I.S.I.S.S. MARCO CASAGRANDE

ANNA BARISAN

V B LICEO SCIENTIFICO

TESINA DI MATURITA'

IL PROBLEMA DEL CERCHIO DI GAUSS

ANNO SCOLASTICO 2014-2015

PIEVE DI SOLIGO GIUGNO 2015

*"La matematica è la regina delle scienze,
l'aritmetica è la regina della matematica."*

Johann Carl Friedrich Gauss

Indice

1 Introduzione

Ho scelto questo tema prendendo spunto da una curiosità personale. Nel corso del mio ciclo di istruzione superiore, frequentando un liceo scientifico, ho fronteggiato per cinque anni i teoremi, le formule e le applicazioni della matematica. La passione per questa materia, da sempre la mia preferita, non ha fatto che aumentare. Mi sono accorta della sua "eleganza e fantasia", scoprendo una disciplina affascinante, che insegna a pensare in modo razionale. É interessante, dal mio punto di vista, soprattutto la contrapposizione e complementarietà di questi due aspetti: da un lato il rigore e il procedimento accurato da seguire, dall'altro l'apporto personale e creativo che permette di trovare strade alternative e diverse tra loro. Si prova davvero una grande soddisfazione nel riuscire a capire un ragionamento matematico, a cogliere il significato di un risultato o nel risolvere un problema impegnativo. Credo che la cosa che mi piace di più della matematica sia comunque il fatto che essa si basa su definizioni precise e procedimenti rigorosi, elementi che costituiscono la base del ragionamento scientifico.

Durante questo ultimo anno scolastico ho partecipato al "Progetto Archimede", un laboratorio pomeridiano organizzato da alcuni professori di matematica, fisica e informatica del mio Istituto che ha lo scopo di potenziare le competenze nell'ambito matematico, fisico e chimico utilizzando metodiche di laboratorio e progettando esperimenti per la verifica delle ipotesi.
Prendendo spunto dal "Problema del mese" di dicembre, proposto dal gruppo, mi sono appassionata al cosiddetto "Problema del cerchio di Gauss": Gauss fu il primo a elaborare una formula che esprimesse la somma dei punti a coordinate intere interni ad un cerchio, centrato nell'origine degli assi cartesiani. Questo tema ha attirato il mio interesse tanto da volerlo sviluppare in questo approfondimento.

Johann Carl Friedrich Gauss (30 aprile 1777 / 23 febbraio 1855) è stato un matematico, astronomo e fisico tedesco: egli avendo contribuito in modo decisivo all'evoluzione delle scienze matematiche, fisiche e naturali viene definito il "principe dei matematici". Tra le sue innumerevoli scoperte scientifiche, ricordiamo le più note: la dimostrazione del "Teorema fondamentale dell'algebra", il quale afferma che il campo dei numeri complessi è algebricamente chiuso, cioè che ogni polinomio a coefficienti complessi ha almeno una radice in $\mathbb{C}$. Dal teorema segue che un polinomio di grado n ha esattamente n radici; egli elaborò il piano complesso (o appunto piano di Gauss), un piano cartesiano in cui l'ascissa indica la parte reale e l'ordinata indica la parte immaginaria del numero. Riuscì a dimostrare in ambito geometrico quali poligoni regolari possono essere costruiti con riga e compasso. Ottenne risultati importanti in ambito astronomico ed elaborò la teoria delle probabilità (e la cosiddetta "curva gaussiana"). In fisica applicò le sue conoscenze allo studio dell'elettromagnetismo che gli permisero di formulare la cosiddetta "legge di Gauss".

Ritornando al tema di questo approfondimento Gauss riuscì a scoprire la formula che esprime la somma dei punti a coordinate intere interni ad un cerchio: il cosiddetto "Problema del cerchio". Esso consiste perciò nella ricerca del numero di punti a coordinate intere interni ad una circonferenza di equazione del tipo $x^2 + y^2 = n$, centrata nell'origine degli assi, ossia il numero di soluzioni intere delle disequazioni del tipo $x^2 + y^2 \leq n$.
Lo scopo di questo approfondimento è lo studio del numero di soluzioni intere delle disequazioni del tipo $x^2 + y^2 \leq n$, noto come "Il problema del cerchio di Gauss". Verranno poi risolte anche altre equazioni del tipo $ax^2 + by^2 \leq n$ o $ax^m + by^h \leq n$ con $n, a, b, m, h \in \mathbb{N}$ che permetteranno di contare il numero di punti a coordinate intere interni ad una ellisse centrata nell'origine o ad altre figure chiuse. Un interessante variante saranno le disequazioni del tipo $|x| + |y| \leq n$ con $n \in \mathbb{N}$.
Analizzerò le disequazioni concentrandomi prima sul problema in una dimensione per poi passare alle due dimensioni (il piano cartesiano) e successivamente a tre dimensioni, studiando equazioni del tipo $ax^m + by^h + cz^j \leq n$ con $n, a, b, c, m, h, j \in \mathbb{N}$. Arriverò ad una generalizzazione per d dimensioni. Il problema verrà analizzato sia dal punto di vista algebrico che geometrico per risolvere quindi una generica $a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + ... + a_mx_m^2 \leq n$, con $n, a, m \in \mathbb{N}$.
Verranno indicate con: $N_1(n) =$ il numero dei punti a coordinate intere che risolvono le disequazioni in una dimensione (rappresentabili sulla retta reale), con $N_2(n) =$ il numero dei punti a coordinate intere che risolvono le disequazioni in due dimensioni (rappresentabili sul piano cartesiano), con $N_3(n) =$ il numero dei punti a coordinate intere che risolvono le disequazioni in tre dimensioni (rappresentabili sullo spazio) fino ad arrivare a $N_d(n) =$ il numero dei punti a coordinate intere che risolvono le disequazioni in d dimensioni.

2 Una dimensione

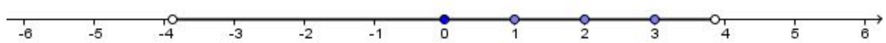
2.1 • $x^2 \leq n$ *con* $n \in \mathbb{N}$

La prima disequazione che vogliamo risolvere è $x^2 \leq n$. Algebricamente è una disequazione di secondo grado che ha per soluzioni $-\sqrt{n} \leq x \leq \sqrt{n}$. Geometricamente questi numeri sono rappresentabili nella retta reale con un segmento che ha punto medio sull'origine e come estremi i punti $(-\sqrt{n};0)$ e $(\sqrt{n};0)$. Volendo determinare il numero dei punti interi del segmento, contiamo l'origine degli assi (1 punto) e poi, osservando la parte positiva dell'asse x, un numero di punti compresi tra 0 e $\sqrt{n}$, cioè la parte intera di $\sqrt{n}$; osservando la parte negativa dell'asse x, il procedimento è analogo: il numero dei punti è uguale a $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$.

Quindi la formula che ci permette di calcolare la somma dei punti interi interni è:

$$N_1(n) = 1 + 2\lfloor\sqrt{n}\rfloor$$

Esempio.: $x^2 \leq 15$
$N_1(15) = 1 + 2\lfloor\sqrt{15}\rfloor = 1 + 2(3) = 7$
Pertanto il numero di soluzioni intere che risolvono la disequazione è 7.



2.2 • $ax^2 \leq n$ *con* $n, a \in \mathbb{N}$

Il procedimento è analogo al precedente e la formula è:

$$N_1(n,a) = 1 + 2\left\lfloor\sqrt{\frac{n}{a}}\right\rfloor$$

Esempio.: $3x^2 \leq 14$
$N_1(14,3) = 1 + 2\left\lfloor\sqrt{\frac{14}{3}}\right\rfloor = 1 + 2(2) = 5$
Pertanto il numero di soluzioni intere che risolvono la disequazione è 5.

