ISISS “M. Casagrande”

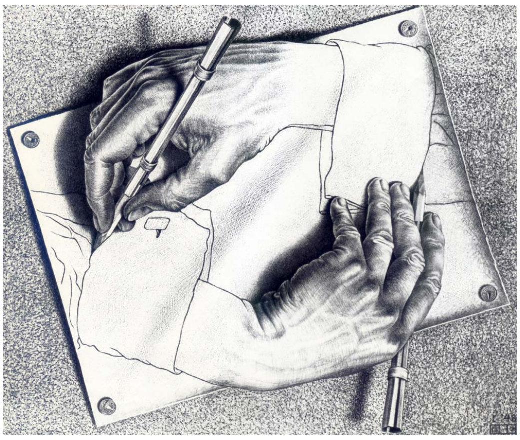
Liceo Scientifico delle Scienze Applicate

Classe 5ˆC A.S. 2017/2018

❝ Wir müssen wissen, wir werden wissen. ❞

La Crisi dei Fondamenti

Matematica e logica dall’antinomia di Russell al teorema di Gödel



Simone Boscaratto

Prefazione

❝ *La convinzione della risolubilità di ogni problema è un potere incentivo per il ricercatore. Dentro di noi sentiamo il perpetuo richiamo: c'è un problema, cerchiamone la soluzione. E la si può trovare con la sola ragione, perché in matematica non c'è nessun* ignorabimus. ❞

– David Hilbert[1]

Si può pensare alla matematica, nella sua complessità, come ad un grandioso edificio, di cui ogni piano poggia solidamente su quelli inferiori: ogni teorema deve essere dimostrato a partire da altri teoremi o princìpi, ogni restrizione o generalizzazione deve essere spiegata, ogni condizione necessaria deve essere posta. Calandosi in quest'ottica, i matematici di inizio Novecento, vedendo le ultime costruzioni di questo edificio come eccessivamente astratte e poco intuitive, decisero di risalire fino alle sue fondamenta, costruendo una teoria che permettesse la giustificazione logica di ogni enunciato matematico; è quella che venne chiamata *metamatematica*, o filosofia della matematica, disciplina che studia le condizioni per cui si possa sviluppare una teoria matematica coerente. La nascita della metamatematica avvenne però in un clima tutt'altro che sereno nel mondo che tentava di descrivere, contemporaneo alle crisi della fisica classica, della poetica, del pensiero occidentale stesso, oltreché della storia.

Il problema della coerenza della matematica tenne impegnati i massimi esperti del settore per un trentennio: è quella che fu chiamata *Crisi dei Fondamenti*.

Nel frontespizio: M.C. Escher, *Mani che disegnano*, 1948, litografia.

[1] Dal discorso al II Congresso Internazionale della Matematica di Parigi, 8 agosto 1900 (cfr. Odifreddi, 2000, p. 165)

Indice

Capitolo 1

Prologo

1.1 Da Pitagora ai cantoristi: breve storia dei fondamenti

La storia della matematica si può considerare iniziata con la storia stessa: le prime forme di scrittura cuneiforme dei Sumeri nacquero per esigenze amministrative e commerciali, quindi anche di misura.

Il primo tentativo di una sua fondazione formale e concettuale risale però ai tempi di Pitagora e dei suoi seguaci, nel VI secolo a.C.. Questi si presupposero di fondare l'intera matematica sull'aritmetica, quindi sui numeri *naturali* $\mathbb{N}$ e *razionali* $\mathbb{Q}$ e le loro operazioni elementari: qualsiasi misura doveva poter essere ricondotta ad una frazione di numeri interi (positivi) del tipo a/b.

Al numero veniva attribuito, oltre al valore puramente matematico di concetto astratto, anche un valore reale, con particolare riferimento alla musica, e uno simbolico-mistico, che giustificava la sua presenza anche nelle scienze occulte. Riguardo al significato matematico, i pitagorici imposero una distinzione essenziale dei numeri tra pari e dispari, interpretandola anche secondo gli altri due aspetti:

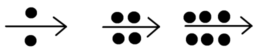
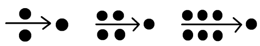
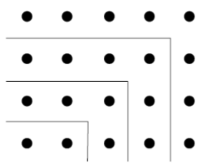
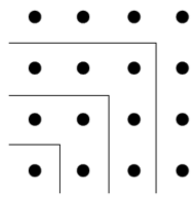
Pari		Dispari	
	Imperfetti	Perfetti	
	Illimitati	Limitati	
	Rettangolari	Quadrati	

Tabella 1.1: I caratteri essenziali dei numeri secondo i pitagorici.

