ragione aurea φ.
L'equazione ha per soluzioni i due valori (il primo positivo, il secondo negativo):

$$\overline{AB}/\overline{AC} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ e } \overline{AB}/\overline{AC} = \frac{1-\sqrt{5}}{2};$$

di questi due valori si esclude chiaramente quello negativo, in quanto il rapporto tra due lunghezze positive è necessariamente positivo anch'esso. Si conclude dunque che:

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \sim 1{,}6180339887\ldots$$

Trattasi dunque di un numero irrazionale, ovvero un numero illimitato non periodico (ma non trascendente come π ed e, in quanto, a differenza di questi, soluzione di un'equazione a coefficienti razionali). Ne deriva che due segmenti tali che l'uno sia la sezione aurea dell'altro (quali ad esempio il lato e la diagonale di un pentagono regolare), sono fra loro incommensurabili (non esiste cioè nessun sottomultiplo comune alle due lunghezze, per quanto piccolo possa essere) e tale scoperta mise in crisi l'armonico universo misurabile dei pitagorici, pei quali dovevano esistere solamente numeri interi o frazioni di numeri interi, ossia solamente valori razionali. Fu in particolare il pitagorico Ippaso da Metaponto a rivelare a coloro che, secondo i pitagorici, non erano degni di conoscere la verità l'esistenza dei numeri irrazionali, scoperta dai pitagorici alle prese col famosissimo problema del calcolo della diagonale del quadrato di lato unitario, e con la studio dei rapporti tra i segmenti del pentagono regolare e dell'amato pentagramma. Per questo motivo, come testimonia il neoplatonico del III-IV secolo Giamblico, Ippaso avrebbe fatto una brutta fine:

> *"Si dice di Ippaso che fosse un Pitagorico, e che essendo stato il primo a pubblicare e descrivere la sfera dai dodici pentagoni, sia perito in mare per la sua empietà, ma sia stato creduto l'autore della scoperta, sebbene questa in realtà discendesse da LUI (così infatti essi chiamano Pitagora, né lo citano mai per nome)."*[3]

Dunque Ippaso non solo aveva rivelato al mondo la triste verità sui numeri irrazionali, ma aveva anche osato porsi come lo *scopritore* di questi, aveva osato sostituirsi al grande maestro Pitagora. Aveva commesso in sostanza troppe eresie per continuare a vivere nella setta dei pitagorici, andava

cioè eliminato. Più avanti si vedrà tuttavia che l'irrazionalità di φ non ha nulla di disarmonico, ma, al contrario, è proprio da essa che derivano alcune sorprendenti proprietà di questo numero.
Anche la soluzione negativa poco fa lasciata da parte ha una certa importanza all'interno di alcune interessanti relazioni matematiche: essa è esattamente l'antireciproco della sezione aurea φ. Infatti se $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$, allora:

$$-\frac{1}{\varphi} = -\frac{2}{1+\sqrt{5}} =$$

$$= -\frac{2}{1+\sqrt{5}} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} = -\frac{2(1-\sqrt{5})}{-4} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Si tenga dunque a mente l'importante "equazione d'oro" $x^2 - x - 1 = 0$, in quanto è essa stessa a definire la sezione aurea, e le sue due soluzioni, la sezione aurea φ, e il suo antireciproco $-1/\varphi$. Verranno di seguito analizzate alcune sorprendenti proprietà algebriche della sezione aurea, tali da dimostrare ancora una volta come la matematica sia detentrice dei concetti di bellezza, di armonia e di ordine.

7 - Divine proprietà

La sezione aurea gode di moltissime proprietà algebriche uniche e sorprendenti da cui deriva legittimamente il suo appellativo di 'divina'. Ci si renderà conto che queste proprietà di cui si parlerà non sono semplici coincidenze, ma precise leggi dimostrate che derivano tutte dalla stessa definizione della sezione aurea, e, in particolare, dalla "parabola d'oro" che la definisce, di cui già si è parlato: $x^2 - x - 1$.
Il matematico Paul S. Bruckman pubblicava nel 1977 nel periodico "The Fibonacci Quarterly" una poesia intitolata *Constantly Mean* (*Media Costante*), nella quale riassumeva le principali proprietà della sezione aurea, denominata nella poesia "golden mean" ("media aurea"). È utile partire dalla lettura di qualche verso di tale poesia per prendere consapevolezza di alcune proprietà davvero sbalorditive:

"The golden mean is quite absurd;	*"La media aurea non è affatto banale;*
it's not your ordinary surd.	*tutt'altra cosa che un comune irrazionale.*
If you invert it (this is fun!),	*Capovolta (pensate un po'!),*
you'll get itself, reduced by one;	*resta se stessa meno l'unità;*
but if increased by unity,	*se poi di uno la aumentate,*
this yields its square, take it from me."	*quel che otterrete, vi assicuro, è il quadrato."*[1]

Nei primi due versi del brano riportato, il poeta – matematico descrive l'irrazionalità di φ spiegando come questo numero si differenzi moltissimo dai comuni irrazionali per molte proprietà, in particolare per un motivo che verrà esposto più avanti. Ma si focalizzi l'attenzione sui versi terzo e quarto. Qui l'artista sta dicendo che la sezione aurea, *capovolta, resta se stessa meno l'unità*. In altre parole, se si calcolasse il reciproco di φ, questo dovrebbe valere $\varphi - 1$. Ciò è davvero sorprendente! In altre parole, se φ vale approssimativamente *1,618...*, $1/\varphi$ deve valere *1,618... – 1 = 0,618...*, mantenendo dunque intatte tutte le illimitate cifre decimali poste dopo la virgola. Il numero aureo φ, assieme al suo antireciproco, è l'unico numero reale che gode di questa incredibile proprietà, e più avanti verrà chiarito il motivo. La proprietà si può riassumere con la seguente uguaglianza:

$$\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1$$

Si considerino ora i versi quinto e sesto, nei quali Bruckman spiega che, data la sezione aurea, *se di uno la aumentate, quel che ottenete è il quadrato*. Ciò significa che, se a φ si aggiunge l'unità, si ottiene il quadrato di φ, ossia φ^2*!* Anche questa è una proprietà davvero sbalorditiva propria solamente di φ (e della sua antitesi $-1/\varphi$): considerato che φ approssima il valore *1,618...*, ne deriva che φ^2 deve essere *2,618...*, mantenendo dunque anche in questo caso intatti tutti i decimali. Questa proprietà unica può essere riassunta dall'identità sottostante:

$$\varphi^2 = \varphi + 1$$

Queste semplici proprietà sono già di per sé grandiose, ma più avanti ci si renderà conto che sono solamente casi particolari di realtà generali ancora più sbalorditive per la loro universalità, ma per comprenderle sarà prima necessario passare per la successione di Fibonacci, i cui numeri si riveleranno essere in qualche modo imparentati con φ. Come si è visto, la bellezza della matematica consiste nell'universalità con cui riesce ad imporsi, oltre che nella neoclassica armonia fra le parti con cui si esplica. La sezione aurea, con le sue proprietà, è un esempio di tutto ciò.

8 - La successione di Fibonacci

È bello e sorprendente vedere come la matematica, procedendo nel corso della sua evoluzione come continua sintesi e generalizzazione progressiva su se stessa, riesca a creare collegamenti inaspettati tra le realtà più disparate, unificandole in armonici teoremi riassuntivi. È il caso della sezione aurea, che, amata e venerata da diversi movimenti culturali (egizi, greci, pitagorici, euclidei) ancora prima della nascita di Cristo, a cavallo tra il XII e il XIII secolo si 'imparentò' con alcune frazioni nate da una successione puramente aritmetica. Tale connubio ebbe origine con Leonardo Pisano (c. 1170-1240), detto Fibonacci, considerato il più grande matematico del medioevo.
Il padre di Leonardo era un mercante pisano con relazioni commerciali internazionali, grazie alle quali il giovane Fibonacci ("figlio di Bonacci") ebbe modo di accostarsi alle scienze matematiche, arrivando ben al di là delle applicazioni mercantili. I viaggi d'affari nel nord Africa gli permisero di apprendere molto dai grandi algebristi musulmani, venendo a contatto con il sistema di numerazione indo – arabo, del quale riconobbe immediatamente gli enormi vantaggi e divenne il più accanito sostenitore e diffusore in Europa. Lo stesso *Liber Abaci*, la sua più celebre opera che aveva anzitutto lo scopo di sostenere gli algoristi e i numeri arabi a discapito degli abacisti e i numeri romani, inizia con la seguente celebre *sententia*:

> *"Le nove cifre indiane sono: 9 8 7 6 5 4 3 2 1. Con queste nove cifre, e col segno 0... si può scrivere qualunque numero, come dimostrato qui di seguito."*[1]

Nel Liber Abaci si trovano poi anche approfondimenti sulla teoria dei numeri e sull'algebra di primo grado, nonché sulla contabilità elementare, ma il più famoso dei problemi proposti è il famoso problema dei conigli, la cui soluzione viene a coincidere con la successione di Fibonacci:

> *"Un uomo mise una coppia neonata di conigli in un luogo circondato da tutti i lati da un muro. Quante coppie di conigli possono essere prodotte dalla coppia iniziale in un anno supponendo che ogni mese ogni coppia produca una nuova coppia in grado di riprodursi a sua volta dal secondo mese?"*[2]

Com'è possibile che questo banale esperimento mentale abbia avuto una così grande importanza per la storia della matematica? Ebbene, supponendo di esaminare ogni mese il numero di coppie, si nota che tale numero risulta composto dalla somma del numero di coppie dei due mesi immediatamente precedenti. Dunque, considerando la coppia come l'unità, la discendenza dei conigli segue la seguente successione, tale che ogni termine sia la somma dei due termini precedenti: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21... Tale successione è detta *successione di Fibonacci*, ed è definita dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \end{cases}$$

Ogni numero della successione è dunque indicato con la lettera a, accompagnata da un pedice $_n$ che ne indica la posizione all'interno della successione. Ad esempio, il sesto numero della successione è a_6, tale che $a_6 = a_5 + a_4 = 8$.
La successione di Fibonacci, come la sezione aurea, alla quale si rivelerà imparentata, gode di alcune proprietà davvero affascinanti. Anzitutto, dati dieci termini consecutivi qualunque all'interno della successione, calcolandone la somma si ottiene sempre un multiplo di *11*. Ad esempio, sommando i primi dieci si ha che $1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 + 21 + 34 + 55 = 143 = 11 \cdot 13$.
Lo stesso accade con qualunque altra serie di dieci numeri di Fibonacci: $21 + 34 + 55 + 89 + 144 + 233 + 377 + 610 + 987 + 1597 = 4147 = 11 \cdot 377$; $55 + 89 + 144 + 233 + 377 + 610 + 987 + 1597 + 2584 + 4181 = 10857 = 11 \cdot 987$. Inoltre, ciascuna di queste somme di dieci termini

successivi della successione vale sempre esattamente *11* volte il termine che occupa la settima posizione tra i dieci addendi, in questo caso *13* nella prima somma, *377* nella seconda e *987* nella terza. La proprietà può essere espressa sinteticamente con la seguente formula, esteticamente molto bella, dove k è una qualunque posizione naturale all'interno della successione, mentre $k + 6$ e $k + 9$ rispettivamente la settima e la decima a partire da k:

$$\sum_{n=k}^{k+9} a_n = 11 \cdot a_{k+6}$$

Un'altra proprietà interessante della successione di Fibonacci riguarda sempre il concetto di sommatoria: la sommatoria dei primi n numeri della successione eguaglia l'$(n+2)$esimo numero della successione diminuito dell'unità. Ad esempio la sommatoria dei primi dieci termini è *143*, e in effetti, il *12*esimo numero della successione è $144 = 143 + 1$. Allo stesso modo, $a_{19} = 4181$ e la sommatoria dei primi *17* termini è *4180*. In generale:

$$\sum_{n=1}^{k} a_n = a_{k+2} - 1$$

I numeri di Fibonacci posseggono anche un forte legame con le terne pitagoriche tanto venerate dei pitagorici, ovvero terne di numeri naturali che verificano l'equazione del teorema di Pitagora, e che, interpretate come lunghezze, possono dunque corrispondere ai tre lati di un triangolo rettangolo. In effetti, dati quattro numeri di Fibonacci consecutivi, il prodotto del primo e del quarto, il doppio prodotto del secondo e del terzo e la somma dei quadrati del secondo e del terzo formano una terna pitagorica. In altre parole:

$$(a_n \cdot a_{n+3})^2 + (2 \cdot a_{n+1} \cdot a_{n+2})^2 = (a_{n+1}^2 + a_{n+2}^2)^2$$

Nel caso dei quattro consecutivi *2*, *3*, *5* e *8*, si ha in effetti che $(2 \cdot 8)^2 + (2 \cdot 3 \cdot 5)^2 = (3^2 + 5^2)^2$, ossia che $16^2 + 30^2 = 34^2$. Questo teorema può dunque costituire un metodo molto semplice per scovare nuove terne pitagoriche all'interno del vasto mondo dei numeri naturali.

Un'ultima interessante relazione analizzata è il legame che si può notare tra la successione di Fibonacci e il triangolo di Pascal. Il triangolo di Pascal (detto anche triangolo di Tartaglia in quanto già noto al matematico italiano del '500) è senza dubbio una delle più celebri disposizioni numeriche di cui ci si può servire per calcolare l'$n$esima potenza intera di un binomio. Esso viene realizzato tracciando anzitutto due file di numeri *1* all'incirca secondo un angolo di *90°* o più, delineando nel contempo delle linee orizzontali successive, ciascuna avente dunque per estremi due numeri *1*; di seguito si determinano i numeri che vanno a formare le varie file orizzontali (in potenza infinite), in modo tale che ogni fila possegga un numero in più rispetto alla precedente, e che ciascuno dei suoi termini sia uguale alla somma dei due termini che si trovano al di sopra, nella fila superiore (figura a). L'$(n+1)$esima fila orizzontale sarà dunque formata dai coefficienti di sviluppo di un binomio elevato alla n.

La stessa definizione del triangolo di Pascal segnala la sua relazione con la successione di Fibonacci, in quanto entrambe le due disposizioni numeriche si basano sul concetto di *somma di termini precedenti*. In effetti, la stessa successione di Fibonacci può essere ricavata a partire dal triangolo di Pascal: è sufficiente addossare la prima linea di 1 ad una verticale e sommare in diagonale gli elementi del triangolo di Pascal per ottenere i termini esatti della successione di Fibonacci (figura b).

a)

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

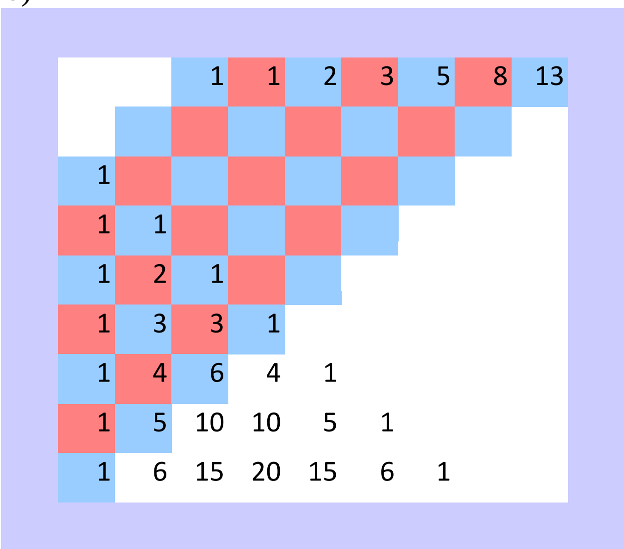
1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

1 10 45 120 200 252 200 120 45 10 1

b)



La successione di Fibonacci, come del resto la sezione aurea, è molto presente nella natura, nella crescita di alcune specie vegetali e nella riproduzione degli insetti. Alcuni studiosi di fillotassi matematica del XIX secolo, quali Schimper, Braun e i fratelli Bavaris, si resero conto di una qualche relazione tra gli elementi che in botanica sono detti quozienti di fillotassi e i quozienti dei numeri di Fibonacci.
In questo capitolo sono state prese in considerazione alcune interessanti proprietà algebriche della successione di Fibonacci, ma le più interessanti sono quelle che la accomunano alla sezione aurea. Perché la matematica è in grado di sorprendere e stupire soprattutto quando riesce a creare sintesi inaspettate e affascinanti tra bellezze particolari che parevano non avere niente in comune. Come già si è detto ormai più volte, la bellezza sta nella generalizzazione.

9 - La mirabile armonia

Leggendo i versi di Bruckman, si è visto che la sezione aurea φ, elevata al quadrato o ridotta al reciproco, mantiene intatte le cifre decimali dopo la virgola. Nel primo caso viene semplicemente aumentata dell'unità (*2,618...*), nel secondo caso è privata di quest'ultima (*0,618...*). Le proprietà vengono espresse dalle seguenti equazioni:

$$\varphi^2 = \varphi + 1$$

$$\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1$$

Ebbene, tali due proprietà non sono delle casualità, ma sono strettamente legate alla stessa "equazione d'oro" che definisce la sezione aurea, della quale la sezione aurea e il suo antireciproco sono soluzioni, $x^2 - x - 1 = 0$. Si noti infatti che la prima equazione è equivalente all'equazione d'oro:

$$\varphi^2 = \varphi + 1$$

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$$

Ne deriva che deve avere anch'essa per soluzione la sezione aurea φ (e il suo antireciproco, il quale tuttavia, non contenendo in modulo l'unità, non mantiene intatte le cifre decimali: $-1/\varphi = -0{,}618...$ $\rightarrow (-1/\varphi)^2 = -1/\varphi + 1 = 0{,}381...$), come volevasi dimostrare.
La seconda equazione è anch'essa una diversa manifestazione dell'equazione d'oro, è cioè equivalente all'equazione che ha per radici la sezione aurea e la sua inseparabile antitesi. Data tale uguaglianza:

$$\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1$$

moltiplicando entrambi i membri per φ, si ottiene che:

$$1 = \varphi^2 - \varphi$$

e infine, portando tutto a primo membro e cambiando i segni, si ritorna all'equazione d'oro:

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$$

Anche questa volta, avendo ricondotto la particolare relazione all'equazione primordiale, si dimostra che la relazione data è valida per la sezione aurea, la quale è l'unico numero reale a godere di queste straordinarie proprietà che descrive con stupore Bruckman.
Ma ci sono ancora molte altre sorprese da ammirare. Scrive l'astrofisico Mario Livio nel suo romanzo *La sezione aurea*:

> *"Quando a una festa si dice 'Ma che bella sorpresa!', è di solito proprio perché ci si è trovati di fronte a qualcosa di inatteso, e nello stesso tempo conosciuto e gradito, si*

tratti di un oggetto o di una persona. La matematica, e il rapporto aureo in particolare, sono ricchi di belle sorprese di questo genere."[1]

Lo stupore che esprime Livio nel frammento riportato si riferisce al calcolo della seguente espressione, che consta di infinite radici quadrate che si succedono l'una nell'altra:

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}$$

È chiaramente impossibile calcolare il valore di tale espressione, al massimo si può tentare di avvicinarsi sempre di più al valore richiesto sperando che la serie converga a un qualche numero conosciuto, come in effetti accade. Ma questo metodo è alquanto noioso e banale: è sicuramente molto più elegante operare nel modo seguente. Si ponga anzitutto che l'espressione valga *x*:

$$x=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}$$

e si elevi dunque al quadrato ambo i membri con la condizione che *x* sia maggiore di zero, affinché sia rispettata la concordanza dei segni:

$$x^2=1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}$$

Ora si ragioni. Si noti che il secondo addendo del secondo membro dell'equazione è la stessa serie che un attimo prima era stata posta uguale a *x*, in quanto, essendo infinita la serie, il fatto di avere "tolto" una radice quadrata è del tutto ininfluente, se confrontato con l'infinito. Ne deriva che questo secondo addendo al secondo membro eguaglia esso stesso *x*:

$$x^2=1+x$$

ma questa è nuovamente l'equazione della sezione aurea:

$$x^2-x-1=0$$

e, poiché *x* deve essere positivo per la concordanza dei segni, si tiene come soluzione dell'equazione la sezione aurea, escludendo il suo antireciproco.
Si conclude dunque una nuova espressione molto bella per indicare la sezione aurea φ:

$$\varphi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}$$

Si analizzi ora un altro tipo di espressione senza fine, basata questa volta sulle frazioni. Trattasi di una frazione continua:

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}}$$

Come nel caso precedente è intuitivo capire come sia impossibile calcolare attraverso la semplice aritmetica il valore di questa espressione, non disponendo del tempo infinito necessario per calcolare un numero infinito di somme. Si potrebbe ancora una volta tentare con un numero finito di iterazioni, ricercando il valore a cui la frazione continua potrebbe convergere. Oppure si può procedere, sulla falsariga del caso precedente, eguagliando l'espressione a *x*:

$$x = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}}$$

Ora, compiendo un'astrazione che solo la mente umana può operare, si può notare che il denominatore del secondo addendo del secondo membro dell'equazione (qui sotto evidenziato in celeste) eguaglia esso stesso il valore *x*, a cui è stata eguagliata nell'immediato prima l'espressione data:

$$x = 1+\cfrac{1}{\color{blue}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}}}$$