2.3 • $a\,|x| \leq n$ *con* $n, a \in \mathbb{N}$

Algebricamente è una disequazione con un valore assoluto che ha per soluzioni $-\dfrac{n}{a} \leq x \leq \dfrac{n}{a}$. Geometricamente questi numeri sono rappresentabili nella retta reale con un segmento che ha punto medio sull'origine ed estremi i punti $\left(-\dfrac{n}{a};0\right)$ e $\left(\dfrac{n}{a};0\right)$. Volendo determinare il numero dei punti interi del segmento, contiamo l'origine degli assi (1 punto) e poi, osservando la parte positiva dell'asse x, un numero di punti compresi tra 0 e $\dfrac{n}{a}$, cioè $\left\lfloor\dfrac{n}{a}\right\rfloor$; osservando la parte negativa dell'asse x il procedimento è analogo.

Quindi la formula risolutiva è:

$$N_1(n,a) = 1 + 2\left\lfloor\frac{n}{a}\right\rfloor$$

Esempio.: $5\,|x| \leq 23$
$N_1(23,5) = 1 + 2\left\lfloor\frac{23}{5}\right\rfloor = 1 + 2(4) = 9$
Pertanto il numero di soluzioni intere che risolvono la disequazione è 9.

2.4 • $ax^m \leq n$ *con* $n, a \in \mathbb{N}$ *e* m *pari*

Algebricamente è una disequazione di grado m che ha per soluzioni $-\sqrt[m]{\frac{n}{a}} \leq x \leq \sqrt[m]{\frac{n}{a}}$. Geometricamente questi numeri sono rappresentabili nella retta reale con un segmento che ha punto medio sull'origine e come estremi i punti $\left(-\sqrt[m]{\frac{n}{a}}; 0\right)$ e $\left(\sqrt[m]{\frac{n}{a}}; 0\right)$. Volendo determinare il numero dei punti interi del segmento, contiamo l'origine degli assi (1 punto) e poi, osservando la parte positiva dell'asse x, un numero di punti compresi tra 0 e $\sqrt[m]{\frac{n}{a}}$, cioè la parte intera di $-\sqrt[m]{\frac{n}{a}}$; osservando la parte negativa dell'asse x il procedimento è analogo.

Quindi la formula è:

$$N_1(n, a, m) = 1 + 2\left\lfloor \sqrt[m]{\frac{n}{a}} \right\rfloor$$

Esempio.: $3x^6 \leq 200$

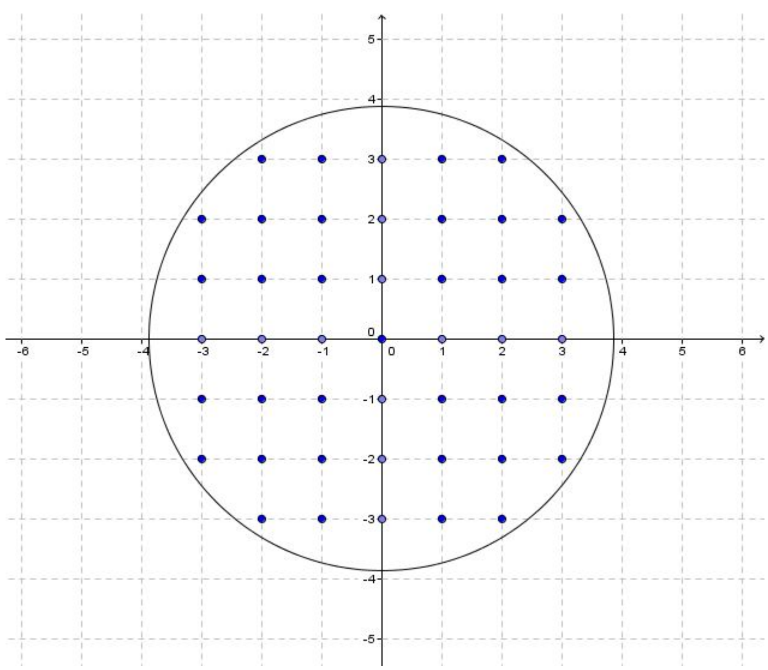
$N_1(200, 3, 6) = 1 + 2\left\lfloor \sqrt[6]{\frac{200}{3}} \right\rfloor = 1 + 2(2) = 5$

Pertanto il numero di soluzioni intere che risolvono la disequazione è 5.

3 Due dimensioni

3.1 • $x^2 + y^2 \leq n$ *con* $n \in \mathbb{N}$

La prima disequazione che vogliamo risolvere è $x^2 + y^2 \leq n$. Algebricamente dobbiamo trovare tutte le coppie intere di numeri la cui somma dei quadrati sia minore di n. Geometricamente, queste coppie, sono i punti interni alla circonferenza centrata nell'origine e di raggio $\sqrt{n}$.



Volendo determinarne il numero, dividiamo i punti a coordinate intere del cerchio: l'origine, i punti sugli assi esclusa l'origine e i punti restanti.
Per quanto riguarda i punti sugli assi, si consideri inizialmente la semiretta positiva dell'asse x: su di essa c'è un numero di punti pari alla parte intera del raggio ($\lfloor\sqrt{n}\rfloor$); la situazione è analoga per la semiretta negativa dell'asse x e per le semirette positiva e negativa dell'asse y. Pertanto il numero totale dei punti sugli assi è quattro volte quello dei punti giacenti solamente sulla semiretta positiva dell'asse x, cioè $4\lfloor\sqrt{n}\rfloor$.
Per quanto riguarda i restanti punti consideriamo inizialmente il 1^o quadrante: si noti che i punti che hanno ascissa $= 1$ giacciono sul segmento $\overline{AB}$. Esso ha lunghezza pari all'ordinata corrispondente a $x = 1$ della curva $x^2 + y^2 \leq n$. Esplicitandola, $y = \sqrt{n - x^2}$. Il numero dei punti con ascissa $= 1$ è pertanto uguale a $\lfloor\sqrt{n - 1^2}\rfloor$. Allo stesso modo i punti con ascissa $= 2$ sono $\lfloor\sqrt{n - 2^2}\rfloor$, ecc. Nel 1^o quadrante il numero dei punti è la somma di tutti questi segmenti:

$$\sum_{k=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\left(\lfloor\sqrt{n-k^2}\rfloor\right).$$

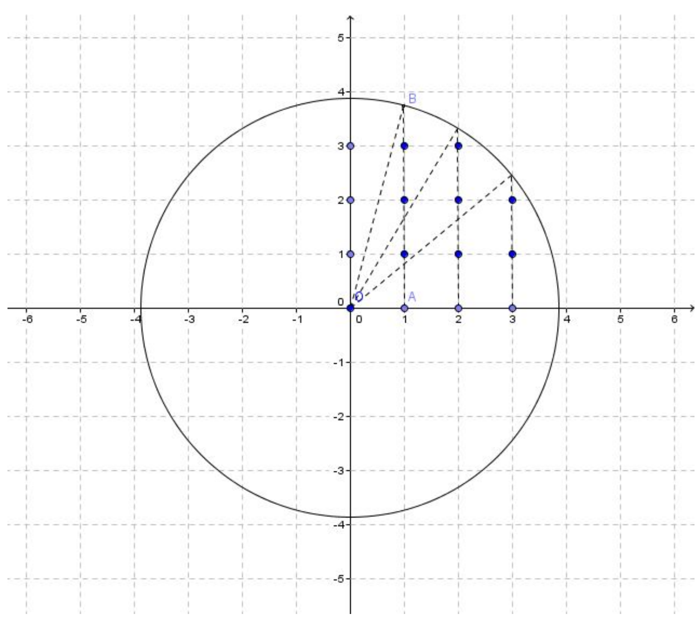
La situazione è analoga anche per gli altri tre quadranti. La somma totale dei punti non appartenenti agli assi quindi è:

$$4\sum_{k=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\left(\lfloor\sqrt{n-k^2}\rfloor\right).$$

Concludendo il numero totale dei punti a coordinate intere che verificano la disequazione è:

$$N_2(n) = 1 + 4\lfloor\sqrt{n}\rfloor + 4\sum_{k=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\left(\lfloor\sqrt{n-k^2}\rfloor\right).$$

Un altro modo per contare i punti non appartenenti agli assi è quello di considerare il segmento $\overline{AB}$ come cateto del triangolo rettangolo ABO con $\overline{AO} = 1$ e ipotenusa $\overline{OB} = \sqrt{n}$. Applicando il teorema di Pitagora ricaviamo che $\overline{AB} = \sqrt{\sqrt{n}^2 - 1} = \sqrt{n-1}$. Calcolata quindi la lunghezza di $\overline{AB}$, si procede allo stesso modo per il segmento corrispondente all'ascissa $= 2$, ecc. Si sommano poi tutti i segmenti e si procede analogamente alla dimostrazione precedente.