Esterno alla classificazione rimaneva il numero 1, detto *parimpari* per la proprietà di rendere, attraverso l'operazione di somma, un numero pari un dispari, e viceversa; naturalmente, questa proprietà è comune a qualsiasi altro numero dispari, sebbene ciò non fosse contemplato dalla setta.

I contributi per cui è bene ricordare i pitagorici nell'evoluzione dei fondamenti sono l'introduzione dell'*infinito* nella trattazione matematica − benché si tenesse in considerazione soltanto perché fosse opportunamente evitato − e l'importanza attribuita alla somma del numero 1 ad un altro naturale, che in seguito costituì la base concettuale dell'operazione *successore* definita da Giuseppe Peano (§ 1.2.2).

Paradossalmente, il terzo e probabilmente maggiore debito della matematica verso i pitagorici fu la scoperta dei numeri *irrazionali*, ovvero quei reali non esprimibili come la frazione di interi già vista, mediante l'utilizzo dello stesso teorema di Pitagora. Per esempio, in un triangolo rettangolo isoscele di cateto 1 si ha che:

$$i = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

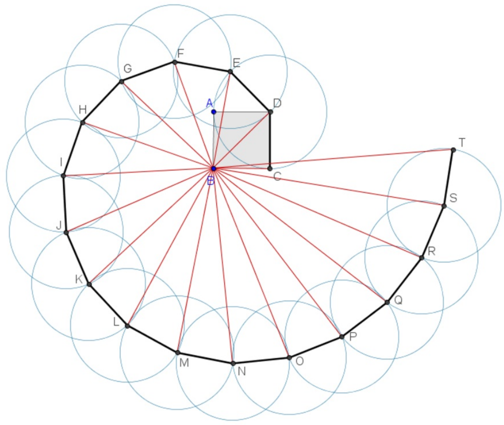


Figura 1.1: La spirale di Teodoro di Cirene: ogni lato esterno ha lunghezza unitaria ed è perpendicolare al raggio precedente (considerando l'evoluzione in senso antiorario); attraverso il teorema di Pitagora si dimostra che il raggio n-esimo ha lunghezza pari a $\sqrt{n}$.

Nel caso specifico, il risultato è la lunghezza della diagonale di un quadrato di lato unitario; l'irrazionalità di $\sqrt{2}$ fu in seguito formalmente dimostrata da Euclide. Esiste inoltre un metodo grafico-ricorsivo per ottenere le radici quadrate di numeri successivi attribuito agli stessi pitagorici.

Nel III secolo a.C. la grandiosa opera di Euclide, raccolta nei tredici libri degli *Elementi*, rifondò la matematica sulla geometria introducendo formalmente le nozioni di punto, retta e piano − gli *enti geometrici primitivi* − e riconducendo il numero a espressione delle misure geometriche; da qui la nozione comune delle equazioni di primo, secondo e terzo grado rispettivamente come 'lineari', 'quadratiche' e 'cubiche'. La geometria lasciata da Euclide era una teoria assiomatico-deduttiva che da un numero estremamente limitato di postulati era riuscito a dimostrare un'enormità di teoremi.

Per quest'ultima ragione, tale teoria e la conseguente concezione della matematica rimasero pressoché immutate fino al II millennio d.C., e in particolare al XIX secolo quando Nicolaj Lobačevskij, János Bolyaj e Bernhard Riemann superarono il *V postulato* (delle parallele) fondando di fatto le geometrie non euclidee. A posteriori, Eugenio Beltrami nel 1868 *dimostrò l'indimostrabilità* di alcune proposizioni all'interno di un sistema, nella fattispecie del *V postulato* dai primi quattro, e di conseguenza la legittimità di teorie in cui esso fosse sostituito da uno differente. I teoremi di Kurt Gödel (§ 2.3.2), svolsero lo stesso ruolo in un ambito diverso.

Mentre la geometria euclidea primeggiava, l'algebra ebbe modo di svilupparsi in modo indipendente in seguito all'introduzione del numero 0 e dei negativi da parte degli arabi nel VII secolo.