In effetti, il valore iniziale e il valore in celeste sono equivalenti, in quanto è assurdo ritenere che l'atto di "togliere" una sola frazione abbia un peso in confronto all'infinito verso cui l'espressione procede. Ne deriva che il valore in celeste può essere sostituito dall'incognita *x* che esso eguaglia:

$$x = 1+\frac{1}{x}$$

ma questa equazione nell'incognita x è ancora una volta l'ennesima manifestazione dell'equazione d'oro. In effetti, moltiplicando ambo i membri per il valore x e portando tutto al primo membro si ha che:

$$x^2 - x - 1 = 0$$

dove l'unica soluzione possibile è quella positiva (essendo positiva l'espressione data), ossia la sezione aurea φ. Dunque vale che:

$$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+\dots}}}}$$

Questa fantastica proprietà della sezione aurea è contemplata anch'essa nella poesia di Bruckman:

"Expressed as a continued fraction,	*"Scritta come frazione con continuità,*
it's one, one, one, ..., until distraction;	*è uno, uno, uno, ...,fino a sazietà;*
in short, the simplest of such kind	*così chiara che più chiara alcuna non resta*
(doesn't this really blow your mind?)"	*(non vi comincia a girare un po' la testa?)"*[2]

Poiché la frazione continua corrispondente alla sezione aurea non contiene numeri al di fuori dell'unità naturale, essa converge molto lentamente al valore φ. Per questo motivo la ragione aurea è il numero più difficile da approssimare come rapporto fra due interi. È come se tale valore "resistesse" alla propria frazione continua più di ogni altro numero irrazionale. Per questo motivo la sezione aurea è anche detta "il più irrazionale fra gli irrazionali"[3].
Si è visto come tutte le proprietà della sezione aurea finora contemplate discendano tutte dall'equazione d'oro che la definisce:

$$x^2 - x - 1 = 0$$

Si ha dunque che:

$$\varphi^2 = \varphi + 1$$

Partendo da questa identità e moltiplicando più volte entrambi i membri per la sezione aurea, si ottengono infinite identità equivalenti, tra cui le seguenti:

$$\begin{gathered}\varphi^3 = \varphi^2 + \varphi \\ \varphi^4 = \varphi^3 + \varphi^2 \\ \varphi^5 = \varphi^4 + \varphi^3 \\ \varphi^6 = \varphi^5 + \varphi^4 \\ \varphi^7 = \varphi^6 + \varphi^5 \\ \dots\end{gathered}$$

In generale si ricava questa incredibile proprietà secondo cui *qualunque potenza intera della sezione aurea φ è pari alla somma delle due potenze precedenti*, e questo può essere generalizzato nella seguente equazione:

$$\varphi^n = \varphi^{n-1} + \varphi^{n-2}$$

Questa è un'equazione bellissima. Essa racchiude in sé tutte le principali proprietà della sezione aurea, che in essa trovano una sorta di sintesi idealista. Si è già parlato in precedenza della tendenza della matematica di generalizzarsi di continuo in equazioni sempre più universali e di come questo suo *modus operandi* le doni bellezza e armonia. La matematica cioè, allo stesso modo della poesia, ama esprimere concetti enormi, che altrimenti richiederebbero una trattazione lunghissima, in sentenze riassuntive e pregnanti, in poche parole che contengono un significato immenso. Tale equazione riassuntiva è un esempio di tutto ciò: essa sintetizza in una proposizione così sintetica tutto quello che finora è stato detto della divina proporzione. Ad esempio, se alla variabile *n* si sostituisce il valore *1*, si evince che:

$$\varphi^1 = \varphi^{1-1} + \varphi^{1-2}$$

ossia che:

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$$

la quale cosa equivale a dire che:

$$\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1$$

ritornando dunque alla sorprendente proprietà particolare secondo cui il reciproco della sezione aurea, essendo la sezione aurea stessa diminuita dell'unità, mantiene intatte tutte le infinite cifre decimali. Allo stesso modo, sostituendo alla variabile *n* il valore *2*, si ottiene che:

$$\varphi^2 = \varphi^{2-1} + \varphi^{2-2}$$

ovvero che:

$$\varphi^2 = \varphi + 1$$

ma questa era l'altra divina proprietà di cui Paul Bruckman, come del resto chiunque la sappia apprezzare, si innamorò.

Il fatto che ogni potenza della sezione aurea si possa definire come somma delle due potenze precedenti la accomuna moltissimo alla successione di Fibonacci. Come si è visto infatti, ogni termine di tale successione è definito come somma dei due termini precedenti. Questo è il primo dei numerosi legami che esistono tra la sezione aurea e i numeri di Fibonacci.

Si possono ricavare altre equivalenze molto interessanti per le potenze della sezione aurea sfruttando più volte questa divina proprietà. Si consideri anzitutto l'identità che si ottiene per *n* = *3*:

$$\varphi^3 = \varphi^2 + \varphi$$

e si consideri che, per $n = 2$:

$$\varphi^2 = \varphi + 1$$

Ne deriva che, sostituendo tale espressione del quadrato della ragione aurea all'espressione del suo cubo:

$$\varphi^3 = (\varphi + 1) + \varphi$$

ovvero che:

$$\varphi^3 = 2\varphi + 1$$

Allo stesso modo, per φ^4 si ha che:

$$\varphi^4 = \varphi^3 + \varphi^2$$

Sostituendo al cubo di φ e al suo quadrato le rispettive espressioni, si ottiene che:

$$\varphi^4 = (2\varphi + 1) + (\varphi + 1) = 3\varphi + 2$$

e così pure per φ^5 si ricava che:

$$\varphi^5 = \varphi^4 + \varphi^3 = (3\varphi + 2) + (2\varphi + 1) = 5\varphi + 3$$

Procedendo in questo modo anche per le successive potenze di φ, si ottengono le seguenti equivalenze in cui intervengono solamente lo stesso valore φ e i numeri naturali:

$$\begin{gathered} \varphi^3 = 2\varphi + 1 \\ \varphi^4 = 3\varphi + 2 \\ \varphi^5 = 5\varphi + 3 \\ \varphi^6 = 8\varphi + 5 \\ \varphi^7 = 13\varphi + 8 \\ \varphi^8 = 21\varphi + 13 \\ \dots \end{gathered}$$

Apparentemente, questi numeri naturali che moltiplicano la sezione aurea o si sommano ad essa paiono del tutto casuali, ma non è così. Analizzando i coefficienti di φ nelle potenze successive si nota che essi sono tutti termini successivi della successione di Fibonacci, come del resto tutti i termini noti che a tali multipli interi di φ si sommano, con l'unica differenza che la successione di Fibonacci formata dai coefficienti è traslata in avanti di un termine di Fibonacci rispetto alla successione di Fibonacci che formano invece i termini noti. Dunque, riassumendo, sembrerebbe che una data potenza di φ è data dal prodotto dello stesso valore φ per un dato numero di Fibonacci, a cui si aggiunge il termine che all'interno della successione di Fibonacci precede il numero di Fibonacci dato. Ma non è finita qui. Se la potenza data è φ^n, il valore che moltiplica la sezione aurea è il numero della successione di Fibonacci a_n che si trova in *n*esima posizione all'interno della successione. Di conseguenza il numero che a tale multiplo della sezione aurea si somma è a_{n-1}, ossia il numero si Fibonacci che si trova in *(n – 1)*esima posizione all'interno della successione. In effetti, nel caso di φ^3, *2*, che va a moltiplicare φ, è il *terzo* numero di Fibonacci, mentre *1*, che si somma a 2φ, è il *secondo*. Nel caso di φ^4, *3* è il *quarto* numero di Fibonacci, mentre *2* è il *terzo*. Nel caso di φ^5, *5* è il *quinto* numero di Fibonacci, mentre *3* è il *quarto*. Nel caso di φ^6, *8* è il *sesto* numero di Fibonacci, mentre *5* è il *quinto*. E così via. Questa incredibile proprietà della sezione aurea φ viene espressa dalla seguente equazione, dove a_n indica l'*n*esimo termine nella successione di Fibonacci:

$$\varphi^n = a_n\varphi + a_{n-1}$$

Questa equazione è di una bellezza inaudita. Essa crea un potentissimo legame tra la sezione aurea e i numeri della successione di Fibonacci. Ed è la capacità di "unificare" che dona tanta bellezza alle equazioni della matematica.

10 - La formula di Binet

Data la successione di Fibonacci, definita per ricorrenza, come si è visto, dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \end{cases}$$

viste le misteriose e affascinanti caratteristiche dei suoi termini, non stupisce il fatto che i matematici, in preda alle loro ricerche, desiderassero che la musa dei numeri, come direbbe Antonio J. Duran, facesse loro dono di un'equazione elegante che racchiudesse in sé l'intera successione, e permettesse di calcolarne agevolmente i valori. In sostanza, era richiesta una formula che calcolasse, per ogni valore naturale n, l'$n$esimo numero a_n della successione di Fibonacci. In effetti, volendo ad esempio sapere, per $n = 42$, quanto valga a_{42}, un metodo esiste già: sarà sufficiente sommare i valori a_{41} e a_{40}. È palese tuttavia la necessità di eseguire lo stesso ragionamento pure per questi due valori, e così via fino al ricongiungimento con la stessa definizione ricorsiva. La caratteristica principale della sequenza di Fibonacci è in effetti il fatto che essa è definita in maniera ricorsiva, appunto, dunque, volendo conoscere un numero della serie è necessario conoscere tutti quelli precedenti.
La musa si decise a parlare a metà del XIX secolo attraverso il matematico francese Jaques Phillipe Marie Binet (1786-1856), il quale condivise con il mondo questa equazione tanto attesa (anche se in verità essa era forse già nota a Eulero). Tale equazione permette di ricavare qualunque numero di Fibonacci, dato il suo posto nella successione. Essa, matematicamente parlando, associa ad un qualunque numero naturale n, il numero a_n della successione di Fibonacci che si trova in $n$esima posizione. È curioso, a prima vista, notare come essa sia strutturata interamente sulla sezione aurea e sul suo antireciproco:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\varphi^n - \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n\right]$$

Anzitutto, ispira sicuramente ammirazione e meraviglia il fatto che, per ogni valore naturale attribuito alla variabile indipendente n, tale funzione produca solamente valori naturali (come in effetti sono i numeri della successione di Fibonacci). I valori 'gemelli' φ, e $-1 / \varphi$, definiti, come già si è detto, come soluzioni dell'equazione $x^2 - x - 1 = 0$, giocano un ruolo di primo piano in questa equazione che, ancora una volta, fa notare la bellezza della divina proporzione, nonché lo stretto legame che esiste tra essa e i numeri di Fibonacci.
Per calcolare dunque, per $n = 42$, quanto vale a_{42}, è sufficiente sostituire alla variabile indipendente n il valore 42:

$$a_{42} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\varphi^{42} - \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^{42}\right] = 267914296$$

il quale è, ovviamente, un numero naturale come tutti i numeri della successione di Fibonacci. Esso è dunque il *42*esimo numero di Fibonacci, ovvero il numero che all'interno della successione occupa la *42*esima posizione.
La formula di Binet può essere dimostrata applicando il Principio di Induzione Matematica, un potentissimo strumento che rende chiunque lo brandisca sicuro e fiducioso, e suggerisce ancora una volta l'idea che la matematica sia detentrice dei concetti di bellezza e perfezione.

Il Principio di Induzione Matematica stabilisce che, data una proposizione *P* dipendente da un numero naturale *n*, se si verifica che *P*:

- è vera per $n = 0$
- se è vera per *n*, allora è vera anche per $n + 1$

allora *P* è vera per ogni *n* appartenente a *N*.
In effetti, se *P* è vera per $n = 0$, e se inoltre il fatto che sia vera per un qualsivoglia numero naturale *n* implica che sia vera anche per il numero naturale successivo $n + 1$, allora da ciò deriva evidentemente che nessun numero naturale può sfuggire e che *P* è vera per ogni numero appartenente all'insieme *N* dei numeri naturali.
Si applichi dunque il Principio di Induzione Matematica per dimostrare la validità della formula di Binet. Chiaramente, in questo caso non è possibile sostituire nell'equazione $n = 0$, in quanto la successione di Fibonacci parte da $n = 1$. Per questo motivo, il Principio di Induzione viene riformulato, stabilendo che se la proposizione *P*:

- è vera per $n = k$
- se è vera per $n > k$, allora è vera anche per $n + 1$

allora *P* è vera per tutti i numeri naturali maggiori o uguali a *k*.
Anzitutto si verifica immediatamente che, per $n = 1$, si ha che:

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\varphi^1 - \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^1\right] = 1$$

la quale cosa verifica la definizione della successione di Fibonacci. La prima ipotesi del Principio di Induzione si può dunque dire verificata.
In secondo luogo va provato che il fatto, che l'equazione di Binet sia valida per un qualsivoglia *n*, implica che necessariamente sia vera anche per il rispettivo $n + 1$. Si può dunque agevolmente supporre che la proposizione valga per i numeri minori di $n + 1$, dimostrandola poi per lo stesso valore $n + 1$. Se ciò avviene, ne deriva palesemente che il fatto che la proposizione valga per i valori minori di $n + 1$ implica che valga pure per $n + 1$, verificando la seconda ipotesi del Principio di Induzione.
Ebbene, si consideri, per ipotesi induttiva, che:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\varphi^n - \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n\right]$$

e che:

$$a_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\varphi^{n-1} - \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^{n-1}\right]$$

Deve verificarsi che:

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$$

ovvero che, sostituendo le ipotesi induttive:

$$a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\varphi^n - \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n\right] + \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\varphi^{n-1} - \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^{n-1}\right]$$

Raccogliendo il reciproco della radice di 5, fattore comune, si ha che:

$$a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\varphi^n - \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n + \varphi^{n-1} - \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^{n-1}\right]$$

ossia che:

$$a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\varphi^n + \varphi^{n-1} - \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n - \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^{n-1}\right]$$

e dunque che:

$$a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\varphi^n + \varphi^n/\varphi - \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n - \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n\Big/\left(-\frac{1}{\varphi}\right)\right]$$

Ora, raccogliendo parzialmente la ragione aurea e il suo antireciproco (chiaramente elevati alla *n*), si ricava che:

$$a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\varphi^n\left(1 + \frac{1}{\varphi}\right) - \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n\left(1 + \frac{1}{-\frac{1}{\varphi}}\right)\right]$$

Come già si è visto, il numero aureo e il suo antireciproco sono definiti come le due soluzioni reali dell’equazione d’oro:

$$x^2 - x - 1 = 0$$

dalla quale si deduce l’equazione equivalente:

$$x^2 = x + 1$$

ovvero, moltiplicando entrambi i membri per il reciproco dell’incognita:

$$x = 1 + \frac{1}{x}$$

Ne deriva che, sostituendo il numero aureo e il suo antireciproco:

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$$

e che:

$$-\frac{1}{\varphi} = 1 + \frac{1}{-\frac{1}{\varphi}}$$

Sostituendo i valori della sezione aurea e del suo antireciproco all'equazione precedente, si deduce che:

$$a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\varphi^n(\varphi) - \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n\left(-\frac{1}{\varphi}\right)\right]$$

la quale cosa equivale infine a dire, per le proprietà delle potenze, che:

$$a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\varphi^{n+1} - \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^{n+1}\right]$$

Si dimostra dunque che la formula di Binet è effettivamente valida per *n + 1*, verificando quindi anche la seconda ipotesi del Principio di Induzione. Essendo verificate tutte le ipotesi di tale Principio, ne deriva necessariamente la tesi, e cioè che la formula di Binet è vera per ogni valore naturale maggiore o uguale a *1*, ossia per tutti i numeri naturali (escluso chiaramente il valore 0, non essendo la successione di Fibonacci definita per n pari a questo numero). La formula di Binet si può quindi dire dimostrata. Essa costituisce un'altra mirabile unificazione tra la sezione aurea e i numeri di Fibonacci, e probabilmente, oltre alla neoclassica armonia fra le parti con cui si pone, è questo il motivo per cui è tanto bella.

11 - Il Dio matematico di Cartesio e Newton

I figli della rivoluzione scientifica, come si è visto con Keplero, sono mossi da grande ottimismo nella ricerca delle verità scientifiche, confidando nell'onnipotenza e nell'onnipresenza della matematica, nonché nella sua incredibile efficacia nel descrivere in modo sintetico la natura delle cose. Mentre la filosofia aristotelica cadeva e la bibbia abbandonava gradualmente il suo ruolo di verità indubitabile in ambito cosmologico, i filosofi iniziavano a cercare nuove fondamenta su cui erigere la conoscenza umana. E colui che più di altri si sforzò nella ricerca di un'unica formula che imponesse un ordine all'intero pensiero razionale e unificasse tutto lo scibile umano fu un giovane gentiluomo francese di nome René Descartes, italianizzato in Cartesio (1596-1650).
Cartesio è un pensatore immenso ed è davvero impegnativo riassumere tutta la sua attività razionale in poche righe. La sua analisi filosofica muove dallo studio di tutto il sapere umano fino alla sua epoca, che egli sottopone a una rigorosa critica. Da questa analisi Cartesio ricava una decisa conclusione: il sapere, con l'unica eccezione della matematica, *non* presenta fondamenta solide, non è cioè certo. Perché dunque il sapere è oggetto di discussione? Perché non presenta premesse evidenti condivise da tutti che non siano oggetto di discussione. È dunque necessario porre queste basi auto – evidenti per poterci costruire un sapere cumulativo che sia una buona volta oggettivo e dunque universale. Occorre anche definire un metodo che valga per tutte le diverse discipline del sapere e che ne garantisca l'evidenza e dunque la verità assoluta. Solo così facendo sarebbe stato possibile, secondo il filosofo, avviare un nuovo sapere assoluto, indicando al contempo la direzione per unificare l'intera conoscenza umana solo per mezzo della ragione.
L'idea da cui parte Cartesio è il fatto che l'unico ambito della conoscenza che abbia prodotto un sapere cumulativo, sistematico e indubitabile sia la matematica. Solo il metodo seguito dalla matematica produce la certezza:

> *"Quelle catene di ragionamenti, lunghe, eppure semplici e facili, di cui i geometri si servono per pervenire alle loro più difficili dimostrazioni, mi diedero motivo a supporre che nello stesso modo si susseguissero tutte le cose di cui l'uomo può avere conoscenza, e che, ove si faccia attenzione di non accoglierne alcuna per vera quando non lo sia, e si osservi sempre l'ordine necessario per dedurre le une dalle altre, non ce ne fossero di così lontane alle quali non si potesse arrivare, né di così nascoste che non si potessero scoprire."*[1]

In altre parole, Cartesio era convinto che il metodo della matematica potesse e dovesse essere esteso a tutte le varie discipline che compongono il sapere. Solo così facendo il sapere sarebbe divenuto "certo". Da questo punto di vista Cartesio va oltre la concezione di Galileo secondo cui solo l'universo fisico è scritto nel linguaggio della matematica. Per l'ottimista Cartesio tutta la conoscenza umana segue la sua logica:

> *"Tale disciplina infatti deve contenere i primi rudimenti della ragione umana, e deve estendersi alle verità che si possono trar fuori da qualsiasi soggetto; e, a dirla apertamente, io son persuaso che essa sia più importante di ogni altra cognizione a noi data umanamente, essendo quella che è fonte di tutte le altre."*[1]

Cartesio desiderava, detto in altri termini, dimostrare che il mondo della fisica, descrivibile per mezzo della matematica, poteva essere rappresentato senza affidarsi alle percezioni sensoriali, che sono spesso fallaci. Nella costruzione del sapere non ci si può cioè affidare ai sensi, non si deve contare su nessun altro strumento al di fuori della ragione, unica facoltà su cui edificare la conoscenza. In effetti i sensi sembrano offrire all'uomo una conoscenza indubitabile, ma non si può negare l'esistenza di inganni sensoriali. Nel sogno ad esempio appare come reale ciò che al risveglio si rivela essere illusorio. D'altra parte:

> *"Non vi sono segni abbastanza certi che permettano di discriminare nettamente la veglia dal sonno"*[2]

In conclusione, non si può negare che i sensi ingannino, e che dunque, secondo Cartesio, l'uomo per conoscere possa affidarsi unicamente alla sua ragione. Su questa idea si basa la corrente filosofica del razionalismo, della quale un grande esponente fu anche Spinoza. I razionalisti sono convinti che si possa dubitare di tutto tranne che del metodo della ragione matematica: questa disciplina parte da alcune verità indubitabili per la loro evidenza, dette postulati, e da queste opera solamente delle deduzioni per arrivare alla dimostrazione di realtà più complesse che trovano la loro unica *condicio sine qua non* nei postulati enunciati all'inizio. Non si può dunque dubitare del metodo deduttivo e del sillogismo: la logicità del ragionamento deduttivo è chiara, evidente e distinta, e quindi indubitabile. Di tutto il resto si può, anzi si deve, dubitare.
È anche vero tuttavia, ragiona Cartesio, che, qualora esistesse un "genio maligno" che volesse ingannare intenzionalmente l'uomo facendogli apparire come dedotto, evidente e distinto ciò che è falso, allora anche le più palesi falsità gli apparirebbero reali in quanto logiche. Se tale ipotesi fosse vera, come potrebbe la ragione rendersene conto? Come ci si potrebbe rendere conto degli inganni di questo ipotetico genio maligno che impedirebbe persino di dubitare facendo assume per vero il conosciuto? Il ragionamento di Cartesio ha una sua logicità: non si può escludere la possibilità che anche il metodo deduttivo sia falso in quanto passibile degli inganni di un genio maligno. Ne deriva che nemmeno la matematica, un attimo prima giudicata indubitabile, può essere accettata per vera. Si deve dubitare anche dei più logici giudizi matematici. Dunque non esistono certezze.
Ma, di fronte a tale "dubbio iperbolico", una verità che non può essere posta in dubbio esiste, e cioè che esiste qualcuno che sta dubitando. Nel momento in cui si dubita, non si può negare l'esistenza di una realtà che sta dubitando. In effetti se l'io dubita, esso esiste come essere dubitante, come essere che sta pensando. Da qui la celebre sentenza di Cartesio:

> *"Cogito, ergo sum."*[2]

A questo punto Cartesio procede secondo il metodo deduttivo della matematica: partendo da questa prima verità indubitabile, da questo "assioma", attraverso il metodo deduttivo, il filosofo inizia la costruzione del proprio sistema.
Tentando di riassumere il più possibile il pensiero cartesiano, il filosofo procede rendendosi conto dell'esistenza nella mente dell'uomo di un'idea fondamentale per lo sviluppo del sistema, l'idea di Dio. È palese che tale idea non può essere stata creata dalla mente dell'uomo. Questa infatti è qualcosa di limitato e di finito, mentre l'idea di Dio è infinita, perfetta e illimitata. Poiché la creatura è sempre inferiore al suo creatore, la mente umana non può avere concepito di per sé un contenuto a tal punto superiore. L'idea di un Dio infinito dunque non può che essere causata da un Dio infinito, il quale, di conseguenza, deve necessariamente esistere.
Il fatto che Dio esista ha per Cartesio un'importante conseguenza, e cioè che il metodo deduttivo della matematica è valido. Se Dio esiste, infatti, non può permettere che l'uomo si inganni quando usa la ragione che Egli stesso gli ha fornito. In altre parole, Dio, che esiste per il ragionamento precedente, si fa garante del fatto che i ragionamenti fondati sulla ragione siano necessariamente veri e che il genio maligno non esista. Ne deriva che le idee che l'uomo percepisce come chiare, evidenti e distinte sono vere.
A questo punto Cartesio spiega come, per raggiungere la conoscenza, sia sufficiente adottare il rigoroso sistema deduttivo della matematica come regola di vita, e estenderlo ad ogni ambito del sapere, in quanto tutta la realtà è regolata dall'onnipresente matematica. Per questo motivo Cartesio studiò intensamente la matematica, al fine di ricavarne le regole generali del metodo, che enunciò nel *Discorso sul metodo*. In tale trattato viene espresso come il sapere debba basarsi interamente sul metodo deduttivo, il quale necessita solamente di alcuni postulati indubitabili. Per questo motivo Cartesio enuncia la "regola dell'evidenza":

"Non accogliere mai nulla per vero che non conoscessi esser tale con evidenza."[1]

In secondo luogo, la "regola dell'analisi" impone di *dividere ogni problema in tante parti, per meglio risolverlo*[1]. A ciascuna di queste parti va applicata la regola dell'evidenza. In seguito, con la "regola della sintesi" si ricompone una visione d'insieme, facendo notare che tutto il problema preso in questione non è che una naturale conseguenza dei postulati fissati in partenza. Infine, con la "regola dell'enumerazione" si controllano le fasi precedenti, al fine di evitare omissioni e salti logici.
Partendo dalla concezione secondo cui la matematica è il sapere da cui derivano e dipendono tutti gli altri saperi, Cartesio operò nell'ambito della matematica quello che il filosofo empirista inglese John Stuart Mill (1806-1873) definì "il più grande passo che sia stato mai fatto nel progresso delle scienze esatte"[3], ovvero il sistema cartesiano. Cartesio partì dalla constatazione quasi banale del fatto che una coppia di numeri determina univocamente la posizione di un punto sul piano senza ambiguità. Questo dato venne sfruttato per elaborare l'importante branca della matematica su cui si basa la moderna analisi: la "geometria analitica". Ancora oggi, in onore di Cartesio, la coppia di rette ortogonali che si intersecano a formare il sistema di riferimento da lui creato, è detta "sistema di coordinate cartesiane" o "piano cartesiano". Attraverso tale importante innovazione, la geometria e l'algebra non erano più due branche separate della matematica, ma due rappresentazioni delle stesse verità. Un'equazione che descrive una curva contiene implicitamente ogni proprietà immaginabile di quella curva, compresi i teoremi della geometria euclidea. Cartesio aveva ragione: gran parte del sapere moderno deriva tutta dalla matematica. Si consideri il concetto matematico di funzione, ossia di relazione tra le grandezze x e y in modo tale che a ogni valore di x corrisponda un solo valore di y. Ebbene, le funzioni sono ovunque. Sono il pane quotidiano degli scienziati, degli statisti e degli economisti moderni. Possono addirittura acquisire il rango di "leggi della natura" quando descrivono matematicamente un comportamento a cui tutti i fenomeni naturali obbediscono. E tutto questo è dovuto all'importante intuizione di Cartesio, con la quale iniziò la ma tematizzazione di quasi tutto. Dio è un matematico. Non soltanto la matematica ottenne la facoltà di descrivere una grande moltitudine di fenomeni, ma la matematica stessa divenne più ampia, ricca e unificata. Come esprime il matematico italiano Lagrange:

> *"Finché l'algebra e la geometria procedettero su terreni separati, il loro progresso fu lento e le applicazioni limitate. Ma quando queste scienze si unirono, trassero l'una dall'altra nuova vitalità e da allora procedettero con rapido passo verso la perfezione."*[4]

Ritenendo che nell'universo vigesse un rigido meccanicismo che derivasse dalla visione di un Dio matematico che gli avesse dato origine, per Cartesio nell'universo esistevano delle leggi immutabili che potevano essere conosciute solamente per mezzo della ragione, in quanto ogni aspetto dell'universo era scritto in termini matematici. Per questo motivo Cartesio costruì tutta la sua teoria fisica, detta teoria dei vortici, solamente attraverso il metodo deduttivo della ragione. Secondo il matematico, il Sole era al centro di un vortice formato dalla materia cosmica in cui anche i pianeti venivano trascinati, formando anch'essi a loro volta dei vortici con i rispettivi satelliti. Sebbene errata, come farà notare Newton, tale teoria dei vortici si rivelò molto innovativa, in quanto tentava di formulare un sistema unitario che si basasse sulle stesse leggi applicate in tutto l'universo. Non esisteva dunque alcuna differenza tra fenomeni terrestri e celesti: la Terra, con Cartesio, entrava in un universo che obbediva a leggi fisiche costanti, uguali in tutto l'universo. Tale importante e moderna visione dell'universo, per quanto banale possa sembrare, è ancora oggi una concezione fondamentale nel campo delle scienze, in quanto permette la formulazione di teorie che descrivano l'universo in modo unitario. Essa nacque in generale con i pensatori e gli scienziati della rivoluzione scientifica e fu fondamentale per ciascuno di loro. In particolare essa trovo la sua massima esaltazione nella teoria di gravitazione universale di Newton (1642 – 1727), all'interno

della quale confluirono tutte le osservazioni e le scoperte degli altri figli della rivoluzione scientifica in un'armonica unità.
Il metodo di ricerca di Newton sarà definito metodo induttivo – deduttivo, lo stesso utilizzato da Galileo. Una sorta di metodo misto tra quello rigorosamente deduttivo dei razionalisti e quello eccessivamente induttivo degli empiristi. In particolare Newton, riprendendo il metodo Aristotelico, era convinto che l'induzione fosse fondamentale per ricavare i postulati, i principi e gli assiomi da cui poi procedere attraverso la deduzione matematica per costruire l'intero sistema scientifico. Ovviamente, per quanto riguarda l'induzione, che non è un metodo di ricerca così accurato e rigoroso come la deduzione, Newton era consapevole del limite di tale *modus operandi* che nel XVIII secolo espliciterà Hume, e cioè che, muovendo da un numero finito di osservazioni, non sarebbe stata possibile la formulazione di proposizioni sicuramente vere, ma solamente probabili, ma la giudicava l'unico sistema possibile per giungere alla conoscenza generale, che costituisce il solo materiale conoscitivo sufficientemente consistente per iniziare la deduzione.
Newton, in altre parole, non si lasciò turbare dai limiti del metodo induttivo, in quanto era convinto dell'*uniformità della natura*, concetto fondamentale di tutta la rivoluzione scientifica. Secondo Newton, per ogni data causa che avviene all'interno dell'universo può esistere uno e un solo effetto (oppure un insieme di effetti) che deve necessariamente avvenire qualora si verifichi la causa data. Partendo da questa convinzione, per certi versi molto moderna, è possibile generalizzare il nesso causale e porre dunque leggi fisico – matematiche *universali*. In secondo luogo, per Newton la natura è *omogenea*, ossia regolare. Si comporta sempre allo stesso modo, possiede qualità universali. Questa concezione newtoniana legittima la generalizzazione oggettiva e rende plausibile l'induzione. A tali *regole del filosofare* si accompagna l'idea secondo cui la natura sia *semplice*: se viene individuata una legge universale per un dato fenomeno, non ne vanno ricercate altre, essa è da considerarsi vera *fino a che non si presentino altri fenomeni mediante i quali o sono rese più rigorose o fatte suscettibili di eccezioni*[5].
Aspetto centrale di questa concezione newtoniana dell'universo è la possibilità di trattare in modo matematico i dati, in quanto la natura, per l'ordine e l'armonia con cui si pone, è scritta attraverso delle equazioni che l'uomo ha la possibilità di scoprire attraverso la sua ragione matematica. Ogni singolo fenomeno della realtà è dunque in potenza esprimibile attraverso leggi rigorosamente matematiche. Persino i colori, da sempre ritenuti realtà qualitative e non misurabili, esaminati dall'attenta ragione di Newton, vengono associati a precisi angoli di rifrazione e dunque quantificati. In sostanza, nella mentalità di Newton e degli altri figli della rivoluzione scientifica è presente un inesauribile ottimismo, che si realizza in primo luogo nella fiducia nella matematica, verità assoluta che permette di conoscere l'universo e contemplare il volto di Dio. L'impostazione di Newton sarà definita da Koyré "ontologia matematica", concezione della fisica moderna secondo cui *esiste solo ciò che è traducibile in termini matematici*[6].
La monumentale opera di Newton in cui questi realizzava una sintesi di tutto il sapere costruito durante la rivoluzione scientifica, i *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, uscì per la prima volta nel 1687. In tale vangelo della nuova scienza, il matematico riprende esplicitamente la concezione cartesiana del sapere, secondo la quale ogni ambito dello scibile umano può essere espresso attraverso il metodo deduttivo della matematica. Come già si è detto, in effetti, secondo la mentalità dei pensatori della rivoluzione scientifica, il *modus operandi* della matematica, di cui offriva un esempio rigoroso quasi duemila anni prima Euclide con i suoi *Elementi*, era il più congeniale nella descrizione della realtà. In altre parole, il "metodo geometrico" offerto dal sommo Euclide sembrava costituire il fondamento stesso della conoscenza, e, non a caso, nel corso del Seicento esso fu il modello seguito dai maggiori pensatori, quali Cartesio, Hobbes e Spinoza. Anche Newton pareva dunque attratto dal metodo matematico e, ritenendolo l'unico sistema valido per descrivere l'intero universo, lo pose come ossatura logica dei suoi *Principia Mathematica*. In questo modo Newton realizzava una sintesi tra metodo induttivo e metodo deduttivo: il momento induttivo era necessario per formulare gli assiomi, mentre quello deduttivo derivava da essi tutta la scienza. Newton presupponeva infatti che le leggi individuate per via induttiva costituissero un sistema esaustivo per la spiegazione dei fenomeni, che attraverso il procedimento deduttivo risultavano di

seguito unificati. Dedurre i fenomeni dalle leggi generali significa dunque spiegarli e dimostrarne la necessità, in quanto, essendo deducibili, non è possibile immaginare che siano diversi da come sono. Nell'universo vige dunque un determinismo necessario e indubitabile. Nella prefazione ai *Principia Mathematica* lo stesso Newton afferma:

> *"Dai fenomeni celesti, mediante le proposizioni dimostrate matematicamente, vengono derivate le forze della gravità, per effetto delle quali i corpi tendono verso il sole e i singoli pianeti. In seguito da queste forza, sempre mediante proposizioni matematiche, vengono dedotti i moti dei pianeti, delle comete, della luna e del mare."*[7]

L'intera opera di Newton si pose come sintesi di tutto il sapere maturato durante la rivoluzione scientifica dagli altri scienziati che lo precedettero. Dice Mario Livio:

> *"Quell'opera colmò il divario tra il Cielo e la Terra, fuse i campi dell'astronomia e della fisica e pose l'intero cosmo sotto un unico ombrello matematico."*[8]

Da assiomi e definizioni venivano ricavate le leggi fondamentali del moto, per la prima volta applicate sia alla fisica celeste sia a quella terrestre. Per la prima volta ciò che avveniva sulla Terra avveniva anche in ogni altro punto dell'universo, in quanto le leggi che governavano la natura erano per la prima volta universali. Per la prima volta la forza che tratteneva la Luna nella sua orbita attorno alla Terra e la gravità terrestre che faceva cadere la mela al suolo diventavano esattamente la stessa cosa.
In questo modo Newton definì una sistematizzazione della meccanica moderna che rimase fondamentalmente invariata fino agli ultimi decenni dell'Ottocento. Le leggi della dinamica già individuate da Galileo e da Cartesio, nonché le leggi del moto dei pianeti formulate da Keplero venivano tutte dedotte con rigore matematico dagli assiomi e dalle definizioni posti da Newton, formando dunque un sistema complessivo profondamente coerente che interpretava in modo unitario i vari contributi particolari, riassunti e sintetizzati nella *legge di gravitazione universale*. Dalle tre leggi della dinamica (*principio di inerzia*, *principio di proporzionalità diretta tra forza e accelerazione* e *principio di azione e reazione*), unitamente alle definizioni iniziali, Newton dedusse corollari e teoremi che spiegavano ogni movimento, sia terrestre sia celeste, da un punto di vista unitario e universale.
Nella rivoluzione scientifica la leggi sono universali, valgono cioè allo stesso modo in tutto l'universo. Per questo motivo, un aspetto centrale della teoria di Newton è l'unificazione della fisica terrestre e di quella celeste, sottoposte entrambe alle stesse leggi. Queste sono prima enunciate su base esclusivamente matematica e solo in un secondo momento vengono applicate all'astronomia, esplicitando i corollari più particolari che da esse derivano. Per dare un esempio dell'unità che si percepisce leggendo i *Principia Mathematica*, si tenga presente che le leggi di Keplero vengono fatte derivare necessariamente dalle leggi della dinamica. È stupefacente pensare come, poste tali leggi e posto che la forza di attrazione gravitazionale vari inversamente al quadrato della distanza, necessariamente si ricava attraverso deduzioni matematiche che le orbite dei pianeti devono necessariamente essere delle ellissi. In generale, tutte le osservazioni di Copernico, Galileo e Keplero trovavano all'interno della sintesi newtoniana una dimostrazione partendo dai principi generali della meccanica, non più solamente da una base osservativa. La meccanica è in questo modo unificata all'interno di un sistema unitario, anzi, all'interno di un'unica equazione, la legge di gravitazione universale. Essa afferma che due corpi (dotati di massa) si attraggono con una forza direttamente proporzionale al prodotto delle loro masse e inversamente proporzionale al quadrato della distanza fra i loro centri:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Questa bellissima equazione sintetizza tutto il sapere della rivoluzione scientifica.
Nella seconda edizione dei *Principia Mathematica* comparvero come appendici alcuni commenti memorabili di Newton su Dio. In una lettera a Cotes del 28 marzo 1713, meno di tre mesi prima del completamento di tale seconda edizione, Newton diceva:

> *"Sicuramente compete alla filosofia naturale di disquisire di Dio a partire dai fenomeni della natura."*[9]

Newton era convinto dell'esistenza di un Dio matematico che avesse creato l'universo attraverso equazioni e caratteri matematici. Dio viene in particolare visto come un essere perfetto che interviene di tanto in tanto nell'universo per ripristinarne l'ordine che tende gradualmente al decadimento (e ciò sarà profondamente criticato da Leibniz). Si consideri ad esempio il movimento: esso, fa notare Newton, è soggetto a una costante diminuzione, perché negli urti una certa quantità del moto totale dell'universo decade. Da questo punto di vista, l'universo tenderebbe alla continua diminuzione del moto complessivo (entropia), fino a raggiungere un equilibrio stabile. Affinché il movimento si conservi è necessaria una grande varietà di forze, la cui complessità porta Newton a considerare necessaria l'esistenza di Dio. A differenza del Dio di Cartesio, il Dio di Newton interviene nell'universo (ad esempio attraverso le comete) per ripristinarne l'ordine e per garantirne la continuità in ambito fisico. In ogni caso, la natura è, per Newton, l'immagine di Dio, e questo costituisce il fondamento di una verità oggettiva, in quanto posta da Dio direttamente nelle cose e nei rapporti matematici tra esse. Questa concezione accomuna moltissimo Newton a Cartesio, profondamente credenti come la maggior parte dei loro contemporanei: per entrambi i due pensatori Dio si fa garante del fatto che la realtà possa essere conosciuta dall'uomo senza ambiguità, attraverso quella stessa matematica che Dio ha posto come intelaiatura logica dell'universo.
Per Newton, l'esistenza stessa del mondo e la regolarità matematica del cosmo erano prove della presenza di Dio:

> *"Questa elegantissima compagine del Sole, dei pianeti e delle comete non poté nascere senza il disegno e la potenza di un ente intelligente e potente. E se le stelle fisse sono centri di analoghi sistemi, tutti questi, essendo costruiti con un identico disegno, saranno soggetti alla potenza dell'Uno."*[10]

Anche il fatto che l'intero cosmo fosse governato dalle stesse leggi e apparisse stabile era per Newton un'ulteriore prova dell'esistenza della mano divina a guidarlo, *soprattutto in quanto la luce delle stelle fisse è della stessa natura della luce del Sole*[10]. In generale dunque per Newton Dio era un matematico in senso letterale: il Dio Creatore che aveva generato un mondo fisico governato da leggi matematiche.
Il Dio di Cartesio non era, a differenza di quello newtoniano, una realtà che si intuisce notando l'armonia matematica dell'universo, bensì, come già si è detto, un principio da cui bisogna partire per avere una garanzia dell'attendibilità del raziocinio umano. In particolare il filosofo scrisse:

> *"Le verità matematiche, che voi chiamate eterne, sono state stabilite da Dio e ne dipendono interamente, come fanno tutte le restanti creature."*[11]

Dunque il Dio matematico di Cartesio non solo aveva creato le verità matematiche, ma aveva anche dato origine al mondo fisico, che si fonda a sua volta interamente sulla matematica. Ne deriva che gli uomini *scoprono soltanto la matematica, non la inventano*.
In conclusione, si può dire ammirevole il duro lavoro dei due intellettuali, Cartesio e Newton. Entrambi riuscirono a delineare la coerente visione di un universo armonico, retto da precise leggi matematiche stabilite da Dio e, di conseguenza, interamente conoscibile dall'uomo attraverso il metodo scientifico che andava gradualmente delineandosi. Fondamentale in questa visione dei figli

della rivoluzione scientifica è un aspetto particolare, e cioè che la realtà è uniforme, governata da equazioni determinanti leggi della natura universali e necessarie che valgono indistintamente in ogni angolo dell'universo. La matematica, per la quale tutti questi sviluppi produssero un entusiasmo a cui forse non si assisteva più dal tempo degli antichi greci, si fondeva inevitabilmente con la fisica, fino a confondersi con essa (scientifico è ciò che è quantificabile) In particolare, grazie alla rivoluzionaria innovazione di Cartesio, il piano cartesiano, e grazie al monumentale lavoro di Newton nel campo dell'analisi infinitesimale, che nasceva proprio sulla base del concetto di *funzione* introdotto con *La geometria* di Cartesio (molto amata e letta più volte dallo stesso Newton), i campi più astratti della matematica, come il calcolo infinitesimale (calcolo dei limiti, calcolo differenziale e calcolo integrale), divennero l'essenza delle spiegazioni della realtà fisica. I matematici erano animati dall'inesauribile ottimismo di chi è convinto che ogni singolo fenomeno dell'universo sia quantificabile, sereni e fiduciosi che il mondo fosse la loro terra di conquista, e che nascondesse illimitate possibilità di scoperta.