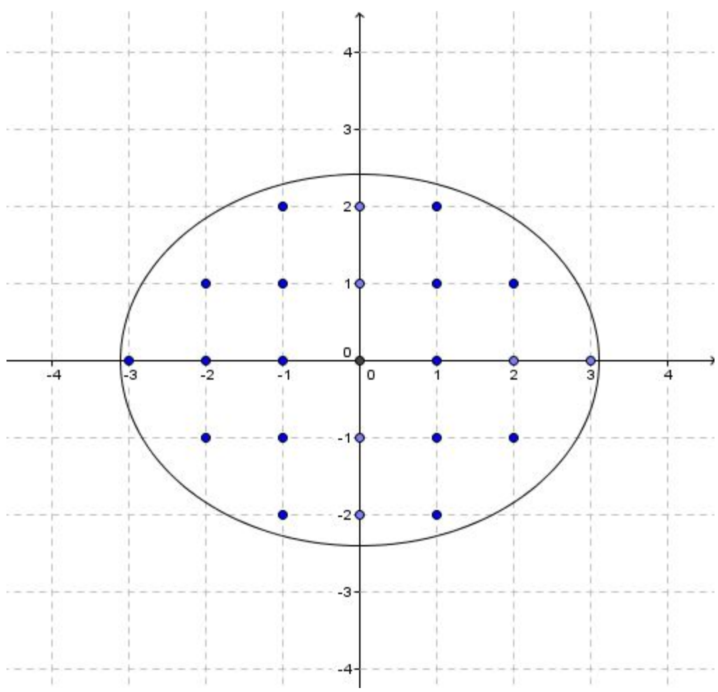
Esempio.: $x^2+y^2 \leq 15$

$$N_2(15) = 1 + 4\lfloor\sqrt{15}\rfloor + 4\sum_{k=1}^{\lfloor\sqrt{15}\rfloor}\left(\lfloor\sqrt{15-k^2}\rfloor\right) = 1 + 4(3) + 4(3+3+2) = 45$$

Pertanto il numero di soluzioni intere che risolvono la disequazione è 45.

3.2 • $ax^2 + by^2 \leq n$ ***con*** $a, b, n \in \mathbb{N}$

Algebricamente dobbiamo trovare tutte le coppie intere di numeri la cui somma dei quadrati moltiplicati per i coefficienti a e b sia minore di n.
Geometricamente, queste coppie, sono i punti interi interni all'ellisse centrata nell'origine e con semiasse orizzontale uguale a $\sqrt{\dfrac{n}{a}}$ e semiasse verticale uguale a $\sqrt{\dfrac{n}{b}}$. Analogamente al procedimento usato per il cerchio, volendo determinarne il numero, dividiamo i punti a coordinate intere dell'ellisse: l'origine, i punti sugli assi esclusa l'origine e i punti restanti.

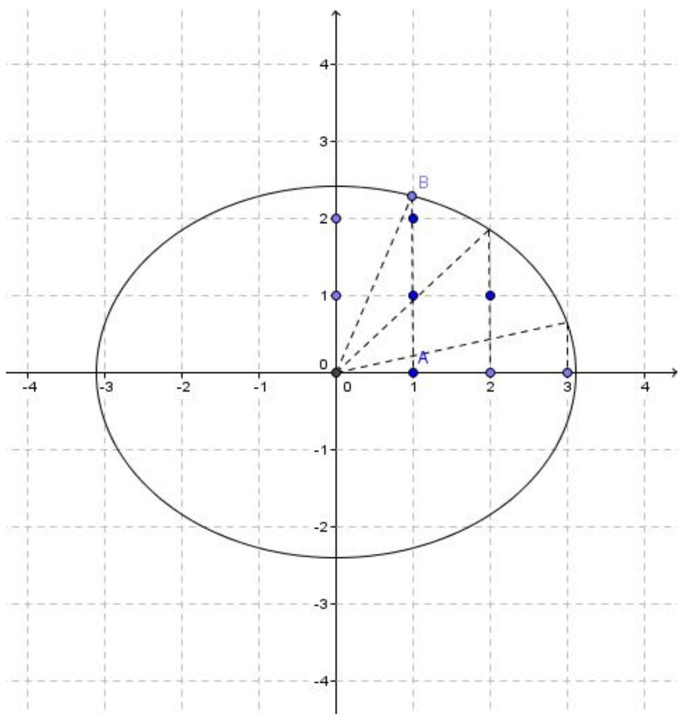


Per quanto riguarda i punti sugli assi, si consideri inizialmente la semiretta positiva dell'asse x: su di essa c'è un numero di punti pari alla parte intera del semiasse orizzontale $\left(\sqrt{\dfrac{n}{a}}\right)$; la situazione è analoga per la semiretta negativa dell'asse x. Per la semiretta positiva dell'asse y il numero dei punti è pari alla

parte intera del semiasse verticale $\left(\sqrt{\frac{n}{b}}\right)$; la situazione è analoga per la semiretta negativa dell'asse y.
Pertanto il numero totale dei punti sugli assi è $2\left\lfloor\sqrt{\frac{n}{a}}\right\rfloor + 2\left\lfloor\sqrt{\frac{n}{b}}\right\rfloor$.

Per quanto riguarda i restanti punti consideriamo inizialmente il 1^o quadrante: si noti che i punti che hanno ascissa $= 1$ giacciono sul segmento $\overline{AB}$. Esso ha lunghezza pari all'ordinata corrispondente a $x = 1$ della curva $ax^2 + by^2 \leq n$. Esplicitandola, $y = \sqrt{\frac{n - ax^2}{b}}$. Il numero dei punti con ascissa $= 1$ è pertanto uguale a $\left\lfloor\sqrt{\frac{n-a}{b}}\right\rfloor$. Allo stesso modo i punti con ascissa $= 2$ sono $\left\lfloor\sqrt{\frac{n-a2^2}{b}}\right\rfloor$, ecc. Nel 1^o quadrante il numero dei punti è la somma di tutti questi segmenti:

$$\sum_{k=1}^{\left\lfloor\sqrt{\frac{n}{a}}\right\rfloor} \left(\left\lfloor\sqrt{\frac{n-ak^2}{b}}\right\rfloor\right).$$



La situazione è analoga anche per gli altri tre quadranti. La somma totale dei punti non appartenenti agli assi quindi è:

$$4\sum_{k=1}^{\left\lfloor\sqrt{\frac{n}{a}}\right\rfloor} \left(\left\lfloor\sqrt{\frac{n-ak^2}{b}}\right\rfloor\right).$$

Concludendo il numero totale dei punti a coordinate intere che verificano la disequazione è:

$$N_2(n,a,b) = 1 + 2\left\lfloor\sqrt{\frac{n}{a}}\right\rfloor + 2\left\lfloor\sqrt{\frac{n}{b}}\right\rfloor + 4\sum_{k=1}^{\left\lfloor\sqrt{\frac{n}{a}}\right\rfloor}\left(\left\lfloor\sqrt{\frac{n-ak^2}{b}}\right\rfloor\right).$$