Nel XVII secolo la fondazione dell'analisi, quindi della matematica dei numeri *reali* $\mathbb{R}$ − razionali e irrazionali − permise a Pierre de Fermat e René Descartes di ridurre la geometria euclidea alla geometria analitica nello spazio cartesiano, stabilendo un sistema di assi che permette di attribuire ad ogni punto tre coordinate (due sul piano), la cui relazione reciproca consente di disegnarvi linee, figure e solidi e stabilirne le proprietà, in modo parallelo a come Euclide fece senza sistemi di riferimento. Lo spazio cartesiano è comunque adatto alla sola rappresentazione di uno spazio euclideo, in cui vale l'assioma delle parallele.

Nel XIX secolo si chiuse il cerchio, con la riduzione dell'analisi all'aritmetica: come si scoprì, i numeri reali $\mathbb{R}$ possono infatti essere espressi come insiemi di approssimazioni di numeri razionali $\mathbb{Q}$. Questo poté essere dimostrato con l'introduzione da parte di Georg Cantor dell'*infinito attuale* ω, distinto dall'infinito *potenziale* ∞ a cui, dalla logica aristotelica fino a quel momento, ci si era riferiti. Questa teoria non fu però accolta all'unanimità dall'*establishment* matematico dell'epoca e fu la causa prima della crisi; merita pertanto un ulteriore approfondimento per poterne cogliere la profondità e le dirette conseguenze.

Riassumendo, l'evoluzione storica dei fondamenti della matematica anteriore al tardo Ottocento si può suddividere in quattro tappe:

VI sec. a.C.	Pitagora	Matematica	$\rightarrow$	Aritmetica
III sec. a.C.	Euclide	Aritmetica	$\rightarrow$	Geometria
XVII sec.	Fermat, Cartesio	Geometria	$\rightarrow$	Analisi
XIX sec.	Cantor	Analisi	$\rightarrow$	Aritmetica

1.2 Avvento della crisi

1.2.1 La teoria dei gruppi

> ❝ *L'essenza della matematica risiede nella sua libertà.* ❞
>
> – Georg Cantor

Georg Cantor (1845-1918) contribuì in modo determinante all'aritmetizzazione dell'analisi. Questa fu possibile ponendo:

- $\mathbb{N}$ Insieme iniziale (da definire);
- $\mathbb{Z}$ Somma e differenza di naturali;
- $\mathbb{Q}$ Rapporto di interi con denominatore diverso da 0;
- $\mathbb{R}$ Successione fondamentale di razionali.

Questa via per ricavare insiemi numerici dai precedenti è talvolta indicato come *metodo genetico*. Mentre le costruzioni $\mathbb{N} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ apparivano scontate – almeno nell'Ottocento –, la riduzione di $\mathbb{R}$ a $\mathbb{Q}$ è sostanzialmente permessa della definizione di *infinito attuale* data da Cantor, che risale a sua volta al concetto di limite introdotto da Karl Weierstrass (1815-1897):

- Infinito potenziale ∞: grandezza variabile finita;
- Infinito attuale ω: grandezza costante al di là di tutte le grandezze finite.

Un metodo per tentare di visualizzare questo concetto è la tabella seguente: si stabilisca una successione arbitraria di numeri reali, in particolare quelli di cifre decimali infinite; ad ogni membro della successione può essere quindi associato un numero naturale.

$\mathbb{N}$	$\mathbb{R}$						
1	0.	**3**	3	3	3	3	...
2	1.	4	**1**	4	2	1	...
3	1.	6	1	**8**	0	3	...
4	2.	7	1	8	**2**	8	...
5	3.	1	4	1	5	**9**	...
...	...	...	...	...	...	...	...

Ci si focalizzi ora sulle cifre in grassetto, che costituiscono una diagonale. Se ad ognuna di esse viene sostituito il numero immediatamente successivo (sostituendo 0 se la cifra è 9) si ottiene:

$$0.42930\ldots$$

Questo numero, indipendentemente dalla parte non decimale, non appartiene alla successione perché differisce a meno di una cifra da ciascuno dei numeri che vi appartengono. Se tutti i numeri naturali sono già stati usati per ordinare la successione, si definisce ω come il numero ordinale associato al primo numero reale escluso dalla successione stessa. Questa tabella permise a Cantor di provare tra le altre cose che i reali hanno *cardinalità* maggiore dei naturali, pur possedendo entrambi un numero infinito di elementi; ciò stabilì di fatto una classificazione degli infiniti stessi. Il metodo di dimostrazione utilizzato prese il nome di *argomento diagonale*.