12 - Il limite della successione e il calcolo dell'infinito

Il concetto di "infinito" tocca ogni disciplina del sapere umano, dalla letteratura alla matematica, dall'arte alla filosofia. Si può ritenere che tale "idea" abbia origine da un'astrazione che la mente dell'uomo compie a partire dalla percezione sensibile. Chiunque, partendo dai sensi, è in grado di percepire la naturalissima idea di "finito", di "limitato", di qualcosa che ha un contorno ben definito. Ebbene, l'infinito può essere intuito come *negazione* del finito, ad esso si giunge dunque per astrazione e sicuramente non per esperienza.
Nel mondo classico l'idea di infinito venne duramente ripudiata. Nella mentalità dell'intellettuale greco antico l'infinito era in effetti avvertito come qualche cosa di disarmonico e dissonante, in quanto indefinito e, di conseguenza, *indefinibile*. Perché l'infinito incuteva tanto terrore nei filosofi greci? Perché questi non si ritenevano alla sua altezza, non si sentivano in grado di *misurarlo*, di *quantificarlo*, di *dominarlo*, di poterlo comprendere appieno. Si è già visto un esempio di tutto ciò nei Pitagorici, nel ribrezzo che provavano nei confronti dei numeri pari, ritenuti inconclusi e dunque illimitati, o nei confronti degli irrazionali, numeri che non possono essere espressi unitariamente con una sola frazione, ma che necessiterebbero al contrario di una somma di infinite frazioni per poter essere rappresentati nella loro esatta interezza. Per questo motivo l'infinito era giudicato un mostro, per il fatto che andava oltre le capacità cognitive della mente umana, per il fatto che, a differenza dell'armonico finito, non può essere misurato, definito e determinato.
Una vicenda interessante che ha come protagonista l'infinito è quella del *paradosso di Achille e della tartaruga*, formulato dal filosofo Zenone di Elea nel V secolo a.C. per dimostrare che il movimento non esiste. Il paradosso spiega che, dovendo Achille raggiungere la tartaruga che si trova a distanza *1*, l'eroe dovrebbe anzitutto percorrere *1/2* del percorso, dopodiché le metà del rimanente, ossia *1/4*, poi ancora metà, *1/8*, e così via. A conti fatti, Achille non raggiungerà mai la tartaruga, in quanto sarebbe necessario percorrere uno spazio infinito. Di fronte a tale evidenza, i Greci si risolsero in un "compromesso", che venne esplicitato da Aristotele (384 – 322 a.C.) nel libro III della *Fisica*. Secondo il filosofo è possibile ammettere logicamente l'*infinito in potenza*:

> *"È chiaro che la negazione assoluta dell'infinito è un'ipotesi che conduce a conseguenze impossibili, di modo che l'infinito esiste potenzialmente, cioè, l'infinito è per addizione o divisione."*[1]

Al contrario, l'infinito in sé, l'*infinito in atto*, come cosa completa, era bandito dal filosofo, non era cioè permesso:

> *"Non è possibile che l'infinito esista come un essere in atto o come una sostanza ed un principio. [...] La grandezza non è di fatto infinita, anche se infinitamente divisibile."*[1]

In questo modo Aristotele in un certo senso tentava disperatamente di aggirare il problema che Zenone aveva posto, proibendo di considerare un segmento come una collezione di infiniti punti allineati. Ma i matematici non potevano rimanere sottomessi a questa imposizione di Aristotele. Essi avevano il chiaro obiettivo di conquistare l'infinito, e il primo fra coloro che ci riuscirono fu Archimede.
Si può ritenere che Archimede di Siracusa, vissuto nel III secolo a.C., avesse in un certo senso intuito le potenzialità del *calcolo integrale* quasi due migliaia di anni prima che Newton e Leibniz lo inserissero all'interno della disciplina dell'analisi. Tramite il *metodo di esaustione*, elaborato da Eudosso di Cnido ancora nel IV secolo, Archimede aveva determinato la formula per la lunghezza della circonferenza, per l'area del cerchio e per l'area del segmento parabolico (nonché per numerose superfici e volumi di rotazione). Si può vedere nel metodo di esaustione una prima versione del calcolo integrale, in quanto si basava sull'idea di approssimare una superficie curva attraverso una sequenza di poligoni inscritti e circoscritti dal numero di lati via via crescente, con

l'unica pecca che non contemplava l'importante concetto di *limite*, introdotto solamente nel XVII secolo.
In sostanza Archimede saltò la proibizione aristotelica dell'infinito in atto. In effetti, nei ragionamenti di Archimede per il calcolo dell'area di un segmento di parabola entra in azione l'infinito in atto, ogni volta che una superficie si considera formata da una collezione infinita di segmenti retti. L'infinito, dunque, per quanto potesse spaventare gli intellettuali greci, non poteva sedare la volontà della matematica di dominarlo, di trattarlo attraverso termini razionali, di misurarlo con quella calma, quella razionalità, quell'ordine, quell'armonia neoclassica fra le parti, che solamente alla matematica compete.
Nei capitoli precedenti sono già state calcolate alcune espressioni infinite: è ora proposto il semplicissimo calcolo della somma infinita posta da Zenone:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots$$

Sia l'espressione posta uguale a *x*:

$$x=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots$$

e siano raddoppiati ambo i membri:

$$2x=\frac{2}{2}+\frac{2}{4}+\frac{2}{8}+\frac{2}{16}+\cdots$$

Semplificando le infinite frazioni si evince che:

$$2x=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots$$

Si può notare che la somma evidenziata in celeste qui sotto eguaglia l'incognita *x*:

$$2x=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots$$

dunque:

$$2x=1+x$$

e quindi:

$$x=1$$

La somma infinita che Zenone voleva spacciare per "infinito" si rivela in verità pari all'unità naturale. Questo prova che una grandezza non è da considerarsi infinita se, concettualmente, è divisibile in infinite parti. Ne deriva che, in geometria, si può legittimamente considerare un segmento composto da infiniti punti e predicarlo tuttavia finito.

La paura che i greci avevano dell'infinito cominciava ad essere superata con il cristianesimo, che associava il concetto di Dio al concetto di infinito. La tradizione scolastica, "sottomessa ai dogmi aristotelici", continuando a vietare all'uomo la comprensione dell'infinito in atto, permetteva tuttavia la sua discussione in ambito teologico, e per questo motivo Sant'Anselmo d'Aosta e San Tommaso d'Aquino, nelle loro dimostrazioni dell'esistenza di Dio, finivano per considerare Questo come infinito in atto. Questa concezione si prolungò fino al XVII secolo, quando trovò la sua massima realizzazione in moltissimi pensatori che ammettevano con estrema sicurezza l'infinito in atto. Si pensi alle parole di Cartesio:

> *"Per Dio intendo una sostanza infinita, eterna, immutabile, indipendente, onnisciente, onnipotente. [...] Riserviamo solo a Dio la qualifica di infinito."*[2]

di Spinoza:

> *"Intendo per Dio un essere assolutamente infinito, ossia una sostanza costituita da un'infinità di attributi ciascuno dei quali esprime la sua essenza eterna ed infinita."*[3]

e di Leibniz:

> *"Ci tocca giudicare che questa Sostanza Suprema, che è unica, universale e necessaria debba essere incapace di limiti e debba contenere tanta realtà quanta sia possibile."*[4]

Parallelamente, nel XVII secolo la matematica aveva ormai conquistato appieno il concetto di infinito, installatosi definitivamente nel cuore dei più prolifici matematici, quali al primo posto Newton e lo stesso Leibniz, considerati i padri del calcolo infinitesimale, in quanto riuscirono, indipendentemente l'uno dall'altro, a riordinare il lavoro e le idee di diversi matematici del Seicento, quali Cavalieri, Fermat, Pascal, Wallis, Torricelli, Barrow.
Si giunge poi al XVIII secolo con il matematico svizzero Eulero (1707 – 1783) e con il filosofo tedesco Kant (1724 – 1804), entrambi attratti dal concetto di infinito. Nell'*Introductio in analysin infinitorum* Eulero, senza contemplare i concetti di calcolo differenziale e integrale, insegna ai lettori a maneggiare quantità infinitamente grandi e piccole. In particolare sono contemplati studi di funzioni elementari e calcoli di somme e prodotti infiniti. L'abilità espositiva di Eulero e l'intenso ragionamento sul concetto di "infinito" rendono l'*Introductio* uno dei testi più belli di tutta la storia della matematica. Lo scopo di Eulero è di fornire ai lettori una certa pratica nel maneggio degli infiniti, una certa intuizione sulla maniera in cui essi funzionano. Per questo motivo, nel testo non compare alcuna precisa definizione di *infinito* e di *infinitesimo*, concetti che Eulero vuole spiegare attraverso l'intuizione e non attraverso la deduzione. La quantità infinitesimale è considerata una quantità indefinitamente piccola, ma non coincidente con lo zero. Per questo motivo essa può apparire come denominatore nelle frazioni, ma può anche essere ritenuta zero, qualora sia necessario semplificare espressioni. Al contrario, la quantità infinita è una quantità che rimane invariata quando le si somma un qualunque numero reale, ovvero un'ipotetica quantità N tale che sia vera l'inquietante quanto assurda uguaglianza:

$$N + 1 = N$$

Partendo da queste premesse, Eulero nell'*Introductio* maneggia gli infiniti in modo puramente intuitivo. Gli infiniti, come ammonivano i greci, sono entità pericolose che godono di proprietà strane e inconcepibili. Eulero, al contrario, pur giocando sulla facoltà dell'intuizione, riusciva a misurarli e a definirli con accuratezza e compostezza, come viene espresso dal matematico Antonio J. Duran nel seguente frammento:

> *"Per i Greci l'infinito fu una specie di bestia terribile, tipo un minotauro gigantesco dal quale bisognava fuggire. Invece Eulero non fuggì: al contrario, si avvicinò al mostro, gli accarezzo la schiena e lo aggiogò in modo tale da rendere fertile un campo prima sterile. È ammirevole la docilità con cui l'infinito si mostra nei maneggi di Eulero. Una docilità che, data l'idiosincrasia del concetto, arriva ad emozionarci, a farci rabbrividire. Ed in questa commozione ed in questo brivido si trova, esattamente, il raggiungimento estetico."*[5]

Il filosofo Kant, contemporaneo di Eulero, fu anch'egli influenzato dal concetto di infinito, di cui ormai si discuteva praticamente in ogni ambito del sapere, quando introdusse nella sua opera sull'estetica, la *Critica del giudizio*, il concetto di "sublime". Il sublime è un concetto tipicamente romantico che si oppone decisamente all'armonico "bello" del mondo classico (e che mai nessun intellettuale dei periodi classico, rinascimentale e neoclassico avrebbe potuto definire bello), per il fatto di non presentarsi come neoclassica armonia tra le parti, ma al contrario come disarmonia, come assenza di un preciso ordine, come *infinitezza*, volendo, e dunque come *in**de**finitezza*. Tenendo conto della definizione, ammesso che sia possibile delinearne una, che Kant offre del sublime, non si esagera nel ritenere che Kant viaggiasse in parallelo con i matematici della sua epoca, come lo stesso Eulero, nell'analisi del concetto di infinito:

> *"Il sublime è ciò in confronto a cui ogni altra cosa è piccola; è ciò che, solo perché si può pensare, dimostra una facoltà di spirito che supera tutte le misure dei sensi. Il sentimento del sublime è un sentimento di dolore e, allo stesso tempo, un piacere risvegliato, una commozione, un movimento alternativo, rapido, di attrazione e repulsione da uno stesso oggetto."*[6]

Come fa notare Antonio J. Duran, *questo "in confronto a cui ogni altra cosa è piccola" o questo "supera tutte le misure dei sensi", che Kant usa per definire il sublime, non è altro che una trascrizione retorica dell'inquietante formula N + 1 = N, che descrive la proprietà di una quantità infinitamente grande e che Eulero usò qualche volta nell'Introductio*. Il *sentimento di dolore* non è altro che quello che si produce nel cuore di un matematico leggendo questa terribile identità o vedendo al denominatore quantità che spariscono per diventare zero. Ma nello stesso tempo il *piacere risvegliato* è ciò che si prova davanti alle opere d'arte che Eulero realizzò, passando attraverso la disarmonia che i greci attribuivano all'infinito e riconducendo quest'ultimo alla composta e ordinata armonia tipicamente neoclassica che regna nella matematica. Per questo motivo, leggendo gli infiniti come li descrive Eulero, si prova *una commozione, un movimento alternativo, rapido, di attrazione e repulsione*, ossia questo sentimento di cui si innamorarono gli intellettuali del Settecento e che Kant definì *sublime*.
Perché dunque gli uomini classici nutrivano un tale ribrezzo nei confronti dell'infinito? Evidentemente perché non era nella loro mentalità, perché non riuscivano a comprenderlo, a misurarlo. Era un concetto completamente avulso dalla loro realtà armonica, armonica in quanto finita e definita. Il loro "bello" era qualcosa di quantificabile, di definibile, e di ciò ci si può rendere conto contemplando l'armonia di una scultura di Fidia, di Michelangelo o di Canova, la proporzione di una fabbrica di Brunelleschi o di Palladio, la finitezza di una prospettiva di Raffaello, la definitezza di una dimostrazione di Euclide. In nessuna di queste opere d'arte è presente il disarmonico concetto di infinito, di indefinito. La bellezza e l'armonia sono nel mondo classico *proporzione*. Un ragionamento simile lo fa Leopardi all'interno dello *Zibaldone* nella sua "teoria del piacere". Secondo il poeta la felicità dell'uomo coincide con il piacere sensibile e materiale, il quale tuttavia non è un piacere qualunque, ma il piacere infinito, in estensione e in durata. Ma poiché all'uomo è impossibile procurarsi nel mondo finito e limitato un tale piacere illimitato, egli avverte un continuo inappagamento, una perenne insoddisfazione, che è causa della sua naturale infelicità. Perché dunque l'uomo antico riusciva a essere felice? Perché era in grado di illudersi, e dunque riusciva a vivere in armonia nella sua realtà finita e determinata. Non avvertiva questa attrazione per

l'indefinito, non c'era cioè in lui quella tensione verso l'infinito che caratterizza invece l'uomo moderno del periodo romantico. In altre parole, per Leopardi, se l'uomo classico era in grado di vivere in armonia nel suo universo finito e definito, l'uomo romantico, avendo intuito l'idea di infinito, che il mondo classico aveva tentato di censurare, non potendo più farne a meno, tende disperatamente verso tale infinito, unica sua vera fonte di felicità, che tuttavia non potrà mai raggiungere:

> *"E perciò tutti i piaceri debbono esser misti di dispiacere, come proviamo, perché l'anima nell'ottenerli cerca avidamente quello che non può trovare, cioè una infinità di piacere, ossia la soddisfazione di un desiderio illimitato."*[7]

Anche August Wilhelm Schlegel (1767-1845), considerato uno dei teorici della poetica romantica, sviluppa lo stesso ragionamento. Secondo lo scrittore tedesco, il romanticismo si differenzia dal mondo classico essenzialmente per il fatto che la visione di quest'ultimo era caratterizzata dall'armonia e dalla pienezza, concetti determinati dal profondo ottimismo con cui era concepita la vita terrena, rispetto alla quale l'idea di immortalità era lasciata in secondo piano. Al contrario, secondo Schlegel, nel periodo romantico emerge la grande importanza che il cristianesimo ha dato alla vita dopo la morte, a discapito di quella terrena. Da ciò deriva nell'uomo moderno un senso di distacco da una totalità originaria, una sorta di nostalgia (*sehnsucht*) e di tensione (*streben*) verso l'infinito, il ricongiungimento con il quale appare tuttavia impossibile nella realtà finita. Il poeta romantico è caratterizzato dunque dalla tensione verso un infinito che non riuscirà mai a fare del tutto proprio nei suoi versi, perennemente disarmonici, incompiuti e lontani dall'armonia, dalla finitezza e dalla perfezione classica. Parallelamente vi è la continua ansia d'infinito del genio romantico, la sua eterna inquietudine, la sua tensione inappagata:

> *"Non è dunque maraviglia che i Greci ne abbiano lasciato, in tutti i generi, de' modelli più finiti. Essi miravano ad una perfezione determinata, e trovavano la soluzione del problema che s'avevano proposto: i Moderni a riscontro, il cui pensiero si slancia verso l'infinito non possono mai compiutamente soddisfare se stessi, e rimane alle loro opere più sublimi un non so che d'imperfetto, che l'espone al pericolo d'esser male apprezzate."*[8]

Dunque, in un certo senso, l'infinito è qualcosa di mostruoso se non si è in grado di dominarlo, se non si è in grado di definirlo, di delinearlo, di porlo all'interno di un'armonia. Per questo i greci lo proibivano, per questo Aristotele lo aveva bandito: perché non era in grado di concepirlo. Ma la matematica, nel corso della sua evoluzione, è riuscita a conquistare persino questo territorio inesplorato, a quantificarlo, a racchiudere l'infinito all'interno di quell'armonico ordine con cui solamente essa sa esprimersi. È incredibile pensare come la matematica riesca a gestire con tale meticolosità persino ciò che prima appariva inconoscibile. Non ci si rende conto che l'analisi infinitesimale permette di calcolare esattamente il valore che una funzione omografica assume all'infinito? E pensare che l'infinito è per definizione qualcosa di irraggiungibile. È un "concetto", un'astrazione della mente dell'uomo, difficilmente ammissibile nella realtà descritta dalla fisica. Eppure la matematica è in grado di determinare esattamente quel valore che la funzione assumerebbe solo all'infinito se immaginariamente raggiungesse l'infinito, ma senza avere bisogno che tale funzione raggiunga realmente l'infinito. È incredibile. È bellissimo. La matematica riesce non solo a definire, ma anche a *calcolare* quell'infinito che nel corso della storia suscitò tanto disagio nella mente dei più attivi intellettuali. Si pensi ai concetti di derivata, di integrale, ma anche solo al concetto di *limite*: già il termine "limite" annuncia questa volontà inesauribile della matematica di *limitare* l'illimitato, di dominarlo, di sottometterlo a quell'armonia, a quella bellezza che non può non accompagnare la ragione matematica.
Confidando in questa divina capacità della matematica di calcolare l'infinito, si recuperi per un istante la successione di Fibonacci:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \end{cases}$$

e si calcolino alcuni rapporti tra un termine a_n della successione e il termine a_{n-1} che lo precede. Inizialmente i valori calcolati sembreranno non voler dire niente, ma, avanzando con la posizione *n* verso l'infinito, si potrà intuire una piacevolissima verità:

$$\begin{gathered} 1/1 = 1{,}000000\ldots \\ 2/1 = 2{,}000000\ldots \\ 3/2 = 1{,}500000\ldots \\ 5/3 = 1{,}666666\ldots \\ 8/5 = 1{,}600000\ldots \\ 13/8 = 1{,}625000\ldots \\ 21/13 = 1{,}615384\ldots \\ 34/21 = 1{,}619047\ldots \\ 55/34 = 1{,}617647\ldots \\ 89/55 = 1{,}618181\ldots \\ 144/89 = 1{,}617977\ldots \\ 233/144 = 1{,}618055\ldots \\ 377/233 = 1{,}618025\ldots \\ 610/377 = 1{,}618037\ldots \\ 987/610 = 1{,}618032\ldots \\ 1597/987 = 1{,}618034\ldots \\ 2584/1597 = 1{,}618033\ldots \\ 4181/2584 = 1{,}618034\ldots \\ 6765/4184 = 1{,}618033\ldots \end{gathered}$$

A quanto pare, procedendo verso l'infinito, il rapporto tra un termine e il precedente si avvicina sempre di più al valore della sezione aurea φ, ossia, il valore assunto da a_n / a_{n-1} al tendere di *n* a $+\infty$ tende a coincidere con φ. In altri termini, si presume che:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \varphi$$

Per dimostrare questo, avendo fede nelle capacità della matematica di dominare e calcolare l'infinito, si pone che:

$$x = \lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

Per definizione si ha che:

$$x = \lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{a_{n-1}} = \lim_{n \to +\infty} \left[1 + \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}\right]$$

ed essendo il limite un operatore lineare, si ha che:

$$x = \lim_{n \to +\infty} 1 + \lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}} = 1 + \lim_{n \to +\infty} \left[\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\right]^{-1} = 1 + \left[\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\right]^{-1}$$

Ragionando, si realizza facilmente che:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

in quanto il fatto che la successione retroceda di un termine non ha alcun peso in confronto con l'infinito. Dunque:

$$x = 1 + \left[\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}\right]^{-1} = 1 + x^{-1}$$

ovvero:

$$x = 1 + \frac{1}{x}$$

Infine, moltiplicano ambo i membri per il valore *x* e portando tutto a primo membro, si evince che tale valore *x* deve ancora una volta verificare l'equazione d'oro:

$$x^2 - x - 1 = 0$$

ma poiché il rapporto tra due numeri della successione di Fibonacci, tutti numeri naturali, deve necessariamente essere un valore positivo, si può escludere l'antireciproco della sezione aurea e concludere che $x = \varphi$, dunque si dimostra che:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \varphi$$