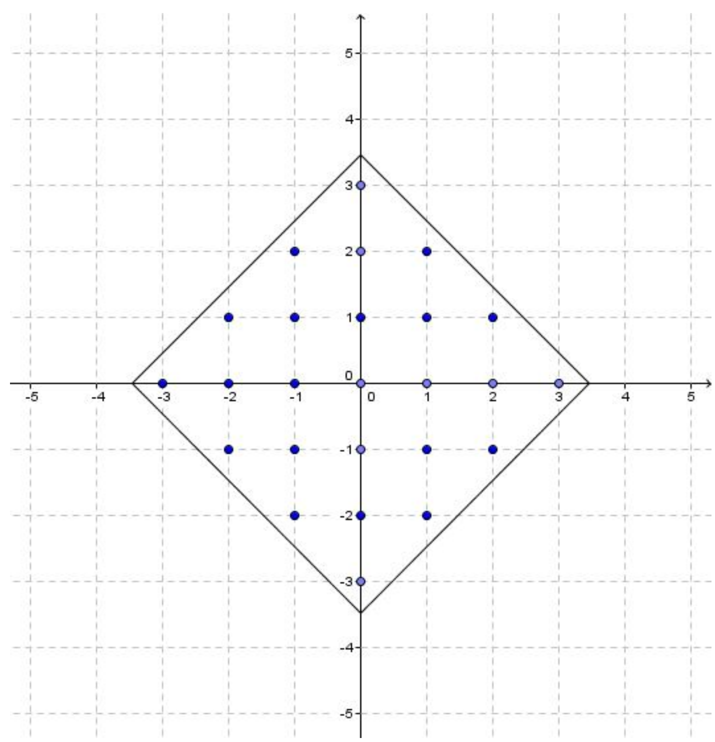
Esempio.: $3x^2 + 5y^2 \leq 29$

$$N_2(29,3,5) = 1+2\left\lfloor\sqrt{\frac{29}{3}}\right\rfloor+2\left\lfloor\sqrt{\frac{29}{5}}\right\rfloor+4\sum_{k=1}^{\left\lfloor\sqrt{\frac{29}{3}}\right\rfloor}\left(\left\lfloor\sqrt{\frac{29-3k^2}{5}}\right\rfloor\right) = 1+2(3)+2(2)+4(2+1+0) = 23.$$

Pertanto il numero di soluzioni intere che risolvono la disequazione è 23.

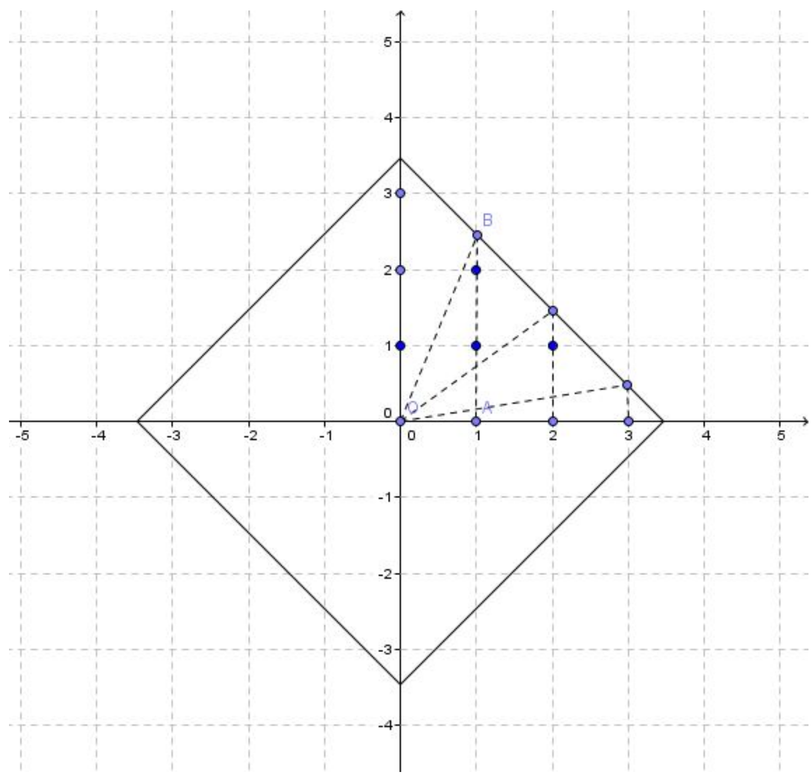
3.3 • $|x| + |y| \leq n$ *con* $n \in \mathbb{R}^+$

Algebricamente dobbiamo trovare tutte le coppie intere di numeri le cui somme dei valori assoluti sia minore di n. Si risolve dividendo il problema in quattro casi che conducono a quattro rette: i valori interni risolvono la disequazione.
Geometricamente, queste quattro rette individuano nel piano cartesiano un quadrato centrato nell'origine, con i lati disposti a 45^o e -45^o rispetto agli assi. I quattro vertici del quadrato sono $(n;0), (0;n), (-n;0)$ e $(0;-n)$. Analogamente agli altri procedimenti precedenti, volendo determinarne il numero, dividiamo i punti a coordinate intere dell'ellisse: l'origine, i punti sugli assi esclusa l'origine e i punti restanti.



Per quanto riguarda i punti sugli assi, si consideri inizialmente la semiretta positiva dell'asse x: su di essa c'è un numero di punti pari alla parte intera di n; la situazione è analoga per la semiretta negativa dell'asse x e per le semirette positiva e negativa dell'asse y. Pertanto il numero totale dei punti sugli assi è quattro volte quello dei punti sulla semiretta positiva dell'asse x: $4\lfloor n \rfloor$.
Per quanto riguarda i restanti punti consideriamo inizialmente il 1^o quadrante: si noti che i punti che hanno ascissa $= 1$ giacciono sul segmento $\overline{AB}$. Esso ha lunghezza pari all'ordinata corrispondente a $x = 1$ della curva $|x| + |y| \leq n$. Esplicitandola, $y = \lfloor n - x \rfloor$. Considerando infatti il primo quadrante possiamo eliminare i valori assoluti poichè sia x che y sono positive. Il numero dei punti con ascissa $= 1$ è pertanto uguale a $\lfloor n - 1 \rfloor$. Allo stesso modo i punti con ascissa $= 2$ sono $\lfloor n - 2 \rfloor$, ecc. Nel 1^o quadrante il numero dei punti è la somma di tutti questi segmenti:

$$\sum_{k=1}^{\lfloor n \rfloor} (\lfloor n - k \rfloor) \, .$$



La situazione è analoga anche per gli altri tre quadranti. La somma totale dei punti non appartenenti agli assi quindi è:

$$4 \sum_{k=1}^{\lfloor n \rfloor} (\lfloor n - k \rfloor) \, .$$

Concludendo il numero totale dei punti a coordinate intere che verificano la disequazione è:

$$N_2(n) = 1 + 4\lfloor n \rfloor + 4 \sum_{k=1}^{\lfloor n \rfloor} (\lfloor n - k \rfloor) = 1 + 4 \sum_{k=0}^{\lfloor n \rfloor} (\lfloor n - k \rfloor) \, .$$

Un altro modo per contare i punti è vedere che

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n\rfloor}(\lfloor n-k\rfloor)=\lfloor n\rfloor+(\lfloor n-1\rfloor)+(\lfloor n-2\rfloor)+....+(\lfloor n-\lfloor n\rfloor\rfloor).$$

Applicando la *formula della somma dei primi n numeri naturali*, trovata proprio da Gauss che calcola la somma dei primi numeri come $S=\dfrac{n(n+1)}{2}$, si ottiene che il numero dei punti interi interni è:

$$1+2\lfloor n\rfloor(\lfloor n\rfloor+1)$$

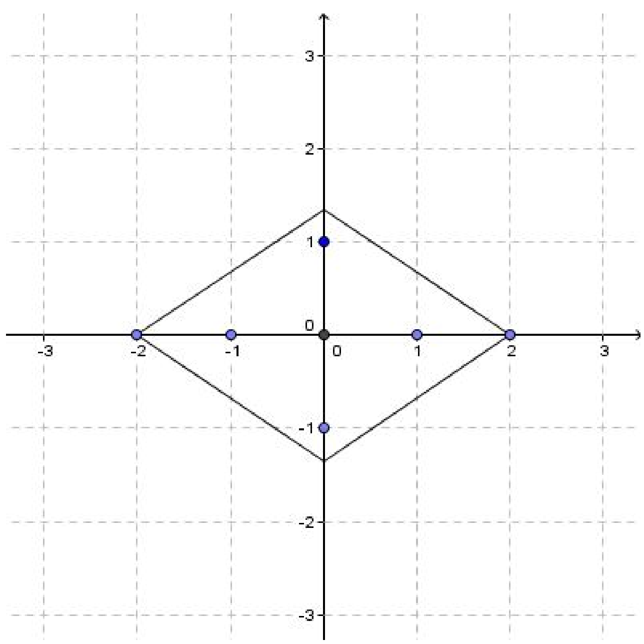
Esempio.: $|x|+|y|\leq\dfrac{18}{5}$

$$N_2\left(\frac{18}{5}\right)=1+2\left\lfloor\frac{18}{5}\right\rfloor\left(\left\lfloor\frac{18}{5}\right\rfloor+1\right)=25.$$

Pertanto il numero di soluzioni intere che risolvono la disequazione è 25.