Del resto, ω non è il numero più grande concepibile nella teoria di Cantor, poiché i principi di generazione degli ordinali stabiliscono che dato un ordinale esiste sempre il suo successore immediato (*primo principio*), e che data una sequenza infinita di ordinali esiste sempre un ordinale a essa successivo che non appartiene alla sequenza stessa (*secondo principio*): così a ω segue $\omega+1$, $\omega+2$, ..., $\omega+\omega$, ..., $\omega\cdot\omega$, ..., ω^ω, ..., all'infinito.

L'esistenza dell'infinito attuale permette, come accennato, di definire un numero reale a partire da una *successione fondamentale* associata, ovvero una successione numerica in cui la differenza tra due termini qualsiasi sia arbitrariamente piccola. Ad esempio, la successione fondamentale di $\sqrt{2}$ può essere:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 1 \\
a_2 &= 1.4 \\
a_3 &= 1.41 \\
a_4 &= 1.414 \\
a_5 &= 1.4142 \\
&...
\end{aligned}
$$

Se l'infinito esistesse solo in potenza, non sarebbe possibile di fatto definire i numeri irrazionali, quindi i reali, per mezzo dei razionali attraverso il metodo di Cantor: per quanto piccola possa essere la differenza $\sqrt{2} - a_n$, questa non sarà in nessun caso nulla. Attraverso l'infinito attuale invece, si può definire un a_ω il cui valore coincida effettivamente con quello di $\sqrt{2}$, di cifre infinite non in potenza, ma in atto. Due metodi equivalenti di definizione dei reali furono sviluppati nello stesso periodo dallo stesso Weierstrass − come somme infinite di razionali − e da Richard Dedekind (1831-1916) − come elementi separatori di due classi di razionali −. Ciò che distinse Cantor fu l'aver definito per la prima volta un infinito intuitivamente del tutto inconcepibile dalla mente umana, abituata a confrontarsi con la finitezza del mondo fisico.

L'efficacia dell'aritmetizzazione dell'analisi dipendeva, ridotto $\mathbb{R}$ ad $\mathbb{N}$, dalla definizione di $\mathbb{N}$ stesso; Cantor introdusse quindi la *Mengenlehre*, o *teoria dei gruppi*[1], nel tentativo di ridurre la teoria dei numeri alla teoria degli insiemi. Definendo:

$$0 = \emptyset$$

si possono a loro volta definire:

$$
\begin{aligned}
1 &= \{0\} = \{\emptyset\} \\
2 &= \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\
&... \\
n + 1 &= \{0, 1, ..., n\} = n \cup \{n\}
\end{aligned}
$$

Alle operazioni tra numeri si possono quindi far corrispondere operazioni tra insiemi.

La prospettiva insiemistica fu perseguita da parte dei matematici durante il dibattito sui fondamenti, mentre altri la osteggiarono per il continuo riferimento all'infinito attuale e a metodi di dimostrazione esistenziali, qual è lo stesso argomento diagonale.

Nonostante la grande potenza dimostrata dalla teoria dei gruppi, questa ha sin dall'inizio presentato il problema di incorrere in paradossi logici, di cui due scoperti dallo stesso Cantor.

Il primo si verifica tentando di applicare il *secondo principio di generazione degli ordinali* alla sequenza di tutti gli ordinali: esisterebbe un ordinale ad essa successivo che non vi appartiene; questo numero dovrebbe, per definizione e secondo il principio, sia appartenere sia non appartenere alla sequenza stessa. Il *terzo principio*, introdotto successivamente, stabilì quindi che il *secondo principio* non è applicabile a tale sequenza.

Il secondo paradosso, noto come *paradosso di Cantor*, si riferisce invece agli insiemi. Per il *teorema di Cantor*, dato un insieme è sempre possibile definire un insieme di cardinalità maggiore (il suo *insieme potenza*), esattamente come dato un ordinale ne esiste sempre il successivo. Si definisca ora l'insieme universale, che contiene per definizione tutto il concepibile: secondo il teorema, dovrebbe esistere un insieme ancora maggiore; ma com'è possibile che esista un insieme con più elementi di quello che già contiene tutto? Cantor risolse il paradosso in modo simile al precedente, con un principio *ad hoc*, appellandosi come giustificazione al *platonismo*: il *transfinito*, conoscibile dalla mente umana, differirebbe secondo il matematico dall'*infinito assoluto*, comprensibile solo per il divino; a ordinali e classi che esprimono una totalità non si potrebbero quindi applicare i princìpi validi per il transfinito.