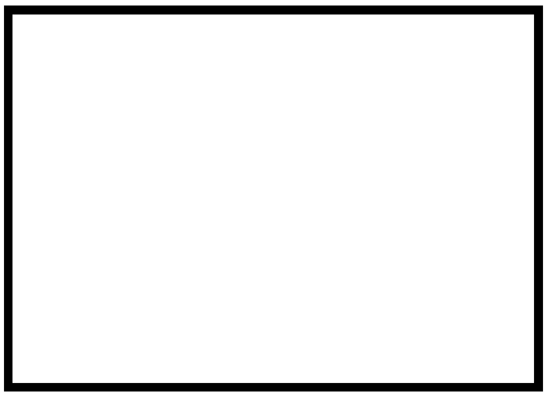
Questa è l'equazione più bella che il saggio contempla. In essa c'è tutto ciò che rende la matematica una disciplina bellissima, a cui competono i canoni di ordine e armonia. Anzitutto in questa equazione è presente il concetto di unificazione, di stretto legame tra due oggetti matematici, la sezione aurea e la successione di Fibonacci, aventi origini assolutamente separate l'uno dall'altro, che parevano totalmente avulsi l'uno dall'altro. Sono enormi lo stupore e l'emozione che si provano nell'ambito della matematica quando i concetti più disparati confluiscono in un'unica realtà che li riassume. Aveva ragione Hegel quando diceva che *il vero è l'intiero*, che *l'intiero è soltanto l'essenza che si completa mediante il suo sviluppo* e che *dell'Assoluto devesi dire che esso è essenzialmente resultato, che solo alla fine è ciò che è in verità*[9]. Questa equazione è dunque la conclusione del processo, ed è essa, attraverso la sua bellezza, a sintetizzare tutto il sapere di cui si è

parlato nel corso del saggio. L'equazione quindi è unificazione e generalizzazione, e per questo motivo è bellezza. In secondo luogo l'equazione è bella in quanto è finalità senza fine, in quanto è inutile, in quanto non serve a nulla se non all'accrescimento di se stessa, e per questo motivo è kantianamente un'opera d'arte, un bello disinteressato, ma questo aspetto sarà approfondito in seguito discutendo sulla figura di Hardy.
L'equazione è di per sé bella in quanto si pone come armonia fra le parti, in quanto si esplica con ordine e assoluta compostezza. Non si percepisce alcuna aggressività, alcuna violenza osservando una statua del Canova, ma solo assoluta calma. Allo stesso modo, questa equazione non dà l'idea di turbamento, di agitazione, di romantica tensione, ma solo di neoclassica serenità. Questa equazione è dunque qualcosa di assolutamente armonico e simboleggia solamente l'ordine. Ed è bello come tale ordine racchiuda in sé il concetto di infinito. Un concetto così grande, così indefinito e indefinibile, così inconcepibile, così illimitato e illimitabile, viene armonicamente rappresentato e racchiuso in questa mirabile armonia, in questa assoluta compostezza. Nessun'altra forma d'arte è a tale punto capace di evocare appieno il concetto di infinito, e riguardo a questo si discusse moltissimo nel periodo romantico. In particolare è interessante la riflessione che Hegel fa dell'arte nello *Spirito assoluto*, parte conclusiva dell'*Enciclopedia delle scienze filosofiche*. Secondo il filosofo tedesco, se nell'arte classica esiste un perfetto equilibrio tra forma e contenuto, che determina una profonda armonia in ogni forma d'arte, nel periodo romantico il contenuto spirituale è troppo alto. È talmente ricco che non può trovare una rappresentazione sensibile adeguata. In altre parole, non esiste più, come nel mondo classico, un'armonia tra forma e contenuto, in quanto qualunque forma non è più sufficiente per esprimere la pienezza dell'Assoluto (tale ironica situazione è definita da Hegel *morte dell'arte*). Per questo motivo subentrano nella figura del genio romantico l'*ironia* e il *titanismo*: l'artista è perennemente insoddisfatto, in quanto non troverà mai una forma che rappresenti appieno un contenuto così elevato: l'infinito a cui tende (*streben*) con nostalgia e desiderio (*sehnsucht*), è irraggiungibile nella sua interezza, indefinibile, irracchiudibile e irrappresentabile nella perfetta forma d'arte.
Ebbene, la matematica sembra dire il contrario. La matematica è l'unica forma d'arte che riesce a parlare in maniera ordinata dell'infinito. La matematica, in altri termini, ha fatto proprio il concetto di infinito ed è riuscita a maneggiarlo con armonia e ad esplicarlo e rappresentarlo con assoluto ordine e con infinita bellezza. Le equazioni ne sono la prova. I limiti, le derivate, gli integrali: la matematica domina l'infinito, è in grado persino di calcolarlo, di rappresentarlo nella sua massima completezza, rimanendo sempre tuttavia in quella compostezza neoclassica, cioè in quell'armonia tra forma e contenuto, con cui le sue equazioni si esprimono. La matematica , in conclusione, non fu soggetta a quella "morte dell'arte" che, come fece notare Hegel, colpì le altre forma artistiche e le costrinse ad adottare forme disarmoniche non più in perfetto equilibrio con il contenuto che tentano di racchiudere e rappresentare. No, la matematica continua e continuerà per sempre ad esprimere la sua infinita bellezza in quella forma armonica, composta e ordinata che solo a lei appartiene.

13 - Geometrie auree

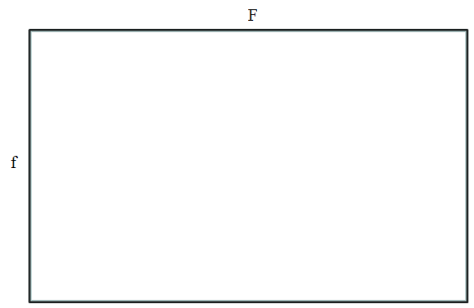
Si è parlato finora della sezione aurea da un punto di vista puramente algebrico, ma tale valore φ ha una grande rilevanza anche nel mondo della geometria e, attraverso quest'ultimo, nell'immenso mondo dell'arte, che lo ritenne universalmente un canone assoluto di bellezza. Una prima figura geometrica piana basata sul rapporto aureo che gode di alcune proprietà affascinanti è il *rettangolo aureo*.
Quotidianamente l'uomo moderno fa uso di molteplici oggetti, quali tessere, documenti di identificazione, biglietti da visita o abbonamenti, che tendono ad avere tutti una forma rettangolare piuttosto simile e, in particolare, una simile *proporzione* tra i lati. In altre parole, i rettangoli di cui ci si serve per dare forma ai documenti tendono ad essere *simili*, ossia tendono ad essere uguali i rapporti tra le lunghezze dei rispettivi lati. Perché si preferiscono rettangoli di *questo* modulo (dove con modulo di un rettangolo si intende il rapporto tra la lunghezza del lato maggiore e la lunghezza di quello minore) e non di un altro? Evidentemente perché sono ritenuti più *armonici*, più *naturali*, più *spontanei*. Che cosa rende il rettangolo a) universalmente più gradevole alla vista del rettangolo b)? È tutta una questione di modulo, di proporzione tra i lati.

a)



b)

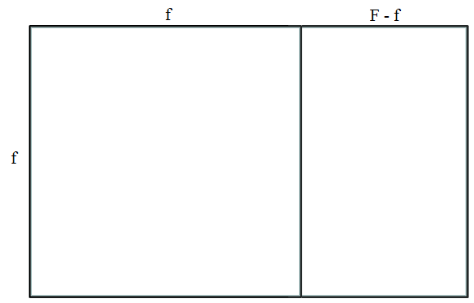
Nella stragrande maggioranza, fra i rettangoli che si ritrovano nella realtà concreta, il rapporto tra le lunghezze del lato maggiore e di quello minore è molto vicino alla sezione aurea, che evidentemente viene considerata la più eccellente misura della bellezza. È definito *rettangolo aureo* il rettangolo il cui modulo eguaglia la ragione aurea φ. La tradizione lo ritiene universalmente il rettangolo più bello, più naturale, più spontaneo, e diverse indagini psicologiche nel corso dell'Ottocento, come quelle di Theodor Fechner, che prevedevano la selezione da parte di alcuni soggetti del più gradevole rettangolo in una lista di molteplici rettangoli dei quali solo uno era aureo, vennero a dimostrarlo. Un esempio di rettangolo aureo è dato dall'immagine seguente:



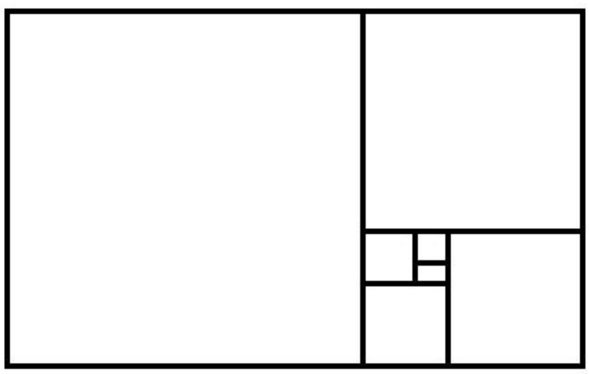
dove *F* ed *f* sono rispettivamente la lunghezza del lato maggiore e la lunghezza del lato minore. In tale rettangolo, per definizione, l'altezza è la sezione aurea della base, e $F/f = \varphi$. Ma, per definizione di *sezione aurea di un segmento*, un segmento di lunghezza *f* è la sezione aurea di un secondo segmento di lunghezza *F*, se è medio proporzionale tra il secondo segmento e la loro differenza. In altre parole, vale che:

$$\frac{F}{f} = \frac{f}{F - f}$$

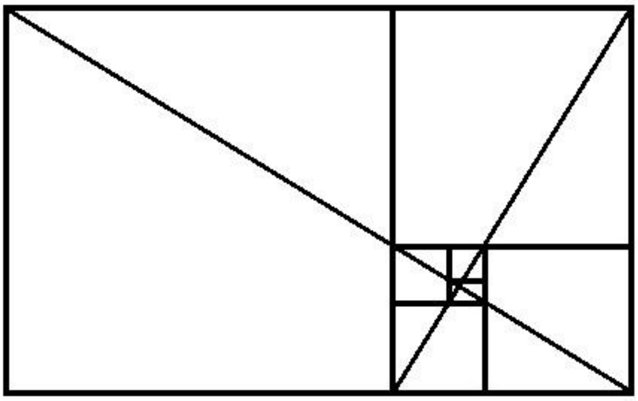
Da ciò deriva una suggestiva proprietà già anticipata nei discorsi riguardanti la figura di Keplero: delimitando un quadrato di lato *f* all'interno del rettangolo, come mostrato nella figura sottostante, si ottiene un altro rettangolo aureo con lati di lunghezza rispettivamente *f* e $F - f$, il cui rapporto sarà dunque ancora la sezione aurea:



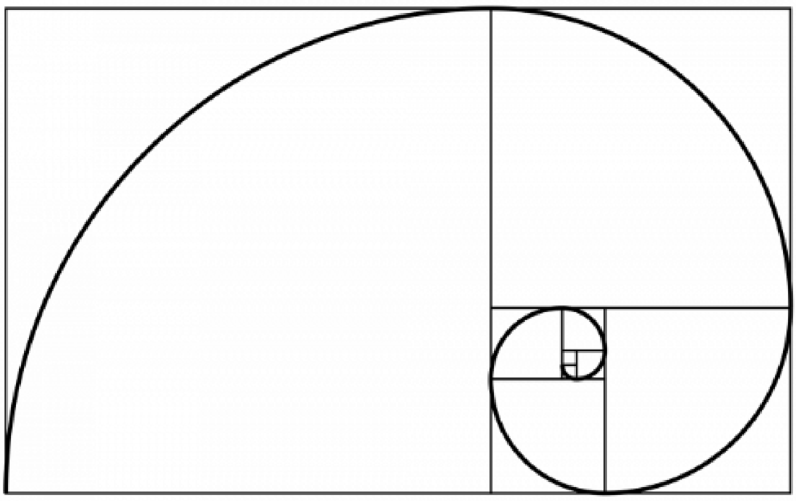
E si può andare avanti indefinitamente, sottraendo all'infinito quadrati per ottenere ancora e ancora rettangoli aurei perfetti:



Tracciando le diagonali del primo e del secondo rettangoli aurei più grandi si nota che tali due diagonali sono fra loro perpendicolari. Proseguendo, si nota che, tracciando le infinite diagonali degli infiniti rettangoli aurei che si possono tracciare indefinitamente, queste giacciono tutte sulle prime due rette tracciate. In altre parole, è sufficiente tracciare le prime due diagonali per avere la sicurezza di contemplare tutte le infinite diagonali degli infiniti rettangoli aurei contenuti in quello iniziale, tutte sempre fra loro perpendicolari. Immaginando di osservare al microscopio tutti i rettangoli aurei che si formano indefinitamente, si vedrebbe che il punto di intersezione rimane costante per quanto diminuiscano di dimensione basandosi sul valore φ. Questa è una proprietà unica del rettangolo aureo. L'unico punto di intersezione tra le infinite diagonali è una sorta di centro di gravità attorno a cui convergono tutti i rettangoli aurei, senza che nessuno venga mai a degenerare in tale punto. Per questo motivo, ispirandosi alle divine proprietà della sezione aurea, il matematico Pickover definì questo punto *l'occhio di Dio*[1].



Tracciando in ciascuno dei quadrati via via sottratti un arco di circonferenza aventi per raggio il lato del rispettivo quadrato e per centro un suo vertice, si ottiene quella che viene definita *spirale logaritmica* o *spirale aurea*.

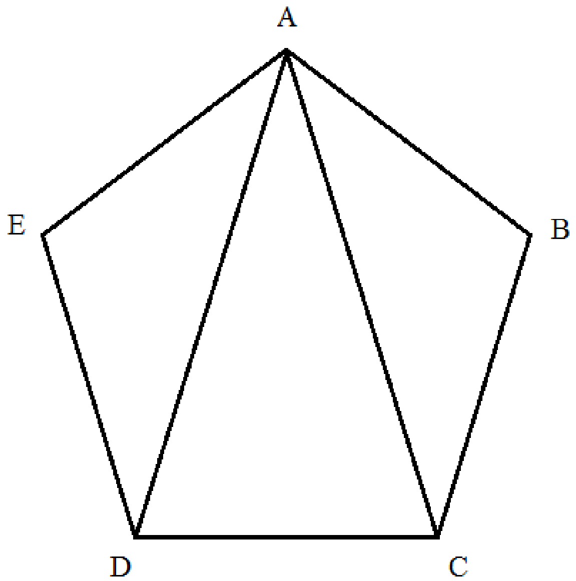


Essa è un'armonica curva la cui forma non cambia avvicinandosi o allontanandosi dall'occhio di Dio. Tale proprietà è detta *autosomiglianza*. Detti *poli* i punti in cui tale curva incontra un vertice di un quadrato, ciascuna retta che collega un dato polo e il terzo a partire dal polo dato passa per l'occhio di Dio.
La spirale logaritmica affascinò nel corso della storia moltissimi artisti e matematici, come Jacques Bernoulli, che la volle incisa sulla sua lapide assieme alla frase, esplicitamente riferita alla proprietà di autosomiglianza della spirale: *eadem mutato resurgo*, ovvero *trasformato, risorgo ugualmente* (lo scalpellino che preparò la pietra tombale vi incise non una spirale logaritmica, bensì una comune spirale di Archimede, cosa che avrebbe rattristito moltissimo Bernoulli). Ma chi si lasciò affascinare ancora di più dalla bellezza di questa armonica curva fu questa volta la natura: come esprime con commozione Mario Livio, *dai girasoli alle conchiglie, dai vortici agli uragani alle immense*

galassie, sembra che la natura abbia scelto quest'armoniosa figura come proprio ornamento favorito[2]:



Una seconda figura geometrica in cui la sezione aurea si rivela fondamentale è il pentagono regolare, molto amato dai Pitagorici, in quanto permetteva, tracciandone le diagonali oppure prolungandone i lati, di ottenere l'armonico pentagramma stellato. Tuttavia fu proprio dallo studio di esso che la scuola pitagorica cadde in crisi, in quanto in esso il pitagorico Ippaso da Metaponto riconobbe per la prima volta il numero irrazionale φ. In particolare, *il lato di un pentagono regolare è la sezione aurea della sua diagonale*. Per dimostrare questo teorema ci si figuri il pentagono regolare *ABCDE,* in cui sono tracciate le diagonali *AD* e *AC*. Ne deriva che il triangolo *ADC* è isoscele:



Detta *x* l'ampiezza di ciascuno dei cinque angoli congruenti, si ha che:

$$E\hat{A}D = D\hat{A}C = C\hat{A}B = x/3$$

in quanto, circoscrivendo una circonferenza al pentagono, sono angoli alla circonferenza che insistono su archi congruenti. Inoltre:

$$E\widehat{D}A = x/3$$

in quanto anch'esso insiste su un arco congruente ai precedenti.
Ma *EAD* è un triangolo, dunque deve valere che:

$$\hat{E} + E\hat{A}D + E\widehat{D}A = \pi$$

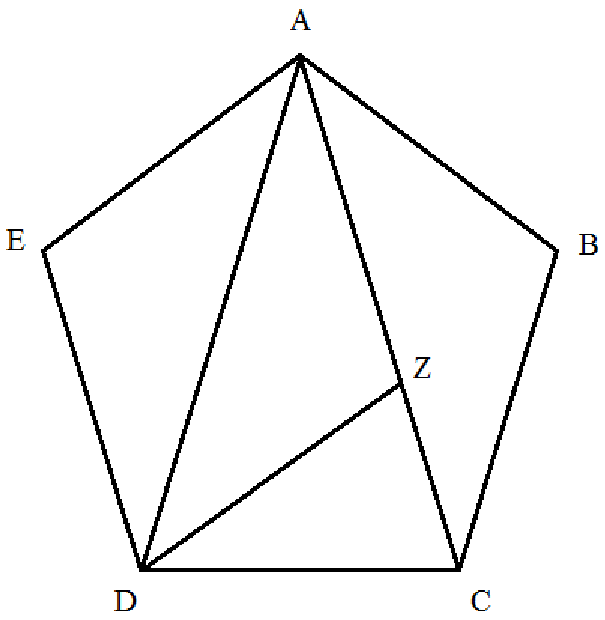
ossia che, sostituendo le ampiezze:

$$x + x/3 + x/3 = \pi$$

risolvendo l'equazione nell'incognita *x* si ricava l'ampiezza di ciascuno dei cinque angoli del pentagono:

$$x = \frac{3}{5}\pi$$

Poiché l'angolo *DAC* ha ampiezza pari a *π/5*, i due angoli congruenti *ADC* e *AC*D devono essere ampi *2π/5*. Si tracci ora *AZ*, bisettrice dell'angolo *ADC*:



ne deriva che:

$$A\widehat{D}Z = Z\widehat{D}C = \frac{\pi}{5}$$

e che:

$$D\hat{Z}C = \frac{2}{5}\pi$$

Ma allora il triangolo *AZD* è isoscele, e così pure *DZC*. Inoltre, *ACD* è simile a *DZC*. Considerando questa similitudine, si ricava facilmente che:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{DZ}}{\overline{CZ}}$$

Poiché *ZDC*, come già si è detto, è un triangolo isoscele:

$$\overline{DZ} = \overline{DC}$$

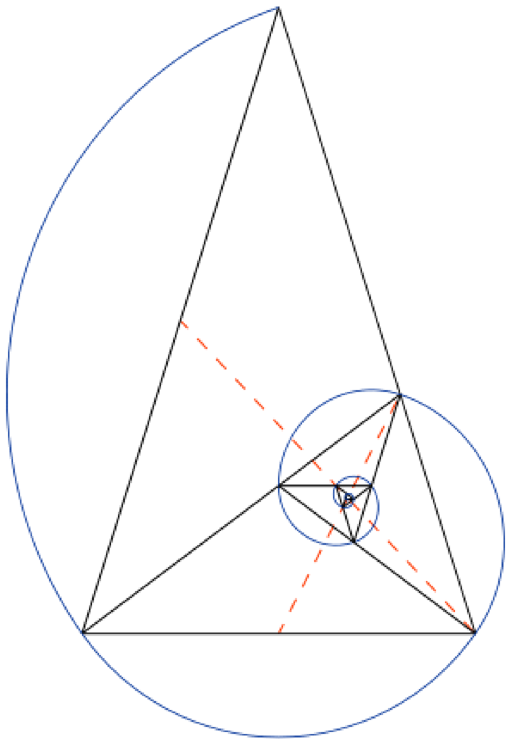
Ora, $\overline{CZ} = \overline{AC} - \overline{AZ}$, ma poiché *AZD* è, come già si è detto, un triangolo isoscele, $\overline{AZ} = \overline{DZ} = \overline{Dc}$, e dunque:

$$\overline{CZ} = \overline{AC} - \overline{DC}$$

Sostituendo queste espressioni alla proporzione ricavata, si ottiene infine che:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{AC} - \overline{DC}}$$

Verificata la definizione di *sezione aurea di un segmento*, si dimostra che *DC* è la sezione aurea di *AC*, ossia che il lato di un pentagono regolare è la sezione aurea della sua diagonale. Il rapporto fra la lunghezza dell'una e la lunghezza dell'altro è dunque pari alla sezione aurea φ. Attraverso un ragionamento molto simile si può dimostrare facilmente che *il lato di un decagono regolare è la sezione aurea del raggio della circonferenza ad esso circoscritta*.
Durante la dimostrazione, si sono rivelati fondamentali tre triangoli isosceli: i due triangoli simili *ACD* e *DZC* e il triangolo *AZD*. I primi due hanno un angolo di $\pi/5$ e due angoli di $2\pi/5$, mentre il terzo ha un angolo di $3\pi/5$ e due angoli di $\pi/5$. Triangoli del primo tipo sono detti *triangoli aurei*, ossia triangoli isosceli in cui la base è sezione aurea del lato obliquo, mentre triangoli del secondo tipo sono detti *gnomoni aurei*, quando è il lato obliquo ad essere sezione aurea della base. Oltre a godere di per sé di una bellezza profonda, i triangoli aurei e gli gnomoni aurei hanno insieme una fantastica proprietà che li accomuna moltissimo ai rettangoli aurei di cui poco prima si è discusso. Nel caso del triangolo aureo, continuando a tracciare indefinitamente bisettrici, si ritrovano altri triangoli aurei sempre più piccoli all'interno del primo. Il procedimento equivale alla sottrazione continua di uno gnomone aureo. Procedendo in questo modo, si ottiene una successione di triangoli aurei a forma di spirale di triangoli che converge verso un punto di crescita infinito, esattamente come per l'occhio di Dio del rettangolo aureo. Si ritorna dunque all'armoniosa spirale aurea:



In un decagono regolare il triangolo aureo appare come ciascuno dei dieci "spicchi di torta" in cui è possibile dividerlo. Ne deriva che l'altezza di ciascuno di questi dieci triangoli aurei è l'apotema del decagono regolare. Esso, per un decagono regolare di lato unitario, vale:

$$apotema = \frac{\sqrt{4\varphi + 3}}{2}$$

Accostando ai lati obliqui di un triangolo aureo due gnomoni aurei aventi base coincidente con i lati obliqui si ottiene un pentagono regolare. Accostando ai lati di un pentagono regolare cinque triangoli aurei aventi basi coincidenti con tali lati si ottiene un pentagramma stellato, o stella pentagonale. Queste interessanti proprietà geometriche delle "figure auree" attrassero moltissimo il fisico e matematico Roger Penrose, che li dispose in maniera creativa per ottenere dei mosaici ad incastro.
La sezione aurea gioca infine un ruolo particolare nei solidi platonici. Come si sa, questi poliedri regolari sono cinque: il *tetraedro*, l'*esaedro* o *cubo*, l'*ottaedro*, il *dodecaedro* e l'*icosaedro*. Amati fin dai tempi dell'antica Grecia, Platone li associò agli elementi che riteneva componessero la realtà, mentre Keplero li ritenne l'ossatura logica su cui si dovessero basare le sfere dei pianeti, come già si è visto.
Unendo i centri delle facce di un icosaedro, si ottiene un dodecaedro. Facendo lo stesso con un dodecaedro, si ottiene un icosaedro. Per questa proprietà, il dodecaedro e l'icosaedro sono detti poliedri duali (sono duali anche il cubo e l'ottaedro). In particolare, dato un icosaedro inscritto in un dodecaedro, come solidi duali, il rapporto fra le lunghezze dei loro spigoli vale:

$$\frac{\varphi^2}{\sqrt{5}}$$

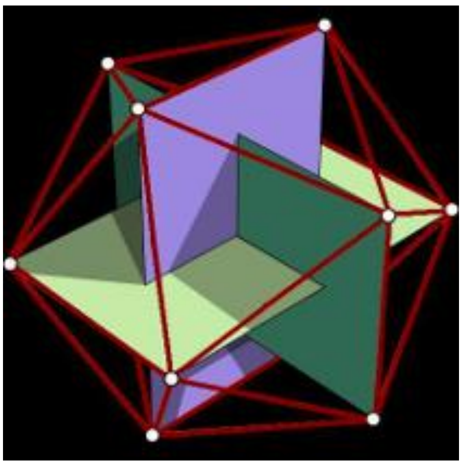
In un dodecaedro di lato unitario la superficie e il volume valgono rispettivamente:

$$15\varphi/\sqrt{3-\varphi} \quad \text{e} \quad 5\varphi^2/(6-2\varphi)$$

Inoltre, in un icosaedro di lato unitario il volume vale:

$$5\varphi^2/6$$

Sono dunque queste delle espressioni strettamente dipendenti dalla ragione aurea. Un'ultima proprietà sensazionale della sezione aurea riguarda l'icosaedro. I suoi *12* vertici possono essere divisi in tre gruppi da *4*, in modo tale che i vertici di ciascuna di queste tre tetradi corrispondano ai vertici di altrettanti rettangoli aurei ortogonali fra loro che si intersecano al centro dell'icosaedro. Ne deriva che, prendendo tre rettangoli aurei congruenti e ponendoli reciprocamente ortogonali nei loro centri, i *12* vertici così disposti nello spazio saranno i *12* vertici di un icosaedro. La stupenda proprietà si concretizza nella seguente figura:



Pare in conclusione che la sezione aurea φ sia responsabile anche della bellezza e dell'armonia di moltissime figure geometriche piane e solide. La sua armonia dunque non si limita solo all'ambito dell'algebra, ma si espande persino nell'ordinatissimo mondo della geometria, dove si rivela fra le proprietà di molteplici figure piane e nelle espressioni e relazioni dei solidi platonici. La sua onnipotenza in qualità di rappresentante della neoclassica bellezza della matematica sembra dunque non avere limiti. L'armonia e l'ordine con cui si esplicano queste *geometrie auree* non rivelano alcuna tensione o agitazione romantica, ma solo quell'assoluta calma neoclassica che sempre si nota nella matematica. Persino questo espandersi all'infinito e restringersi all'infinitesimo della spirale aurea è avvertito universalmente come armonico e razionale, il che prova ancora una volta come alla perfetta arte della matematica competano i canoni di bellezza e di armonia, nonché l'indiscussa capacità, che solo a lei appartiene, di esprimere questa bellezza con ordine e compostezza neoclassica, anche qualora questa stessa bellezza si traduca nell'infinito, rappresentato nella sua interezza da nessun'altra forma d'arte.
Questa stessa infinita bellezza e capacità espressiva della matematica non poteva non destare invidia nelle altre arti, quali la pittura, la scultura, l'architettura e la musica, le quali decisero dunque nel corso della storia di imitarla, di farla propria, di porla al proprio sevizio delle proprie modalità di esprimersi. E anche in questo ebbe un ruolo preminente la divina proporzione.

14 - L’arte che fa propria la divina proporzione

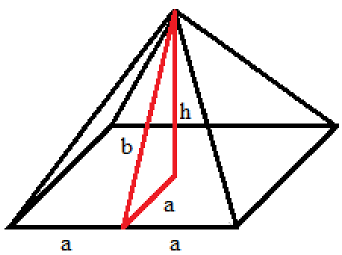
La matematica, dando alla luce la sezione aurea e le sue stupefacenti proprietà algebriche e geometriche, aveva scoperto come quantificare la bellezza. Chiaramente, la bellezza della matematica non è una bellezza concreta, come quella che si manifesta nelle arti tradizionali (pittura, scultura e architettura). È al contrario una bellezza che tende a realizzarsi nell’astrazione, e che si manifesta nelle equazioni più leggiadre e sintetiche, come già si è detto in precedenza. È dunque, quella della matematica, una bellezza che si accosta di più alle opere d’arte, sicuramente meno concrete e più tendenti all’astrazione, della poesia e della musica. Anzi, probabilmente la matematica è la disciplina che raggiunge un grado ancora maggiore di astrazione e di purezza, essendo generata unicamente dalla mente umana e non avendo bisogno di alcuna base concreta, e non a caso se ne servirono moltissimo gli artisti dell’Astrattismo per generare negli osservatori l’idea di astrazione e di decontestualizzazione.
È chiaro tuttavia che, di fronte alla bellezza di cui la matematica si faceva detentrice attraverso la sezione aurea, le altre forme d’arte non potevano rimanere indifferenti: innamoratesi anch’esse della divina proporzione φ, decisero di farla propria, di interiorizzarla e di esprimersi attraverso essa nelle rispettive forme d’arte. Un primo esempio di tutto ciò si ritrova nelle costruzioni dell’uomo fin dai tempi antichi, anche se in alcuni casi è quasi del tutto impossibile accertare se la presenza della sezione aurea fosse stata una scelta voluta. L’idea secondo cui la sezione aurea fosse già nota agli antichi egizi non è da trascurare se si prende in analisi la Grande Piramide di Cheope, realizzata a Giza presso il 2500 a.C.. Il 28 aprile 1860 l’astronomo britannico sir John Herschel scriveva così in un articolo apparso in *The Athenaeum*:

> *“La stessa pendenza... appartiene a una piramide caratterizzata dalla proprietà di avere* ***ciascuna delle facce uguale al quadrato costruito sull’altezza****. Questa è la tipica relazione che, come Erodoto ci dice chiaramente, essa doveva racchiudere nelle intenzioni dei costruttori, e che oggi noi sappiamo esservi effettivamente racchiusa.”*[1]

In seguito, nel 1999 il saggista ed esperto di telecomunicazioni francese Midhat J. Gazalé ha scritto nel suo libro *Gnomon: From Pharaohs to Fractals*:

> *“È stato riferito che lo storico greco Erodoto apprese dai sacerdoti egizi che* ***il quadrato dell’altezza*** *della Grande Piramide* ***è pari all’area di una qualunque delle facce triangolari laterali****.”*[2]

Che cosa significa dunque questa ipotesi secondo cui nella Grande Piramide “il quadrato dell’altezza eguaglia l’area di uno qualunque dei quattro triangoli che ne compongono la superficie laterale”? Ebbene, ciò equivale a esprimere la tesi secondo cui “la metà del lato di base della Grande Piramide è la sezione aurea del suo apotema (ossia l’altezza di ciascuno dei quattro triangoli che ne compongono la superficie laterale)” e dunque “il rapporto tra l’apotema e la metà del lato di base eguaglia la sezione aurea φ”.
Per dimostrare tutto ciò si consideri la seguente figura:



e si ammetta per ipotesi che "il quadrato costruito sull'altezza eguagli l'area di uno qualunque dei quattro triangoli congruenti", ovvero che:

$$h^2 = ab$$

Notando che il triangolo di lati *a*, *b* e *h* (rappresentato in rosso) è rettangolo, vale necessariamente il teorema di Pitagora:

$$b^2 = a^2 + h^2$$

Sostituendo ora ad h^2 l'ipotesi, si evince che:

$$b^2 = a^2 + ab$$

la quale cosa equivale a dire che:

$$b^2 - ab = a^2$$

e quindi:

$$\frac{1}{a(b-a)}(b^2 - ab) = (a^2)\frac{1}{a(b-a)}$$

Semplificando le frazioni si ottiene infine che:

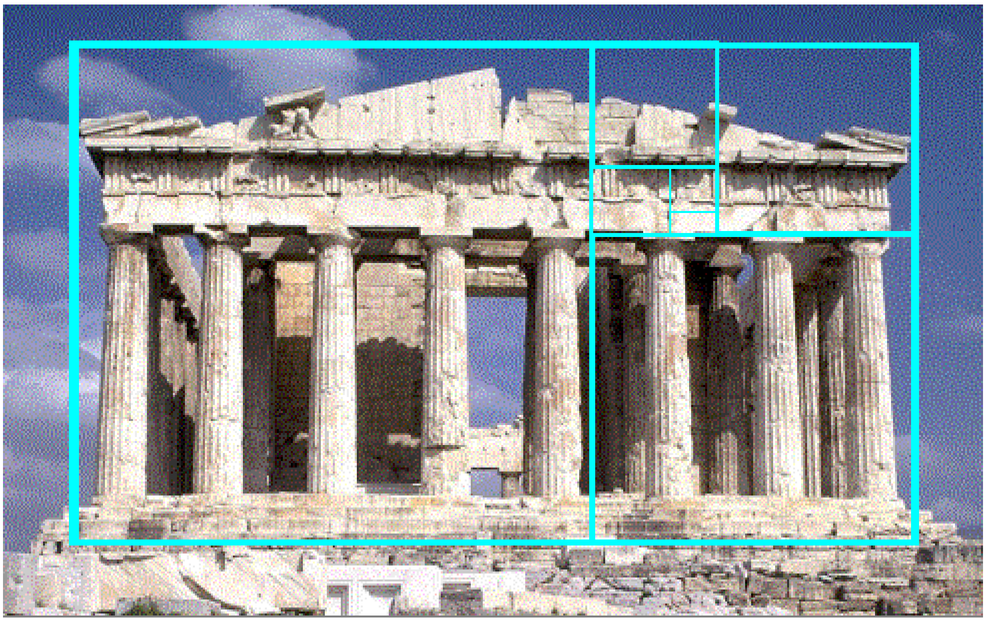
$$\frac{b}{a} = \frac{a}{b-a}$$

ma questa relazione tra *a* e *b*, come si ricorderà, è proprio la definizione di *sezione aurea di un segmento*, e dunque il segmento *a* è effettivamente la sezione aurea del segmento *b* e quindi il rapporto $b/a = \varphi$. Ma questo era proprio ciò che si voleva dimostrare.
In alternativa, riprendendo l'equazione $b^2 = a^2 + ab$, portando tutto al primo membro e dividendo per a^2, detto $b/a = x$ si ottiene ancora una volta la ormai celeberrima equazione d'oro:

$$x^2 - x - 1 = 0$$

la cui unica soluzione possibile, essendo *a* e *b*, per definizione, lunghezze positive, è necessariamente la sezione aurea φ, ossia $x = b/a = \varphi$, come volevasi dimostrare.
In conclusione, ammettendo che, come sostengono gli esperti d'arte, il quadrato dell'altezza della Grande Piramide di Cheope eguagli (approssimativamente) l'area di ciascuno dei quattro triangoli congruenti che la compongono, allora necessariamente metà lato di base di tale piramide è (approssimativamente) la sezione aurea del suo apotema, e dunque il rapporto tra il secondo e il primo eguaglia la ragione aurea φ.
L'esempio considerato da sempre il più rappresentativo dell'uso del rapporto aureo nell'antichità è stato tuttavia il Partenone, famosissimo reperto dell'antica Grecia situato sull'acropoli di Atene. Realizzato nel V secolo a.C. dagli architetti Ictino e Callicrate e supervisionato dallo scultore Fidia, che ne scolpì le decorazioni, il tempio è considerato una delle più splendide espressioni degli ideali architettonici di chiarezza e unità, armonia e proporzione. La cosa interessante è il fatto che molti

studiosi sostengono che la facciata possa essere interamente inscritta in un ideale rettangolo aureo (ossia un rettangolo tale che la sua altezza sia la sezione aurea della sua base), che, come si è visto, si distingue tra i rettangoli per la sua bellezza e per la sua divina proporzione, e a conferma di ciò vi sono, secondo il parere di tali esperti, anche buona parte dei fregi, a loro volta basati su proporzioni interne e distanze che spesso sono legate alla sezione aurea. A quanto pare dunque, quando i frontoni del tempio erano intatti, l'altezza della facciata principale doveva essere la sezione aurea della base ed era possibile notare altri rettangoli aurei tra i triglifi e le metope che compongono il fregio:



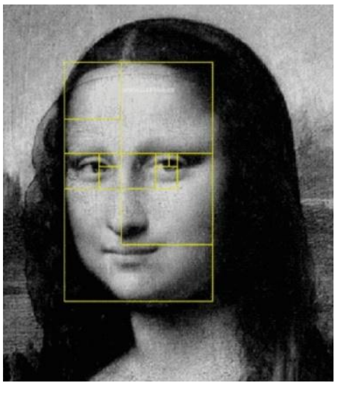
Se moltissimi trattati sulla sezione aurea, come ad esempio il *Der Goldene Schnitt* di Adolph Zeising (1884), arrivano a sostenere che i tre artisti avessero utilizzato consciamente la sezione aurea nella progettazione del Partenone, non mancano tuttavia moltissimi matematici, quali George Markowsky, che sostengono il contrario, e cioè che o nel tempio greco non esiste alcun riferimento preciso alla sezione aurea, oppure, se esiste, esso è puramente casuale, non voluto dai suoi costruttori. A favore di coloro che si oppongono alla tesi secondo cui Fidia si fosse servito della sezione aurea in questa architettura è il fatto che le prime testimonianze scritte sulla sezione aurea e sulla costruzione del rettangolo aureo sono contenute negli *Elementi*, scritti da Euclide nel 300 a.C. circa, ossia poco più di un secolo e mezzo dopo la realizzazione del Partenone. Ciononondimeno, non si può neppure negare che il rapporto fra la base e l'altezza della facciata del Partenone sia effettivamente molto simile a φ. D'altro canto gli studiosi hanno riconosciuto anche in molte altre opere di Fidia la presenza della sezione aurea, al tal punto da indurre a ritenere che egli ne avesse fatto uso consciamente, ritenendola la proporzione perfetta per quantificare la bellezza e l'armonia.
Verità o leggenda che sia, la tradizione è giunta ad accostare ai lavori di Fidia, e in particolare al Partenone, la sezione aurea, la quale, per questo motivo, è anche detta in matematica, come già si è detto, *costante di Fidia*, ed è per lo stesso motivo indicata dalla lettera greca minuscola φ, iniziale del nome greco del grande scultore.
L'influenza della sezione aurea nella storia dell'arte ebbe dunque già a che fare con il mondo della Grecia classica, ma i contatti con le arti concrete si resero più evidenti nel periodo del Rinascimento, grazie al duro lavoro del matematico Luca Pacioli (1445-1517), probabilmente il maggiore responsabile dell'ingresso del numero aureo nell'orbita della bellezza e dell'arte. Come Piero della Francesca, del quale fu per breve tempo allievo a San Sepolcro, Pacioli era convinto che la matematica permettesse agli artisti di quantificare la bellezza e di esprimerla con assoluta armonia e proporzione. Con il suo trattato *De divina proportione* (1498) il matematico eseguiva una sistematizzazione di tutte le più stupefacenti proprietà algebriche e geometriche della sezione aurea,

esaltandone non solo la bellezza che essa stessa racchiude, ma anche l'armonia che le deriva per il fatto di essere, secondo il parere del matematico, la più nobile e leggiadra manifestazione di Dio nel mondo della matematica, come già esprimeva il titolo dell'importante trattato. In effetti la "divina proporzione" (così Pacioli definiva il rapporto oggi detto sezione aurea), faceva notare il matematico, è *una*, nel senso che è l'unico valore a godere delle armoniche proprietà analizzate nel corso di questo saggio, e *trina*, in quanto l'ordine della sua definizione chiama in causa esattamente tre lunghezze (una prima lunghezza, una seconda e la loro differenza). In secondo luogo, il fatto che la perfetta armonia sia espressa da un numero irrazionale come la sezione aurea era, secondo Pacioli, prova dell'esistenza di Dio, in quanto l'irrazionalità della bellezza della divina proporzione e l'impossibilità, come direbbe Dante, di giungere alla comprensione di Dio unicamente per mezzo dell'intelletto sono due concetti equivalenti. Il matematico era anche colpito dalla già analizzata proprietà di autosimilitudine del rapporto aureo, che rinvierebbe all'onnipresenza omogenea e all'invariabilità di Dio[3].
Pacioli era sicuramente molto interessato alle arti e, molto probabilmente, lo scopo del *De divina proportione* era il contributo che tramite tale trattato il matematico intendeva offrire al lavoro creativo dei pittori. Da questo punto di vista il trattato era per Pacioli una sorta di Vangelo che doveva formulare alcune leggi matematiche per quantificare e rappresentare la bellezza, doveva rivelare il "segreto" dell'armonia delle forme visibili. Una prova di tutto ciò è il fatto che nella composizione di tale trattato il matematico collaborò moltissimo con Leonardo da Vinci, il celebre genio poliedrico, che offrì al *De divina proporzione* ben sessanta illustrazioni di solidi platonici (correlati come già si è visto alla sezione aurea). Il fatto che artisti del Rinascimento, quali Leonardo, Botticelli, Raffaello e Durer, ebbero modo di leggere questo importante trattato, contribuì secondo gli esperti d'arte, ad alimentare l'interesse per la sezione aurea di questi geni dall'inesauribile entusiasmo per le più svariate discipline.
Lasciando da parte gli aspetti puramente matematici del trattato, si prenda in analisi il secondo volume, nel quale Pacioli ragiona sulla proporzionalità e sulle sue applicazioni all'architettura e alla scultura del corpo umano, riesumando in particolare le teorie estetiche dell'architetto romano del I secolo a.C. Vitruvio Pollione, il quale esprimeva:

> *"Nel corpo umano il punto centrale è naturalmente l'ombelico. Infatti, se un compasso è posto in corrispondenza dell'ombelico, le punte delle dita delle mani e dei piedi toccheranno la circonferenza del cerchio così tracciato. Così dal corpo umano si può ricavare una figura quadrata. [...]"*[4]

Questa teoria condivisa nel mondo del Rinascimento attraverso il lavoro di Pacioli, secondo il quale *dal corpo humano ogni mesura con sue denominazioni deriva e in epso tutte sorti de proporzioni e proporzionalità se ritrova con lo deto de l'altissimo mediante li intrinseci secreti dela natura*[5], si era incarnata, ponendo il corpo umano idealizzato al centro dell'universo, ne *L'Uomo Vitruviano* del maestro Leonardo, che secondo alcuni critici potrebbe essere stato anch'esso volutamente proporzionato sulla base di φ. In ogni caso, la pubblicazione del *De divina proportione* portò a un rinnovato e diffuso interesse per la sezione aurea e per gli armonici rapporti dalla matematica con i vari ambiti del sapere, comprese le discipline artistiche. Leonardo nel suo *Trattato sula pittura* comincia con la frase "Nessuno che non sia un matematico legga le mie opere". Durer nel *Manuale di misurazione con riga e compasso* afferma che la matematica è una scienza "senza la quale nessuno può essere o diventare un artista completo". Interessante il fatto che Durer in questo suo trattato avesse dedicato particolare attenzione alla costruzione della spirale logaritmica, del cui stretto legame con la sezione aurea si è già parlato (come si ricorderà, ad esempio, essa può essere inscritta in una catena infinita di rettangoli aurei).
Anche Leon Battista Alberti si dedicava alla stesura di trattati in cui teorizzava l'armonia che le opere d'arte riescono a generare se riescono ad interiorizzare la bellezza e l'armonia dei più elementari rapporti matematici. Nel *De scultura* l'artista esponeva le proporzioni del corpo umano, nel *De pictura* offriva la prima definizione di prospettiva scientifica e nel *De re aedificatoria*