3.4 • $a\,|x|+b\,|y|\leq n$ *con* $a,b,n\in\mathbb{N}$

Algebricamente dobbiamo trovare tutte le coppie intere di numeri le cui somme dei valori assoluti moltiplicati per i coefficienti a e b sia minore di n. Essa si risolve dividendo il problema in quattro casi che conducono a quattro rette: i valori che stanno sulla superficie racchiusa da queste quattro rette risolvono la disequazione. Geometricamente, queste quattro rette individuano nel piano cartesiano un rombo centrato nell'origine; i quattro vertici del rombo sono $\left(\frac{n}{a};0\right),\left(0;\frac{n}{b}\right),\left(-\frac{n}{a};0\right),\left(0;-\frac{n}{b}\right)$. Analogamente agli altri procedimenti precedenti, volendo determinarne il numero, dividiamo i punti a coordinate intere dell'ellisse: l'origine, i punti sugli assi esclusa l'origine e i punti restanti.

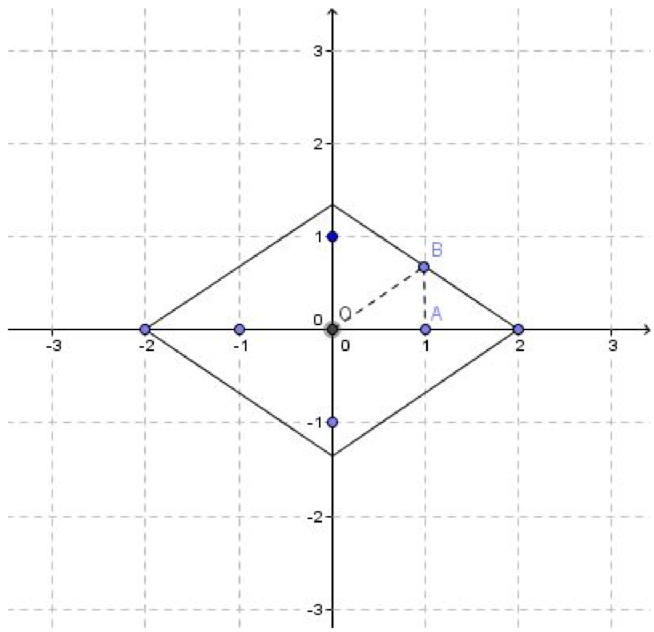


Per quanto riguarda i punti sugli assi, si consideri inizialmente la semiretta positiva dell'asse x: su di essa c'è un numero di punti pari alla parte intera di $\dfrac{n}{a}$; la situazione è analoga per la semiretta negativa dell'asse x. Sulla semiretta positiva dell'asse y c'è un numero di punti pari a $\frac{n}{b}$, come nella semiretta negativa dell'asse y. Pertanto il numero totale dei punti sugli assi è : $2\left\lfloor\frac{n}{a}\right\rfloor + 2\left\lfloor\frac{n}{b}\right\rfloor$.

Per quanto riguarda i restanti punti consideriamo inizialmente il 1^o quadrante: si noti che i punti che hanno ascissa $= 1$ giacciono sul segmento $\overline{AB}$. Esso ha lunghezza pari all'ordinata corrispondente a $x = 1$ della curva $a|x| + b|y| \leq n$. Esplicitandola, $y = \left\lfloor\frac{n-ax}{b}\right\rfloor$. Il numero dei punti con ascissa $= 1$ è pertanto uguale a $\left\lfloor\frac{n-1a}{b}\right\rfloor$. Allo stesso modo i punti con ascissa $= 2$ sono $\left\lfloor\frac{n-2a}{b}\right\rfloor$, ecc.

Nel 1^o quadrante il numero dei punti è la somma di tutti questi segmenti:

$$\sum_{k=1}^{\left\lfloor\frac{n}{a}\right\rfloor}\left(\left\lfloor\frac{n-ak}{b}\right\rfloor\right).$$



La situazione è analoga anche per gli altri tre quadranti. La somma totale dei punti non appartenenti agli assi quindi è:

$$4\sum_{k=1}^{\left\lfloor\frac{n}{a}\right\rfloor}\left(\left\lfloor\frac{n-ak}{b}\right\rfloor\right).$$

Concludendo il numero totale dei punti a coordinate intere che verificano la disequazione è:

$$N_2(n,a,b) = 1 + 2\left\lfloor\frac{n}{a}\right\rfloor + 2\left\lfloor\frac{n}{b}\right\rfloor + 4\sum_{k=1}^{\left\lfloor\frac{n}{a}\right\rfloor}\left(\left\lfloor\frac{n-ak}{b}\right\rfloor\right).$$

Esempio.: $2|x| + 3|y| \leq 4$

$$N_2(4,2,3) = 1 + 2\left\lfloor \frac{4}{2} \right\rfloor + 2\left\lfloor \frac{4}{3} \right\rfloor + 4\sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{4}{2} \right\rfloor}\left(\left\lfloor \frac{4-2k}{3} \right\rfloor\right) = 1 + 2(2) + 2(1) + 4(0+0) = 7.$$

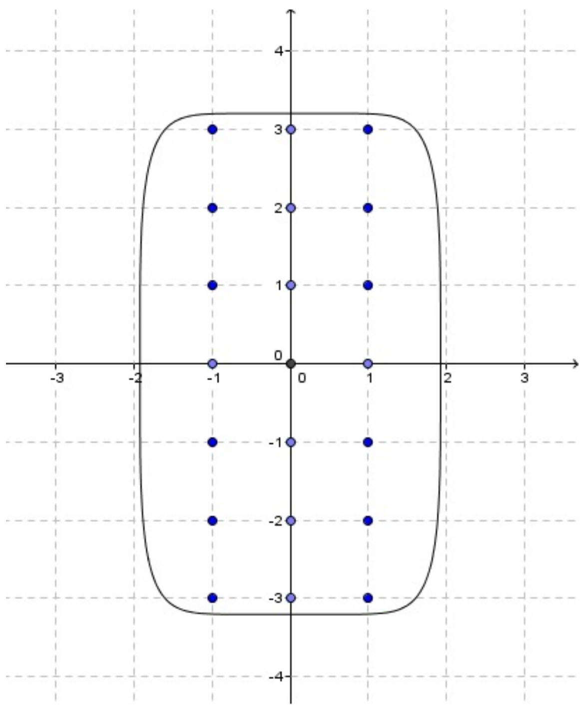
Pertanto il numero di soluzioni intere che risolvono la disequazione è 7.

3.5 • $ax^m + by^h \leq n$ *con* $a, b, n \in \mathbb{N}$ *e* m, h *pari*

In questa equazione generale consideriamo solamente esponenti delle x e y pari in modo da ottenere figure chiuse: se infatti gli esponenti sono dispari la curva non rappresenta una figura chiusa, bensì aperta, e non possiamo quindi calcolare la somma dei punti interi interni. Infatti se la esplicitiamo, $y = \sqrt[h]{\frac{n - ax^m}{b}}$. Per ottenere una figura chiusa h deve essere pari: la condizione di esistenza del radicale in questo modo è $\frac{n - ax^m}{b} \geq 0$. Poiché $b \in \mathbb{N}$ e $b \neq 0$, b è sempre maggiore di 0. Se inoltre m è pari, il numeratore del radicando è maggiore di 0 per i valori interni, $\left(\sqrt[m]{-\frac{n}{a}} \leq x \leq \sqrt[m]{\frac{n}{a}}\right)$. Questo è perciò il dominio di esistenza. In caso opposto, se h e m sono dispari, il $\lim_{x \to \infty} y = \infty$ e si ottiene una figura aperta.