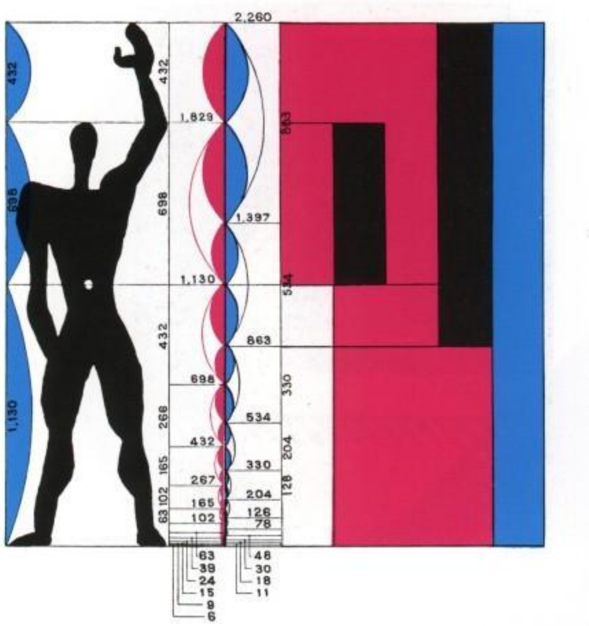
delineava e descriveva alcuni elementari rapporti che dovevano secondo l'artista essere seguiti in architettura per esplicitarne la proporzione e l'ordine. Probabilmente Alberti non ammetteva tuttavia l'utilizzo della sezione aurea nella progettazione di una fabbrica: essendo φ un numero irrazionale, dati un segmento e la sua sezione aurea, essi saranno necessariamente incommensurabili, e ciò si opporrebbe al canone albertiano di *simmetria* secondo cui tutte le lunghezze di una data fabbrica devono essere fra loro commensurabili, devono cioè avere un sottomultiplo comune, cosa che la presenza della sezione aurea renderebbe impossibile.
Nel mondo rinascimentale furono invece i pittori, secondo i critici, a interessarsi moltissimo della sezione aurea, in quanto questa permetteva o di disporre in modo armonico i personaggi, o di rappresentarli attraverso una proporzione ideale. Un esempio del primo caso è dato da *La sacra famiglia* di Michelangelo, in cui l'organizzazione del dipinto si basa sulla stella pentagonale che, come si è visto, è strettamente legata alla sezione aurea. Anche la spirale aurea venne usata dagli artisti del rinascimento con lo stesso proposito. Un esempio del secondo caso è invece offerto dall'emblematica *La nascita di Venere* di Botticelli. Secondo moltissimi esperti d'arte, non è da considerarsi una mera coincidenza, bensì una sincera e consapevole scelta dell'artista, il fatto che l'altezza dell'ombelico di Venere sia (approssimativamente) la sezione aurea della sua altezza complessiva. Tale idealizzazione del corpo umano (che tra l'altro vede ancora l'ombelico come suo baricentro fondamentale) fu probabilmente una concezione già teorizzata nell'antica Grecia, il fatto che nel corpo ideale l'altezza complessiva dovesse eguagliare: *8* volte il palmo, *6* volte i piedi, *6* volte la faccia e φ volte l'altezza dell'ombelico.
Ma il nome rinascimentale che più di altri compare quasi immancabilmente quando si discute dei rapporti tra arte e numero aureo è quello di Leonardo da Vinci, a cui si arriva addirittura ad attribuire l'invenzione dell'espressione "proporzione divina", della quale poi si sarebbe servito il matematico Pacioli. Prendendo in analisi le due versioni che Leonardo realizzò della *Vergine delle Rocce*, l'una custodita al Louvre di Parigi e l'altra alla National Gallery di Londra, si può notare in entrambi i dipinti come i rapporti tra l'altezza e la larghezza dei rettangoli ad essi circoscritti siano ragionevolmente vicini alla sezione aurea (1,64 e 1,58). L'ipotesi secondo cui Leonardo avesse applicato volutamente la costante di Fidia in tali due opere è tuttavia resa assai improbabile dal fatto che l'artista aveva realizzato la prima di queste tra il 1483 e il 1486, ovvero circa dieci anni prima dell'inizio della collaborazione con Pacioli e dunque della conoscenza delle affascinanti proprietà della sezione aurea.
Un altro esempio di un possibile utilizzo del rapporto aureo da parte di Leonardo è la *Testa di vecchio*, uno studio sulle proporzioni del volto dell'uomo visto di profilo. La presenza di una "griglia" sovrapposta al profilo del vecchio è sicuramente una conferma del fatto che Leonardo fosse interessato alle proporzioni del volto umano, ma, ancora una volta, è davvero difficile stabilire se tali proporzioni avessero a che fare con la sezione aurea, e questo nonostante uno dei rettangoli centrali della griglia sia approssimativamente un rettangolo aureo. Lo stesso si può dire osservando il volto della *Gioconda*: nonostante vari studi mostrino come tale volto possa essere inscritto in un perfetto rettangolo aureo e come i suoi lineamenti si dispongano anch'essi tra i lati di altri rettangoli aurei interni a quello di partenza, nulla permette di affermare con certezza che Leonardo ne fosse al corrente.



In conclusione è necessario muoversi con cautela: non si può dire se Leonardo avesse volutamente inserito la sezione aurea nei suoi dipinti. Al massimo si può ritenere con un alto grado di plausibilità che il genio fiorentino e i suoi colleghi del Rinascimento avessero dato una grande importanza alla relazione fra l'estetica e la matematica.
Il legame tra la storia dell'arte e φ si rende invece più palese con gli artisti di fine Ottocento e di inizio Novecento, periodo in cui, col diffondersi della letteratura accademica sul rapporto aureo, l'interesse per la sezione aurea crebbe anche tra gli artisti. Lasciando da parte alcune teorie oramai denigrate secondo cui il post-impressionista Georges Seurat (1859-1891) avrebbe inserito la costante di Fidia nelle sue opere come *La parade*, il primo importante artista e teorico dell'arte a impiegare φ fu probabilmente Paul Sérusier (1864-1927). Circondandosi di artisti post-impressionisti, quali Gauguin, Bonnard e Denis, Sérusier fondò il gruppo dei *Nabis* (in ebraico "profeti"), di cui faceva parte anche il compositore Claude Debussy. Probabilmente l'artista entrò in contatto con la sezione aurea tra il 1896 e il 1903, durante un colloquio con l'amico olandese Jan Verkade, il quale aveva poco prima partecipato a Beuron (Germania meridionale) a delle lezioni del monaco Padre Didier Lenz, basate sul recupero di semplici figure geometriche come il cerchio, il triangolo equilatero e l'esagono regolare, che Padre Lenz riteneva presenti in tutti capolavori artistici dell'antichità, compresi i templi egizi e greci. In particolare, il pittore Denis, appartenente al gruppo artistico di Sérusier, in alcune note biografiche su Sérusier riportava in maniera esplicita come tra le misure utilizzate da Padre Lenz era presente anche la sezione aurea. E Sérusier, affascinato da tale rapporto aureo e dalle sue presunte relazioni con la grande Piramide e l'arte greca, discusse di questo argomento, riferendosi esplicitamente alla sezione aurea, nel suo importante manuale di pittura *L'ABC de la peinture*. È anche certo che questo amore filologico di Sérusier per la sezione aurea si tradusse nel consapevole utilizzo di questa in alcune opere.
Dopo Sérusier, il concetto di sezione aurea si diffuse in altri ambienti artistici, in particolare tra alcuni cubisti, quali i fratelli Villon, Gleizes e Picabia, che, pur non facendone un uso esplicito, nell'ottobre del 1912 organizzarono a Parigi una mostra intitolata "Section d'Or", dimostrando interesse per sue proprietà matematiche e per le sue potenzialità espressive in campo artistico. Furono invece il pittore cubista spagnolo Gris e lo scultore cubista lituano Lipchitz a usare il rapporto aureo in alcuni lavori. Ad esempio i due artisti collaborarono nella realizzazione della scultura *Arlequin*, per la quale si servirono del triangolo di Keplero, basato sulla sezione aurea, per ottenere le proporzioni desiderate. Ha scritto Lipchitz:

> *"A quel tempo ero molto interessato alle teorie delle proporzioni matematiche, come altri cubisti, e tentai di applicarle alle mie sculture. Provavamo tutti una grande curiosità per quell'idea di una regola aurea, o sezione aurea, un metodo che si diceva fosse stato alla base dell'arte e dell'architettura dell'antica Grecia."*[6]

Altri importanti artisti che con certezza si servirono della sezione aurea nelle loro opere furono il pittore futurista italiano Severini (1883-1966), la pittrice cubista russa Marevna (1892-1984) e soprattutto l'architetto svizzero-francese Le Corbusier, considerato uno dei più decisi fautori dell'applicazione di φ nel mondo dell'arte. Interessatosi fin da giovane alla pittura e alla musica, oltre che all'architettura, Le Corbusier aveva inizialmente espresso un marcato scetticismo nei confronti dell'applicazione della sezione aurea nell'arte. Un'attenta analisi dei suoi progetti architettonici e dei suoi quadri da parte di Roger Herz-Fischler rivela infatti che fino al 1927 l'artista non utilizzò mai il rapporto aureo. Tuttavia questa situazione cambiò con la lettura dei libri di Matila Ghyka, che accentuarono l'interesse di Le Corbusier per la sezione aurea, aspetto che egli fu in grado di collegare immediatamente alla sua arte architettonica, nonché alla sua passione per la musica, consapevole dell'importanza dei rapporti numerici per la generazione di un'armonia acustica. Nel frattempo l'architetto si rendeva conto che il Sistema Metrico aveva privato l'uomo della concezione classica secondo cui il corpo umano sia la misura di tutte le cose. Per recuperare questa concezione egli ideò una sua propria scala, basata sulla sezione aurea, che si ponesse come rivisitazione dell'Uomo Vitruviano e del Canone di Policleto intesi come armonia e giusta misura. Venne così alla luce un nuovo sistema proporzionale, il *Modulor*:



Questo sistema doveva servire a tutti gli architetti al fine di armonizzare i propri progetti con le esigenze abitative e, per questo motivo, esso doveva basarsi sull'armonia e la proporzione di un corpo umano ideale, nello spirito dell'impulso filosofico alla ricerca di un sistema di rapporti e proporzioni conformi alla creazione naturale. Un uomo alto circa 183 cm veniva dunque inserito in un quadrato, nel quale venivano poi ricavate le proporzioni a partire dall'armonia del corpo umano ideale. Ideale in quanto il rapporto tra l'altezza complessiva dell'uomo (183 cm) e la distanza dall'ombelico al suolo (113cm) era incredibilmente simile alla sezione aurea φ: *183/113 = 1,619...* all'interno del *Modulor* si ritrovano poi altre serie di lunghezze disposte in due *serie* (*blu* e *rossa*) in modo tale che ciascuna fosse la somma delle due precedenti (come per la successione di Fibonacci, connessa, come si è visto alla sezione aurea). Il rapporto tra una lunghezza e quella più piccola che la precede è sempre un valore molto vicino alla sezione aurea. Ad esempio *1130/698 = 1,618...* ; *1829/1130 = 1,618...* ; *2260/1397 = 1,618...* ; *1397/863 = 1,618...* .
Lo stesso Le Corbusier mostrò più volte il suo entusiasmo per come la sezione aurea veniva armonizzando gli spazi architettonici esattamente come prevedeva lo stesso *Modulor*:

> *"Il metro, il decimetro, il centimetro, non sono a scala umana, il Modulor sì. Prendete le proporzioni dal plesso solare fino alla testa e al braccio e vi troverete la sezione aurea, creerete un sistema di proporzionamento che risponde alle dimensioni del corpo umano. Io lo scoprii senza rendermene inizialmente conto. Non sono presuntuoso, ma è qualcosa di importante, che apre enormi possibilità per l'industria; è utile e moderno...; è un'innovazione sensazionale."*[7]

E ancora, descrivendo il progetto per il *Mundaneum* di Ginevra, che aveva concepito come una città rettangolare, dove il rapporto tra la lunghezza e la profondità del rettangolo era dato dalla sezione aurea φ:

> *"La sezione aurea definisce entrambi gli assi di crescita così come i lati della cinta generale, il ritmo è ordinato in accordo con la sezione aurea, misura che ha determinato l'armonia di tante opere di tutti i tempi."*[7]

Il Modulor venne pubblicato una prima volta nel 1950 e fu seguito da una sua rivisitazione nel 1955. Il fisico Albert Einstein ebbe modo di esaminarlo e apprezzarlo, commentandolo con le seguenti parole: “È una scala di proporzioni che rende difficile l’errore, facile il suo contrario.”[8] Le Corbusier ebbe modo di mettere esplicitamente in pratica la teoria del *Modulor* in molti suoi progetti, come nel piano urbanistico di Chandigarh, in India, o ad esempio nell’Unità d’Abitazione di Marsiglia.
Sembra che la sezione aurea nel corso della storia abbia avuto alcuni legami anche con la musica. Il famoso liutaio Antonio Stradivari (1644-1737), secondo alcune ipotesi, poneva molta attenzione nel posizionare le aperture delle casse dei suoi violini in base alla proporzione aurea. Per quanto riguarda l’ambito della composizione, pare che usassero nelle loro partiture la ragione aurea alcuni compositori quali Bela Bartok e Claude Debussy. Quest’ultimo, come si è detto, fu molto in contatto con l’artista Sérusier, dal quale fu probabilmente influenzato nelle tematiche riguardanti le connessioni tra la sezione aurea e le differenti arti. Quindi, se Sérusier si dedicò all’applicazione del numero aureo alla pittura, Il compositore Debussy fece lo stesso nel campo della musica.
Questa breve analisi mostra sicuramente come la sezione aurea non rimase nel corso della storia solamente un valore astratto dotato delle più affascinanti proprietà matematiche. Tale divina proporzione al contrario suscitò a tal punto l’interesse degli artisti da giungere a concretizzarsi in svariate “pietre miliari” della storia dell’arte. A conti fatti, la storia dell’arte insegna dunque ancora una volta come la matematica sia detentrice dei concetti classici (e sicuramente non romantici, in quanto in essi non è presente la romantica tensione, ma solo l’equilibrio, la calma e la compostezza neoclassica) di bellezza, ordine, proporzione e armonia, concetti che si esplicano poi in tutte quelle forme d’arte che riescono a interiorizzare la matematica, a fare propria la sua inesauribile capacità di esprimere la bellezza ed esaltare l’armonia.

15 - Hardy: la matematica come arte

Il saggio è stato impostato come un elenco di riflessioni, di esempi matematici e di pensieri di grandi menti del passato aventi lo scopo di mostrare dove si possa trovare la bellezza all'interno della matematica e in che cosa essa consista. Si è visto più volte in particolare come la bellezza della matematica dipenda anzitutto dall'armonia fra le parti che la compongono. Questa *armonia fra le parti* era secondo Winckelmann, teorico del movimento artistico – letterario del neoclassicismo, il canone distintivo di tutte le opere d'arte del mondo classico, era cioè il motivo per cui capolavori come l'Apollo del Belvedere o il Partenone sono dotati di un'innegabile bellezza. L'armonia fra le parti era anche, secondo Kant, ciò che permette di discriminare il *bello ideale* neoclassico dal disarmonico *sublime* romantico. La bellezza della matematica giace in questo stesso neoclassico concetto di *armonia fra le parti*. Come fa notare il matematico Antonio J. Duran nel suo trattato di estetica matematica *La musa dei numeri*:

> *"[...] la bellezza del Partenone risiede nell'armonia degli elementi architettonici che lo compongono. Prendendo come base questa conclusione, chiediamoci che cosa forma i ragionamenti matematici. Pare chiaro che siano le idee, le idee matematiche. Ossia, la bellezza dei ragionamenti matematici dobbiamo cercarle nella combinazione armonica delle distinte idee matematiche che li compongono."*[1]

Un ragionamento piuttosto simile lo si ritrova all'interno dell'*Apologia di un matematico*, nella quale l'autore, il matematico inglese Godfrey Harold Hardy (1887-1966), arriva a sostenere con tutte le sue forze come la matematica sia un'arte e come l'attività di un matematico non sia poi così diversa da quella di un pittore, di un musicista o di un poeta, in quanto tutte queste figure creano, costruiscono capolavori dotati di bellezza. Riguardo questo tema, lo scrittore Graham Greene commentò l'*Apologia* con le seguenti parole:

> *"L'Apologia di un matematico è, insieme con i Taccuini di Henry James, la descrizione più riuscita di cosa significhi essere un "artista creativo"."*

A questo punto sorge spontanea una questione: i matematici *scoprono* la matematica o la *creano*? Perché, qualora la matematica fosse la semplice scoperta di qualcosa che già esiste a prescindere dalla mente dell'uomo, allora sarebbe davvero difficile attribuire il termine di "artista creatore" a un matematico. Se invece la matematica non fosse altro che un'ideazione della mente umana indipendente da una realtà che esiste a priori, allora immediatamente tale disciplina sarebbe considerata universalmente la più grande delle arti dell'uomo. Hardy, pur essendo convinto dell'identità tra "matematico" e "artista", era convinto che la matematica sia una realtà esterna che i matematici semplicemente osservano, senza alcun contributo personale. Quello di Hardy è dunque una sorta di platonismo, secondo cui la matematica esiste come realtà esterna indipendente dalla mente dell'uomo:

> *"Credo che la realtà matematica stia fuori di noi, che il nostro compito sia di scoprirla o di osservarla, e che i teoremi che noi dimostriamo, qualificandoli pomposamente come nostre creazioni, siano semplicemente annotazioni delle nostre osservazioni."*[2]

Al contrario, i matematici Kasner e Newman espressero esattamente il punto di vista opposto in *Matematica e Immaginazione*. Essi, prendendo come esempio le *geometrie non euclidee*, arrivarono a sostenere che la matematica non è altro che un'invenzione dell'uomo, un prodotto della mente umana, in quanto, come fanno notare le infinite geometrie che si possono creare, è possibile plasmarla in modi completamente diversi l'uno dall'altro:

> *"In conseguenza del coraggioso spirito critico che ha generato le eresie [le geometrie non euclidee], abbiamo superato il concetto che le verità matematiche hanno un'esistenza indipendente e separata dalle nostre menti. Ci appare persino strano che un tale concetto sia potuto esistere. Eppure è quello che Pitagora avrebbe pensato – e con lui Cartesio e centinai di altri grandi matematici prima del XIX secolo. Oggi la matematica non è più prigioniera; si è sbarazzata delle sue catene. Qualunque sia la sua essenza, riconosciamo che è libera come la mente, prensile come l'immaginazione. La geometria non euclidea è la dimostrazione che la matematica, a differenza della musica delle sfere, è opera dell'uomo, soggetta solamente ai limiti imposti dalle leggi del pensiero."*[3]

Il fatto che la matematica sia una disciplina assolutamente teorica e astratta, indipendente da qualunque realtà concreta, è sicuramente un aspetto a favore di chi è convinto che la matematica sia una produzione dell'uomo. In effetti non si può negare che tutti i ragionamenti e le lunghe dimostrazioni dei teoremi che vanno a formare la matematica dipendono solamente della mente dell'uomo, e, a dimostrazione di questo, vi è il fatto che gli assiomi della geometria, come del resto quelli di tutte le branche della matematica, sono posti dalla mente dell'uomo. In altri termini, è l'uomo che sceglie quali verità si possono assumere per la loro evidenza e porre come assiomi da cui derivare in seguito tutto il sistema matematico. Da questo punto di vista pare assai sensato ritenere che la geometria è un'ideazione dell'uomo, deriva cioè dal libero svolgimento creativo del suo pensiero. Qualora quest'ultimo rifiutasse uno dei postulati, esso è del tutto legittimato a ripartire da capo con un nuovo insieme di assiomi, sui quali costruire una nuova geometria.
Non si può dare per scontato che la matematica esista a prescindere dalla mente dell'uomo, anzi, è davvero rischioso, filosoficamente parlando, ammetterlo. Se, come ha fatto notare Kant, la mente umana può applicare le sue forme a priori solo a ciò di cui ha esperienza, allora non ha senso ammettere che la matematica esista al di là della mente umana e che l'uomo con le sue facoltà mentali la stia solamente scoprendo. Non ha senso, in quanto le sue stesse facoltà mentali non gli permettono di andare oltre la sua esperienza, la sua coscienza. Per questo motivo non si può ammettere l'esistenza di una matematica che esista prima della mente umana, e che la condizioni durante il processo conoscitivo, per il fatto che, non avendone esperienza, ciò equivarrebbe ad ammettere qualcosa che la mente non ha modo di conoscere. Seguendo l'esempio che Kant stesso fa nella *Critica della ragion pura*, non è possibile provare l'esistenza di Dio in quanto la mente umana non ne ha esperienza. Per questo motivo in Dio si può, secondo il filosofo, solamente credere. Allo stesso modo, non è possibile dimostrare l'esistenza del "Dio matematico" dei figli della rivoluzione scientifica. Non si può cioè stabilire se esiste o non esiste una "matematica a priori" su cui la mente si modella passivamente durante il processo conoscitivo. Kant stesso aveva compiuto, secondo gli idealisti, il medesimo errore, ammettendo l'esistenza di un noumeno, una realtà esterna che condiziona in parte la conoscenza dell'uomo. Kant era infatti convinto che le forme a priori della mente dell'uomo non hanno la facoltà di conoscere la cosa in sé, il noumeno, ma solamente un'interpretazione di essa, il fenomeno, che sono le stesse forme a priori della mente dell'uomo a produrre. Nel caso della matematica, Kant direbbe dunque probabilmente che una realtà esterna alla mente umana esiste, e che quella che gli uomini chiamano matematica non è che una delle infinite costruzioni fenomeniche che si possono fare attorno alla vera realtà.
Gli idealisti fecero notare tuttavia a Kant che anche l'ammissione del noumeno è impossibile, in quanto di esso non si ha esperienza. La mente non ha cioè coscienza di questa realtà esterna e dunque non è possibile ammetterne con sicurezza l'esistenza. Nel caso della matematica dunque non è possibile stabilire se esiste o non esiste una realtà matematica al di là delle forme a priori dell'intelletto umano. Si può solamente scegliere quale delle due filosofie di vita adottare: nel primo caso, ammettendo l'esistenza di una realtà esterna, la matematica dell'uomo non è che un'interpretazione umana di questa "realtà divina", nel secondo caso la vera e propria realtà matematica è essa stessa una produzione dell'uomo. In entrambi i casi la matematica umana è qualcosa che esiste all'interno della mente umana, che dipende da essa, e in questo senso, essendo

generata dal puro svolgimento creativo del pensiero, essa è arte. Come fa notare l'idealista Fichte, persino le verità più intuitive sono in realtà un prodotto della mente umana, compreso il principio di identità, su cui si fonda l'intera matematica, secondo cui $A = A$. Secondo gli idealisti, infatti, prima che il valore A eguagli se stesso, è necessario che una coscienza lo faccia, è necessario cioè che la mente dell'uomo ponga $A = A$. Kant direbbe, usando altre parole, la stessa cosa, e cioè che, se $A = A$, ciò non è vero di per sé, per il fatto che la realtà matematica è così a priori, ma perché la mente dell'uomo è costituita in modo tale da porre $A = A$, perché sono le forme a priori del suo intelletto a porre che $A = A$.