Algebricamente dobbiamo trovare tutte le coppie intere di numeri che verificano la disequazione. Geometricamente, queste coppie, sono i punti interni ad una generica curva chiusa del piano (simile ad un'ellisse ma più squadrata) centrata nell'origine e con semiasse orizzontale uguale a $\sqrt[m]{\frac{n}{a}}$ e semiasse verticale uguale a $\sqrt[h]{\frac{n}{b}}$. Consideriamo solamente esponenti delle x e y pari in modo da ottenere appunto figure chiuse, in questo modo infatti le curve considerate risultano pari,simmetriche rispetto all'asse y, continue e finite. Analogamente ai procedimenti precedenti dividiamo i punti a coordinate intere interni: l'origine, i punti sugli assi esclusa l'origine e i punti restanti.

Per quanto riguarda i punti sugli assi, si consideri inizialmente la retta positiva dell'asse x: su di essa c'è un numero di punti pari a due volte la parte intera del semiasse orizzontale $\left(\sqrt[m]{\frac{n}{a}}\right)$. Per la semiretta positiva dell'asse y il numero dei punti è pari a due volte la parte intera del semiasse verticale $\left(\sqrt[h]{\frac{n}{b}}\right)$. Pertanto il numero totale dei punti sugli assi è $2\left\lfloor \sqrt[m]{\frac{n}{a}} \right\rfloor + 2\left\lfloor \sqrt[h]{\frac{n}{b}} \right\rfloor$.



Punti interni a $5x^8 + 9y^4 \leq 947$

Per quanto riguarda i restanti punti consideriamo inizialmente il 1^o quadrante: si noti che i punti che hanno ascissa $= 1$ giacciono sul segmento che ha lunghezza pari all'ordinata corrispondente della curva. Esplicitandola, $y = \sqrt[h]{\dfrac{n - ax^m}{b}}$. Il numero dei punti con ascissa $= 1$ è pertanto uguale a $\left\lfloor \sqrt{\frac{[}{h}]n - ab} \right\rfloor$.

Allo stesso modo i punti con ascissa $= 2$ sono $\left\lfloor \sqrt{\dfrac{n - a2^m}{b}} \right\rfloor$, ecc. Nel 1^o quadrante il numero dei punti è la somma di tutti questi segmenti:

$$\sum_{k=1}^{\left\lfloor \sqrt[m]{\frac{n}{a}} \right\rfloor} \left(\left\lfloor \sqrt[h]{\frac{n - ak^m}{b}} \right\rfloor \right).$$

La situazione è analoga anche per gli altri tre quadranti. La somma totale dei punti non appartenenti agli assi quindi è:

$$4 \sum_{k=1}^{\left\lfloor \sqrt[m]{\frac{n}{a}} \right\rfloor} \left(\left\lfloor \sqrt[h]{\frac{n - ak^m}{b}} \right\rfloor \right).$$

Concludendo il numero totale dei punti a coordinate intere che verificano la disequazione è:

$$N_2(n, a, b, m, h) = 1 + 2 \left\lfloor \sqrt[m]{\frac{n}{a}} \right\rfloor + 2 \left\lfloor \sqrt[h]{\frac{n}{b}} \right\rfloor + 4 \sum_{k=1}^{\left\lfloor \sqrt[m]{\frac{n}{a}} \right\rfloor} \left(\left\lfloor \sqrt[h]{\frac{n - ak^m}{b}} \right\rfloor \right).$$

Esempio.: $5x^8 + 9y^4 \leq 947$

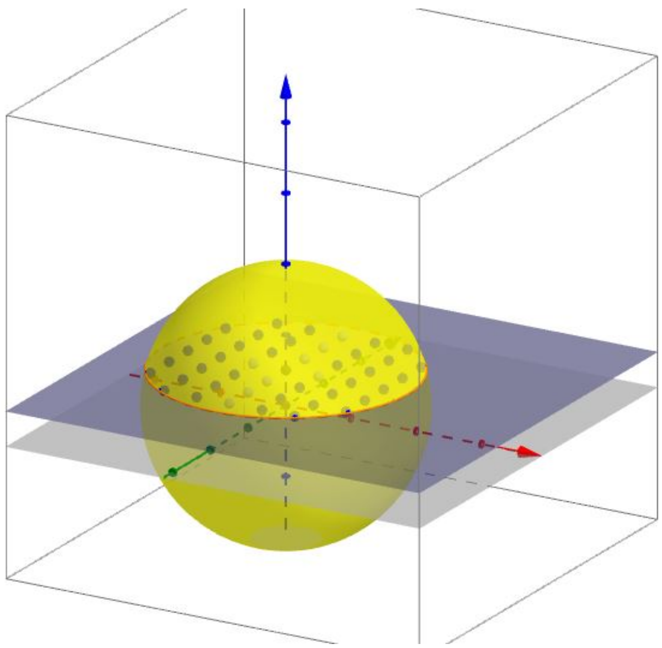
$$N_2(947,5,9,8,4) = 1{+}2\left\lfloor\sqrt[8]{\frac{947}{5}}\right\rfloor{+}2\left\lfloor\sqrt[4]{\frac{947}{9}}\right\rfloor{+}4\sum_{k=1}^{\left\lfloor\sqrt[8]{\frac{947}{5}}\right\rfloor}\left(\left\lfloor\sqrt[4]{\frac{947-5k^8}{9}}\right\rfloor\right) = 1{+}2(1){+}2(3){+}4(3) = 21.$$

Pertanto il numero di soluzioni intere che risolvono la disequazione è 21 (vedi figura sopra).

4 Tre dimensioni.

4.1 • $x^2 + y^2 + z^2 \leq n$ *con* $n \in \mathbb{N}$

La prima disequazione che vogliamo risolvere è $x^2+y^2+z^2 \leq n$. Algebricamente dobbiamo trovare tutte le terne di numeri interi la cui somma dei quadrati sia minore di n.



Geometricamente queste terne si possono pensare come tutti i punti interni ad una sfera centrata nell'origine di raggio $\sqrt{n}$. Volendo determinarne il numero, possiamo sezionare la sfera con dei piani paralleli $z = i$ con $i = 0, 1, 2, ...$ fino a quando il piano non interseca più la sfera, cioè fino a $i = \sqrt{n}$. Le sezioni saranno dei cerchi.

Quindi si osserva che per calcolare i punti interi interni alla sfera $N_3(n)$ si fa uso del precedente calcolo dei numeri interi interni a dei cerchi $N_2(n)$. Questo ragionamento si potrà estendere poi anche per le successive dimensioni. Cerchiamo ora la giusta relazione che lega N_3 con N_2.

Per prima cosa $N_3(0)$ consiste in un solo punto infatti algebricamente la disequazione $x^2+y^2+z^2 \leq 0$ ha per soluzione solo la terna $(0; 0; 0)$ e geometricamente rappresenta un sfera di raggio 0.
Per calcolare $N_3(1)$ ovvero risolvere la disequazione $x^2+y^2+z^2 \leq 1$ dobbiamo sezionare la sfera di raggio 1 con i tre piani $z = -1, z = 0$ e $z = 1$. La sezione ottenuta col piano $z = 0$ è un cerchio di raggio 1, algebricamente è la disequazione $x^2+y^2 \leq 1$ e cioè $N_2(1)$ che come abbiamo visto sopra è uguale a 5. Le sezioni ottenute con i piani $z = -1$ e $z = 1$ sono due cerchi di raggio 0, algebricamente la disequazione $x^2 + y^2 \leq 0$ e cioè $N_2(0)$ che a 1.Quindi

$$N_3(1) = N_2(1) + 2 \cdot N_2(0) = 5 + 2 \cdot 1 = 7$$

Per calcolare $N_3(4)$, per esempio, ovvero risolvere la disequazione $x^2+y^2+z^2 \leq 4$ dobbiamo sezionare la sfera di raggio 2 con i cinque piani $z=0, z=\pm 1$ e $z=\pm 2$. La sezione ottenuta col piano $z=0$ è un cerchio di raggio 2, algebricamente è la disequazione $x^2+y^2 \leq 4$ e cioè $N_2(4)=13$. Le sezioni ottenute con i piani $z=-1$ e $z=1$ sono due cerchi di raggio $\sqrt{3}$, algebricamente la disequazione $x^2+y^2 \leq 3$ e cioè $N_2(3)=9$. Le sezioni ottenute con i piani $z=-2$ e $z=2$ sono due cerchi di raggio 0, algebricamente la disequazione $x^2+y^2 \leq 0$ e cioè $N_2(0)=1$. Quindi

$$N_3(4) = N_2(4) + 2 \cdot (N_2(3) + N_2(0)) = 13 + 2 \cdot (9+1) = 33$$

.

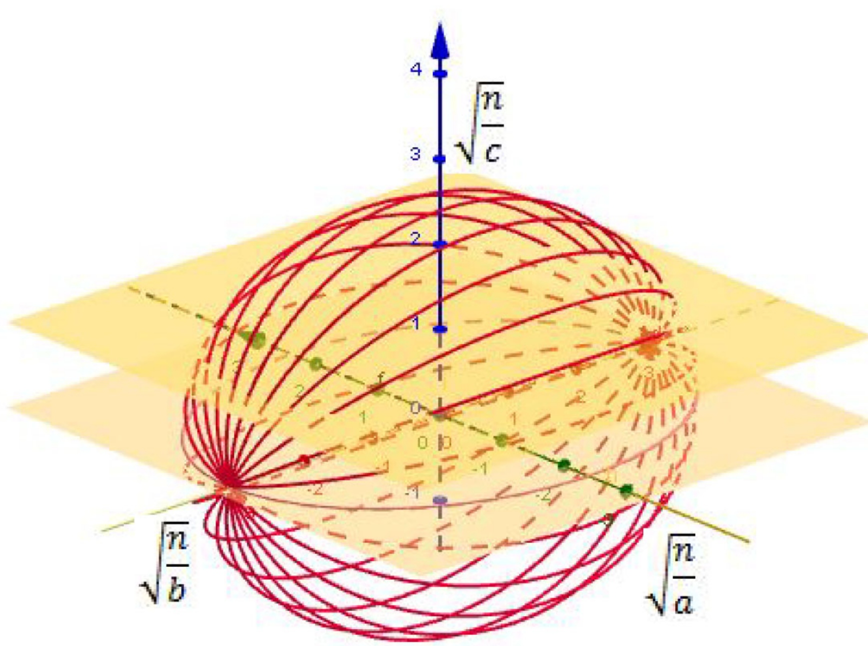
Volendo generalizzare quindi otteniamo la seguente formula per il calcolo di $N_3(n)$:

$$\begin{cases} N_3(0) = 1 \\ N_3(n) = N_2(n) + 2 \cdot \sum\limits_{i=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} N_2\left(n - i^2\right), & n > 0 \end{cases}$$

4.2 • $ax^2 + by^2 + cz^2 \leq n$ *con* $n, a, b, c \in \mathbb{N}$

Vogliamo ora risolvere la disequazione $ax^2+by^2+cz^2 \leq n$ con $n,a,b,c \in \mathbb{N}$. Algebricamente dobbiamo trovare tutte le terne di numeri interi che soddisfano la disequazione.

Geometricamente queste terne si possono pensare come tutti i punti interni ad una ellissoide centrato nell'origine di dimensioni $\sqrt{\frac{n}{a}}, \sqrt{\frac{n}{b}}$ e $\sqrt{\frac{n}{c}}$. Volendo determinarne il numero, possiamo sezionare l'ellissoide analogamente al procedimento usato per la sfera con dei piani paralleli $z=i$ con $i=0,1,2,...$ fino a quando il piano non interseca più il solido, cioè fino a $i=\sqrt{\frac{n}{c}}$. Le sezioni saranno delle ellissi, con centro nell'origine.



Quindi si osserva che per calcolare i punti interi interni all'ellissoide $N_3(n,a,b,c)$ si fa uso del precedente calcolo dei numeri interi interni a degli ellissoidi $N_2(n,a,b)$. Questo ragionamento si potrà estendere poi anche per le successive dimensioni. Cerchiamo ora la giusta relazione che lega N_3 con N_2.

Per prima cosa $N_3(0,a,b,c)$ consiste in un solo punto infatti algebricamente la disequazione $ax^2 + by^2 + cz^2 \leq 0$ ha per soluzione solo la terna $(0;0;0)$ e geometricamente rappresenta un ellissoide di raggio 0.
Per calcolare $N_3(29,3,5,7)$ ovvero risolvere la disequazione $3x^2 + 5y^2 + 7z^2 \leq 29$ dobbiamo sezionare l'ellissoide "alto" fino a $z = \pm\sqrt{\frac{n}{c}} = \pm\sqrt{\frac{29}{7}}$ con i cinque piani $z = -2, z = -1, z = 0, z = 1$ e $z = 2$. La sezione ottenuta col piano $z = 0$ è un ellisse di dimensioni $\sqrt{\frac{n}{a}} = \sqrt{\frac{29}{3}}$ e $\sqrt{\frac{n}{b}} = \sqrt{\frac{29}{5}}$; algebricamente è la disequazione $3x^2 + 5y^2 \leq 29$ e cioè $N_2(29,3,5)$ che come abbiamo visto sopra è uguale a 23. Le sezioni ottenute con i piani $z = -1$ e $z = 1$ sono due ellissoidi di dimensioni $\sqrt{\frac{n}{a} - 1^2} = \sqrt{\frac{26}{3}}$ e $\sqrt{\frac{n}{b} - 1^2} = \sqrt{\frac{24}{5}}$, mentre le sezioni ottenute con i piani $z = -2$ e $z = 2$ sono due ellissi di dimensioni $\sqrt{\frac{n}{a} - 2^2} = \sqrt{\frac{17}{3}}$ e $\sqrt{\frac{n}{b} - 2^2} = \sqrt{\frac{9}{5}}$.
Quindi $N_3(n,a,b,c)$ è la somma dei punti interni di tutte le sezioni ottenute tagliando l'ellissoide con piani paralleli al piano Oxy di equazione $z = i$ con $i \in \mathbb{N}$ e $i \leq \left\lfloor\sqrt{\frac{n}{c}}\right\rfloor$.

Volendo generalizzare quindi otteniamo la seguente formula per il calcolo di $N_3(n,a,b,c)$:

$$\begin{cases} N_3(0,a,b,c) = 1 \\ N_3(n,a,b,c) = N_2(n,a,b) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{\lfloor\sqrt{\frac{n}{c}}\rfloor} 1 + 2\left\lfloor\sqrt{\frac{n}{a} - i^2}\right\rfloor + 2\left\lfloor\sqrt{\frac{n}{b} - i^2}\right\rfloor + \\ 4\sum_{k=1}^{\left\lfloor\sqrt{\frac{n}{a} - i^2}\right\rfloor}\left(\left\lfloor\sqrt{\frac{n - ak^2}{b} - i^2}\right\rfloor\right), & n > 0 \end{cases}$$

4.3 • $ax^m + by^h + cz^j \leq n$ *con* $n, a, b, c, m, h, j \in \mathbb{N}$ *con* m, h, j *pari*

Volendo generalizzare il discorso consideriamo una curva di equazione $ax^m + by^h + cz^j \leq n$ con $n, a, b, c, m, h, j \in \mathbb{N}$, ossia un solido chiuso, centrato nell'origine, simile all'ellissoide analizzato sopra ma più squadrato. Come nei casi precedenti la somma dei numeri interni in tre dimensioni è la somma dei punti delle sezioni ottenute tagliando il solido con piani paralleli al piano Oxy fino a quando questi piani non intersecano più il solido.