La matematica è dunque un prodotto della mente dell'uomo e per questo motivo essa è un arte. Lo stesso Hardy, grande sostenitore di questa concezione, è convinto che la bellezza della matematica risieda nella proporzione con cui si esplicano i suoi ragionamenti:

> *"Il matematico, come il pittore e il poeta, è un creatore di forme. Se le forme che crea sono più durature delle loro è perché le sue sono fatte di idee. Il pittore crea forme con i segni e i colori, il poeta con le parole. [...] Il matematico, invece, non ha altro materiale con cui lavorare, se non le idee. [...] Le forme create dal matematico, come quelle create dal pittore o dal poeta, devono essere belle; le idee, come i colori o le parole, devono legarsi armoniosamente. La bellezza è il requisito fondamentale: al mondo non c'è un posto perenne per la matematica brutta."*[4]

Perché dunque è difficile apprezzare la bellezza della matematica? Ebbene, come spiega Duran, se la bellezza di un ragionamento di matematica sta nella *congiunzione armonica delle idee che lo formano, così come la bellezza di un edificio è radicata nell'armonia degli elementi architettonici che lo compongono, [...]il problema è la mancanza di un senso appropriato per discernere, in modo automatico, la struttura di idee che compone tale ragionamento e nella cui combinazione armonica si nasconde la sua bellezza*[5]. In effetti, spiega Duran, se le arti figurative (pittura, scultura e architettura) appagano il senso della vista, mentre la musica il senso dell'udito, nella matematica, così come nella letteratura (la quale può comunque essere percepita attraverso l'udito), i cinque sensi il più delle volte non sono sufficienti per apprezzarne la bellezza, e ciò vale molte volte anche nel campo della musica. La matematica in particolare pare l'arte più difficilmente apprezzabile proprio perché non viene intuita attraverso l'automatismo dei sensi. Il lavoro di analisi richiede uno sforzo, nel senso che per distinguere la bellezza tra i teoremi della matematica, è necessario un grande impegno da parte della ragione. *In ogni caso*, conclude Duran, *è questo legame tra bellezza e ragione che rende la matematica depositaria di un valore estetico.*[6]

Un altro aspetto su cui Hardy si sofferma particolarmente è il fatto che la matematica si pone come un'arte più duratura rispetto a tutte le altre, in quanto è composta solamente di idee, e dunque non necessita di particolare attenzione e cura, fondamentali invece nell'ambito delle arti figurative per evitare che cadano in rovina. La matematica appare solida, duratura e immortale:

> *"La matematica greca è "perenne", ancora più della letteratura greca. Archimede sarà ricordato quando Eschilo sarà dimenticato, perché le lingue muoiono ma le idee matematiche no. "Immortalità" forse è una parola ingenua, ma un matematico ha più probabilità di chiunque altro di raggiungere quello che questa parola designa.*[7] *[...] Le forme che crea hanno qualche probabilità di durare più a lungo, perché le idee si usurano meno delle parole."*[8]

La matematica dunque, per il suo carattere rigorosamente astratto, sembra porsi al di là di ogni mutamento concreto. Come la poesia (si pensi al celebre verso di Orazio *Exegi monumentum aere perennius*, o alla funzione eternatrice della poesia secondo Foscolo e Keats) la matematica è in grado di rendere perenni i suoi concetti, di sottrarsi al divenire.

Si sono visti numerosi esempi, nel corso del saggio, della grandissima capacità espressiva della matematica. In solamente un equazione Newton realizzò una sintesi di tutto il sapere della

rivoluzione scientifica. In solamente quattro equazioni, armoniche per la simmetria con cui si pongono (sono due per il campo elettrico e due per il campo magnetico, due per il flusso e due per la circuitazione) Maxwell sintetizzò tutta la teoria dell'elettromagnetismo. Secoli e secoli di osservazioni sperimentali e di teorie si riducono a pochissime equazioni incredibilmente espressive. È assurdo pensare come poche equazioni riescano a esprimere così tanto. E pensare che questo è sempre stato il sogno di ogni poeta, da Ovidio a Dante a Ungaretti, artisti che riuscirono a esprimere sinteticamente concetti immensi, con versi estremamente concreti e pregnanti i primi due, con pochissime parole usate quasi singolarmente il terzo. In questo senso la matematica si avvicina, per le sue qualità espressive, alla poesia. Qualità espressive che si accompagnano sempre a una sconcertante sinteticità e capacità di generalizzare, se si pensa al teorema di Carnot, o all'equazione già analizzata secondo cui ogni potenza intera della sezione aurea è la somma delle due potenze precedenti, e alla tendenza a unificare i concetti più disparati, se si prende come esempio il limite del rapporto tra due termini successivi della successione di Fibonacci, o la formula di Binet, oppure l'equazione secondo cui ogni potenza *n*esima della sezione aurea è pari alla somma di φ volte l'*n*esimo numero di Fibonacci e l'*(n – 1)esimo* numero di Fibonacci. Tutte queste qualità, come si è visto, fanno della matematica un'arte infinitamente affascinante, depositaria dei canoni di bellezza, di ordine e di armonia.
Il primo aspetto, la bellezza delle generalizzazioni propria della matematica, era condiviso anche dallo stesso Hardy, che lo definiva proprietà di *generalità*, secondo cui *il teorema, anche se all'origine è enunciato in una forma molto particolare, deve essere suscettibile di una notevole estensione e caratteristico di tuta una classe di teoremi della stessa specie*[9]. I teoremi e le equazioni più interessanti a livello estetico sono dunque, come già si è detto in precedenza, quelli che si pongono come generalizzazioni di teoremi più particolari. Il matematico parla anche del secondo aspetto già affrontato, ossia la qualità estetica della matematica di unificare concetti disparati, di creare un profondo legame tra due oggetti matematici che parevano privi di contatto (si è visto un esempio di tutto ciò analizzando i legami esistenti tra la successione di Fibonacci e la Sezione Aurea). La proprietà è definita da Hardy *profondità*, intesa come capacità della matematica di vincolare tra loro differenti strati matematici attraverso legami inaspettati. Come spiega lo stesso Hardy nell'*Apologia*, *è come se le idee matematiche fossero disposte a strati e le idee di ogni strato fossero legate, per mezzo di un complesso sistema di relazioni, sia fra loro sia con quelle degli strati inferiori e superiori*[10]. Sono questi, secondo il matematico, due aspetti essenziali che conferiscono alla matematica la bellezza che le compete.
Come sicuramente si è già notato, Hardy nell'*Apologia* tende ad esaltare la matematica pura a discapito di quella applicata, ritenendo solo la prima una vera arte. La matematica applicata infatti è troppo vincolata agli stessi fini pratici a cui è stata applicata e non raggiunge quel grado di purezza e astrazione proprio della produzione dei matematici puri. Più volte nel corso del testo il matematico tende a dichiarare esplicitamente l'"inutilità" della matematica pura come motivo di vanto nei confronti di tutti i matematici applicati:

> *"È innegabile che una buona parte della matematica elementare ha una considerevole utilità pratica. Questa parte delle matematica in complesso è piuttosto noiosa ed è proprio quella che ha minore valore estetico. La "vera" matematica dei "veri" matematici, quella di Fermat, di Eulero, di Gauss, di Abel e di Riemann, è quasi totalmente "inutile". Non è possibile giustificare la vita di nessun vero matematico professionista sulla base dell'"utilità" del suo lavoro."*[11]

> *"La posizione di un comune matematico applicato non è in un certo senso un po' patetica? Se vuole essere utile, deve lavorare in modo limitato e noioso, senza dare libero corso alla fantasia anche quando desidererebbe levarsi a grandi altezze. Gli universi "immaginari" sono molto più belli di un mondo stupidamente costruito come il nostro mondo "reale"; e i più bei prodotti dell'immaginazione di un matematico*

applicato devono in gran parte essere respinti appena creati per la ragione, brutale ma sufficiente, che non si adattano ai fatti."[12]

Molto spesso Hardy arrivò addirittura a dire che la bellezza fosse l'unica cosa che dota la matematica di valore e che dona dunque un senso alla vita di ogni matematico puro. Probabilmente, fa notare Duran, *Hardy, a suo modo, stava dichiarando che per le questioni di estetica era un seguace di Kant*[13]. Il filosofo tedesco infatti, nella Critica del giudizio, definisce il bello, oltre che come *armonia fra le parti*, anche come *inutilità* (come già si è accennato nel corso del saggio), intendendo che il bello non ha alcun fine al di fuori di se stesso. Il bello, in altri termini, è fine a se stesso, e non si può dire bello se esiste per un altro fine oltre a se stesso. L'arte, conclude Kant, è *finalità senza fine*, è inutile, è una produzione dell'uomo fine a se stessa, che trova il suo motivo di esistere in se stessa. L'arte, spiega Kant, non si può dire tale se viene creata per fini pratici che non rientrano nell'arte stessa, quali ad esempio il tornaconto personale, o la commercializzazione dell'opera d'arte. L'arte non si può dire tale nemmeno se, osservandola, si è presi dal desiderio di possederla. L'arte è libera, appartiene solo a se stessa, epurata da ogni turpe fine pratico. Da questo punto di vista la matematica pura e astratta è arte, in quanto è inutile, fine a se stessa, libera da ogni condizionamento esterno. Era questo probabilmente il motivo per cui Hardy, secondo Duran, elogiava di continuo l'inutilità della matematica:

"Così quello che pretendeva Hardy esaltando l'inutilità della matematica non era fare lo stravagante; seguendo la teoria estetica di Kant, Hardy stava sostenendo che la matematica è più arte che scienza."[13]

A questo punto dovrebbero essere chiari i motivi per cui la matematica può essere considerata una disciplina di carattere artistico depositaria del concetto di bellezza. Essa non è che una fitta rete di teoremi ideati dalla mente umana ed esistenti solo al suo interno, che si concatenano di continuo per generarne ancora all'infinito. E il matematico è un artista che contribuisce alla crescita di questo sistema fine a se stesso, con l'unico scopo di accrescersi all'infinito, di accrescere la purezza e la bellezza che ne costituisco l'unica ragione di esistere. Che poi la matematica serva in ogni altro ambito del sapere umano, dalla fisica alla chimica, dall'ingegneria all'economia, dall'informatica all'architettura, è risaputo e non è messo in dubbio. Ma l'infinita utilità della matematica, come fa notare Hardy, non è una prova della sua bellezza. La bellezza dell'arte non giace nella sua funzionalità, nella sua utilità nel mondo concreto. La bellezza è un'altra cosa, una qualità superiore, distaccata dalla mentalità moderna applicata alla continua ricerca dell'utile e del profitto. Vale la pena di dedicare la propria vita all'inutile coltivazione di questa ineffabile bellezza?

"Non ho mai fatto niente di "utile". Nessuna mai scoperta ha aggiunto qualcosa, né verosimilmente aggiungerà qualcosa, direttamente o indirettamente, nel bene e nel male, alle attrattive del mondo. Ho aiutato a formare altri matematici, ma erano matematici della mia stessa specie e il loro lavoro, quello che hanno compiuto col mio aiuto, è stato altrettanto inutile del mio. Giudicato secondo tutti i parametri pratici, il valore delle mia vita matematica è nullo, e al di fuori della matematica è assolutamente insignificante. Ho un'unica possibilità di sfuggire a un verdetto di irrilevanza totale, se si giudica che ho creato qualcosa che valeva la pena creare. Che ho creato qualcosa di innegabile: la questione riguarda il suo valore.
La sola difesa della mia vita, allora, o di chiunque sia stato matematico nello stesso mio senso, è dunque questa: ho aggiunto qualcosa al sapere e ho aiutato altri ad aumentarlo ancora; il valore dei miei contributi si differenzia soltanto in grado, e non in natura, dalle creazioni dei grandi matematici, o di tutti gli altri artisti, grandi e piccoli, che hanno lasciato qualche traccia dietro di loro."[14]

A quanto pare, sì.

Note

1 - Prefazione

1. Isaac Newton, citato in Mario Livio, *Dio è un matematico*, 2010 Rizzoli, cap.4, pag.139.
2. Bertrand Russell, citato in Antonio J. Duran, *La musa dei numeri*, 2011 RBA, cap.1, pag.9.

2 - Pitagora, i pitagorici e la bellezza dei numeri

1. Ovidio, *Metamorfosi*, libro XV.
2. Antoine-Laurent de Lavoisier, citato in *Histoire et Dictionnaire de la Révolution Française*, Parigi, Éditions Robert Laffont, 1998.
3. Sant'Agostino, *La Genesi alla lettera*, libro IV, par.7,14.
4. Pitagora, citato in Heath 1921.
5. Giamblico, 300 d.C. circa; si veda Guthrie 1987.

4 - Keplero, un figlio del suo tempo

1. Hobbes, *Leviatano*, 1651.
2. Keplero, citato in Mario Livio, *La sezione aurea*, 2003 Rizzoli, cap.6, pag.216.
3. Keplero, citato in Mario Livio, *La sezione aurea*, 2003 Rizzoli, cap.6, pag.218.
4. Keplero, citato in Antonio J. Duran, *La musa dei numeri*, 2011 RBA, cap.1, pag.9.

5 - Keplero e la divina proporzione

1. Euclide, *Elementi*, libro VI.
2. Keplero, citato in Mario Livio, *La sezione aurea*, 2003 Rizzoli, cap.6, pag.228-229.

6 - La sezione aurea, ovvero l'armonia

1. Mario Livio, *La sezione aurea*, 2003 Rizzoli, cap.1, pag.11.
2. Godfrey Harold Hardy, 1940, *Apologia di un matematico*, 2012 Garzanti, cap.29, pag.105.
3. Giamblico, 300 d.C. circa.

7 - Divine proprietà

1. Paul S. Bruckman, *Constantly Mean*, 1977, periodico "The Fibonacci Quarterly".

8 - La successione di Fibonacci

1. Leonardo Pisano detto Fibonacci, *Liber Abaci*, 1202, capitolo I – incipit.
2. Leonardo Pisano detto Fibonacci, *Liber Abaci*, 1202, capitolo XII.

9 - La mirabile armonia

1. Mario Livio, *La sezione aurea*, 2003 Rizzoli, cap.4, pag.127-128.
2. Paul S. Bruckman, *Constantly Mean*, 1977, periodico "The Fibonacci Quarterly".
3. Mario Livio, *La sezione aurea*, 2003 Rizzoli, cap.4, pag.131.

11 - Il Dio matematico di Cartesio e Newton

1. Cartesio, *Discorso sul metodo*, parte II.
2. Cartesio, *Discorso sul metodo*, parte IV.
3. John Stuart Mill, citato in Sedgwick e Tyler 1917.
4. Joseph-Louis Lagrange, citato in Mario Livio, *Dio è un matematico*, 2010 Rizzoli, cap.4, pag.134.
5. Isaac Newton, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, libro III, *Regole del filosofare*, pp.609-13.
6. A. Koyré, *Studi newtoniani*, p.8.
7. Isaac Newton, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, *Praefatio ad lectorem*.

8. Mario Livio, *Dio è un matematico*, 2010 Rizzoli, cap.4, pag.144.
9. Isaac Newton, citato in Mario Livio, *Dio è un matematico*, 2010 Rizzoli, cap.4, pag.154-155.
10. Isaac Newton, citato in Mario Livio, *Dio è un matematico*, 2010 Rizzoli, cap.4, pag.156-157.
11. Cartesio, citato in Mario Livio, *Dio è un matematico*, 2010 Rizzoli, cap.4, pag.159.

12 - Il limite della successione e il calcolo dell'infinito
1. Aristotele, *Fisica*, libro III
2. Cartesio, citato in Antonio J. Duran, *La musa dei numeri*, 2011 RBA, cap.5, pag.136.
3. Spinoza, citato in Antonio J. Duran, *La musa dei numeri*, 2011 RBA, cap.5, pag.136.
4. Leibniz, citato in Antonio J. Duran, *La musa dei numeri*, 2011 RBA, cap.5, pag.136.
5. Antonio J. Duran, *La musa dei numeri*, 2011 RBA, cap.4, pag.121.
6. Immanuel Kant, *Critica del giudizio*
7. Giacomo Leopardi, *Zibaldone*, "La teoria del piacere", pp.165-172.
8. August Wilhelm Schlegel, *Corso di letteratura drammatica*.
9. Georg Wilhelm Friedrich Hegel, *Fenomenologia dello spirito*, libro I, pp.13-16.

13 - Geometrie auree
1. Clifford A. Pickover, citato in Mario Livio, *La sezione aurea*, 2003 Rizzoli, cap.4, pag.132.
2. Mario Livio, *La sezione aurea*, 2003 Rizzoli, cap.5, pag.177.

14 - L'arte che fa propria la divina proporzione
1. John Herschel, citato in Mario Livio, *La sezione aurea*, 2003 Rizzoli, cap.3, pag.87.
2. Midhat J. Gazalé, citato in Mario Livio, *La sezione aurea*, 2003 Rizzoli, cap.3, pag.88.
3. Luca Pacioli, *De divina proportione*, libro I, capitolo V.
4. Vitruvio Pollione, citato in Mario Livio, *La sezione aurea*, 2003 Rizzoli, cap.6, pag.200.
5. Luca Pacioli, *De divina proportione*, libro II, capitolo I.
6. Jacques Lipchitz, citato in Mario Livio, *La sezione aurea*, 2003 Rizzoli, cap.7, pag.250.
7. Le Corbusier, citato in *La sezione aurea, il linguaggio matematico della bellezza*, 2012 RBA, cap.4, pag.120-121.
8. Albert Einstein, citato in Mario Livio, *La sezione aurea*, 2003 Rizzoli, cap.7, pag.257.

15 - Hardy: la matematica come arte
1. Antonio J. Duran, *La musa dei numeri*, 2011 RBA, cap.1, pag.12.
2. Godfrey Harold Hardy, 1940, *Apologia di un matematico*, 2012 Garzanti, cap.22, pag.89.
3. Kasner – Newman, citati in Mario Livio, *Dio è un matematico*, 2010 Rizzoli, cap.9, pag.300.
4. Godfrey Harold Hardy, 1940, *Apologia di un matematico*, 2012 Garzanti, cap.10, pag.66-67.
5. Antonio J. Duran, *La musa dei numeri*, 2011 RBA, cap.2, pag.35.
6. Antonio J. Duran, *La musa dei numeri*, 2011 RBA, cap.2, pag.44.
7. Godfrey Harold Hardy, 1940, *Apologia di un matematico*, 2012 Garzanti, cap.8, pag.65.
8. Godfrey Harold Hardy, 1940, *Apologia di un matematico*, 2012 Garzanti, cap.10, pag.67.
9. Godfrey Harold Hardy, 1940, *Apologia di un matematico*, 2012 Garzanti, cap.15, pag.78.
10. Godfrey Harold Hardy, 1940, *Apologia di un matematico*, 2012 Garzanti, cap.17, pag.82.
11. Godfrey Harold Hardy, 1940, *Apologia di un matematico*, 2012 Garzanti, cap.21, pag.87.
12. Godfrey Harold Hardy, 1940, *Apologia di un matematico*, 2012 Garzanti, cap.26, pag.96.
13. Antonio J. Duran, *La musa dei numeri*, 2011 RBA, cap.4, pag.106-107.
14. Godfrey Harold Hardy, 1940, *Apologia di un matematico*, 2012 Garzanti, cap.29, pag.105.

Bibliografia

Libri:
Mario Livio, *La sezione aurea*, 2003 Rizzoli
Mario Livio, *Dio è un matematico*, 2010 Rizzoli
La sezione aurea, il linguaggio matematico della bellezza, 2012 RBA
Antonio J. Duran, *La musa dei numeri*, 2011 RBA
Godfrey Harold Hardy, 1940, *Apologia di un matematico*, 2012 Garzanti

Classici consultati:
Euclide, *Elementi*, libro VI
Ovidio, *Metamorfosi*, libro XV
Leonardo Pisano detto Fibonacci, *Liber Abaci*, 1202, capitolo I
Cartesio, *Discorso sul metodo*
Isaac Newton, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, libro III
Georg Wilhelm Friedrich Hegel, *Fenomenologia dello spirito*, libro I

Testi scolastici consultati:
Enzo Ruffaldi, Piero Carelli, *Filosofia: dialogo e cittadinanza – Vol.2 – Dall'età moderna all'Idealismo*, Loescher
Guido Baldi, Silvia Giusso, Mario Razetti, Giuseppe Zaccaria, *La letteratura – Vol.4 – L'età napoleonica e il Romanticismo*, Paravia
G. P. Parodi, M. Ostili, G. Mochi Onori, *L'evoluzione della fisica – Vol.1*, Paravia
Massimo Bergamini, Anna Trifone, Graziella Barozzi, *Matematica.blu 2.0 – Vol.4-5*, Zanichelli

Sitografia:
Wikipedia, l'enciclopedia libera