Otteniamo quindi la formula generale ampliando quella sopra trovata:

$$\begin{cases} N_3(0,a,b,c,m,h,j) = 1 \\ N_3(n,a,b,c,m,h,j) = N_2(n,a,b,m,h) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{\lfloor \sqrt[j]{\frac{n}{c}} \rfloor} 1 + 2\left\lfloor \sqrt[m]{\frac{n}{a} - i^2} \right\rfloor + 2\left\lfloor \sqrt[h]{\frac{n}{b} - i^2} \right\rfloor + \\ 4 \sum_{k=1}^{\left\lfloor \sqrt[m]{\frac{n}{a} - i^2} \right\rfloor} \left(\left\lfloor \sqrt[h]{\frac{n-ak^m}{b} - i^2} \right\rfloor \right), & n > 0 \end{cases}$$

5 Quattro dimensioni e d dimensioni.

5.1 • $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \leq n$ *con* $n \in \mathbb{N}$

La prima disequazione che vogliamo risolvere è $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \leq n$.

Algebricamente dobbiamo trovare tutte le quaterne di numeri interi la cui somma dei quadrati sia minore di n.

Geometricamente queste quaterne si possono pensare (ma non rappresentare) come tutti i punti interni ad una sfera in 4 dimensioni (una 4-sfera) centrata nell'origine di raggio $\sqrt{n}$. Volendo determinarne il numero, possiamo sezionare la 4-sfera con dei piani paralleli $t = i$ con $t = 0, 1, 2, ...$ fino a quando il piano non interseca più la 4-sfera, cioè fino a $i = \sqrt{n}$. Le sezioni saranno delle sfere in 3 dimensioni. Quindi si osserva che per calcolare i punti interi interni alla 4-sfera, cioè $N_4(n)$ si fa uso del precedente calcolo dei numeri interi interni alla sfera si dimensione 3 (3-sfera), cioè $N_3(m)$.

Cerchiamo ora la giusta relazione che lega N_4 con N_3.
Prima di tutto $N_4(0)$ consiste in un solo punto infatti algebricamente la disequazione $x^2+y^2+z^2+t^2 \leq 0$ ha per soluzione solo la quaterna $(0; 0; 0; 0)$ e geometricamente rappresenta un 4-sfera di raggio 0.
Per calcolare $N_4(1)$ ovvero risolvere la disequazione $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \leq 1$ dobbiamo sezionare la 4-sfera di raggio 1 con i tre piani $t = -1, t = 0$ e $t = 1$. La sezione ottenuta col piano $t = 0$ è una 3-sfera di raggio 1, algebricamente è la disequazione $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ e cioè $N_3(1)$ che come abbiamo visto sopra è uguale a 7. Le sezioni ottenute con i piani $t = -1$ e $t = 1$ sono due 3-sfere di raggio 0, algebricamente la disequazione $x^2 + y^2 + t^2 \leq 0$ e cioè $N_3(0)$ che a 1. Quindi

$$N_4(1) = N_3(1) + 2 \cdot N_3(0) = 7 + 2 \cdot 1 = 9$$

Per calcolare $N_4(4)$, per esempio, ovvero risolvere la disequazione $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \leq 4$ dobbiamo sezionare la 4-sfera di raggio 2 con i cinque piani $t = 0, t = \pm 1$ e $t = \pm 2$. La sezione ottenuta col piano $t = 0$ è una 3-sfera di raggio 2, algebricamente è la disequazione $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ e cioè $N_3(4) = 33$. Le sezioni ottenute con i piani $t = -1$ e $t = 1$ sono due 3-sfere di raggio $\sqrt{3}$, algebricamente la disequazione $x^2 + y^2 + z^2 \leq 3$ e cioè $N_3(3) = 27$. Le sezioni ottenute con i piani $t = -2$ e $t = 2$ sono due 3-sfere di raggio 0, algebricamente la disequazione $x^2 + y^2 + z^2 \leq 0$ e cioè $N_3(0) = 1$. Quindi

$$N_3(4) = N_2(4) + 2 \cdot (N_2(3) + N_2(0)) = 13 + 2 \cdot (9 + 1) = 33$$

Volendo generalizzare quindi otteniamo la seguente formula per il calcolo di $N_4(n)$:

$$\begin{cases} N_4(0) = 1 \\ N_4(n) = N_3(n) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} N_3\left(n - i^2\right), & n > 0 \end{cases}$$

Possiamo infine costruire una formula utilizzabile per una dimensione $d > 2$ generica e che quindi risolva l'equazione $a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + ... + a_m x_m^2 \leq n$, con $n, a, m \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} N_d(0) = 1 \\ N_d(n) = N_{d-1}(n) + 2 \cdot \sum\limits_{i=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} N_{d-1}\left(n - i^2\right), \qquad n > 0 \end{cases}$$

Con un linguaggio di programmazione si può costruire una tabella che fornisce tutti gli $N_d(n)$. Come esempio, presento una tabella con la somma dei punti interni fino alla dimensione 5 dei primi 20 valori ed il relativo codice in visual basic:

n	$N_1(n)$	$N_2(n)$	$N_3(n)$	$N_4(n)$	$N_5(n)$
0	1	1	1	1	1
1	3	5	7	9	11
2	3	9	19	33	51
3	3	9	27	65	131
4	5	13	33	89	221
5	5	21	57	137	333
6	5	21	81	233	573
7	5	21	81	297	893
8	5	25	93	321	1093
9	7	29	123	425	1343
10	7	37	147	569	1903
11	7	37	171	665	2463
12	7	37	179	761	2863
13	7	45	203	873	3423
14	7	45	251	1065	4223
15	7	45	251	1257	5183
16	9	49	257	1281	5913
17	9	57	305	1425	6393
18	9	61	341	1737	7633
19	9	61	365	1897	9153
20	9	69	389	2041	9905

```
Sub programma()
For k = 3 To 23
    Range("a" & k).Value = k - 3
    m = Range("a" & k).Value
    x = 0
        For I = 1 To Int(Sqr(m))
        x = x + Int(Sqr(m - I ^ 2))
        Next
    Range("b" & k).Value = 1 + 2 * Int(Sqr(m))
    Range("c" & k).Value = 1 + 4 * Int(Sqr(m)) + 4 * x
Next

Range("d" & 3).Value = 1
For j = 4 To 23
y = 0
    For p = 1 To Int(Sqr(j - 3))
    y = y + Range("c" & j - p ^ 2).Value
    Next
Range("d" & j).Value = Range("c" & j).Value + 2 * y
Next

Range("e" & 3).Value = 1
For l = 4 To 23
Z = 0
    For q = 1 To Int(Sqr(l - 3))
    Z = Z + Range("d" & l - q ^ 2).Value
    Next
Range("e" & l).Value = Range("d" & l).Value + 2 * Z
Next

Range("f" & 3).Value = 1
For v = 4 To 23
t = 0
    For h = 1 To Int(Sqr(v - 3))
    t = t + Range("e" & v - h ^ 2).Value
    Next
```

6 Conclusione

Lo scopo di questo articolo era spiegare la risoluzione del “Problema del cerchio di Gauss”. Introdotto il problema ne è stata analizzata la soluzione a cui era arrivato lo studioso; successivamente è stato ampliato il problema, studiando altre curve algebriche, oltre alla circonferenza, che rappresentano figure chiuse, di cui è possibile contare i punti interi interni. Il problema è stato approfondito inizialmente in una dimensione, poi in due e in tre per arrivare ad una generalizzazione in d dimensioni dell'equazione $a_1x_1^2+a_2x_2^2+...+a_mx_m^2 \leq n$, con $n, a, m \in \mathbb{N}$. Sono infatti arrivata a riassumere la somma delle soluzioni intere di questa equazione con la formula:

$$\begin{cases} N_d(0) = 1 \\ N_d(n) = N_{d-1}(n) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} N_{d-1}\left(n - i^2\right), \qquad n > 0. \end{cases}$$

7 Sitografia

http://it.wikipedia.org/wiki/Carl Friedrich Gauss
http://en.wikipedia.org/wiki/Gauss circle problem
http://mathworld.wolfram.com/GausssCircleProblem.html