Bertrand Russell nel 1901 considerò i problemi apparentemente risolti dalla matematica di fine secolo, l'*infinito*, l'*infinitesimo* e la *continuità*, rendendosi conto che altro non erano che la riformulazione delle questioni poste nel V secolo a.C. da Zenone di Elea. Questo rimando diretto alla Grecia classica non è di poco conto se si considera la tendenza di Zenone a spiegare la sua filosofia attraverso paradossi, molteplici nelle teorie eredi del cantorismo, e facendo largo uso della *dimostrazione per assurdo*, la cui validità fu messa in discussione proprio durante la crisi.

[1] I termini 'gruppo', 'classe' e 'insieme' sono utilizzati quali sinonimi fino a § 2.1, in cui viene applicata una distinzione; di fatto, almeno fino alla crisi non si utilizzano definizioni rigorose e univoche dei tre concetti.

1.2.2 Scuole tradizionali e scuole fondazionali

Si rende ora necessario fare una precisazione per quanto concerne il modo dei matematici di intendere la propria disciplina anche da un punto di vista filosofico; i matematici di ogni epoca possono infatti essere suddivisi in due diverse scuole, che sostengono:

- La matematica è un ente che esiste in sé, indipendente e reale: il suo sviluppo è fondato sulla scoperta (concezione *platonica*);
- La matematica è frutto della creazione da parte della mente umana: il suo sviluppo è fondato sull'intuizione (concezione "antropologica").

Nel trentennio della crisi tra le scuole che si rifacevano queste due correnti se ne inserì una terza. Il panorama intellettuale della crisi dei fondamenti vide schierarsi dunque:

- *Logicismo*, di ispirazione platonica;
- *Intuizionismo*, di ispirazione "antropologica";
- *Formalismo*, non strettamente riconducibile a concezioni precedenti.

Di seguito i caratteri dei programmi e i principali sostenitori.

Il logicismo

> “ *Tutti i princìpi della matematica si riducono ai princìpi della logica.* ”
>
> – Willard van Orman Quine

La scuola *logicista* ebbe in Cantor e Gottlob Frege (1848-1925) i suoi precursori, e in Alfred North Whitehead (1861-1947) e Bertrand Russell (1872-1970) i suoi principali esponenti durante la crisi. Il loro obiettivo era quello di fondare la matematica sulla pura logica.

Ereditando i risultati della *teoria dei gruppi*, Frege intraprese il tentativo di una definizione formale dell'aritmetica all'interno della logica, sviluppando la *teoria "ingenua" degli insiemi*.

Il primo passo consistette nella formalizzazione della logica, tentativo già intrapreso compiutamente soltanto da George Boole (1815-1864), alle cui *Leggi del pensiero* (1854) si fa risalire la nascita della logica matematica. Da parte sua Frege, nel *Begriffsschrift* (*Ideografia*, 1879), costruì un sistema di simboli e formule dichiaratamente ispirato a quello aritmetico per definire la logica, che fu quindi spogliata di ogni ambiguità del linguaggio ordinario e rivestita dell'esattezza formale della matematica.

In seguito, i cardini della sua teoria furono enunciati nei *Grundgesetze der Arithmetik* (*Principi dell'aritmetica*, voll. I, II rispettivamente 1893, 1903). Tra i suoi princìpi, uno risulta di particolare interesse:

Principio 1.2.1 (di comprensione)**.** *Ogni proprietà determina un insieme costituito dagli oggetti che soddisfano tale proprietà; ogni insieme è determinato da una proprietà di alcuni oggetti, ossia quella di appartenere all'insieme.*

Questo definisce l'esistenza di ogni insieme a cui si può far corrispondere una proprietà, per il solo fatto che essa sia concepibile. Si vedrà in seguito che non è così; da questo principio si fa risalire infatti il paradosso che aprì "ufficialmente" la crisi (§ 2.1).

L'intuizionismo

> “ *Le generazioni future considereranno la* Mengenlehre *come una malattia dalla quale siamo riusciti a guarire.* ”
>
> – Henri Poincaré

La scuola *intuizionista* si modellò sul pensiero filosofico kantiano, oltre che su quello matematico di Leopold Kronecker (1823–1891) e di Henri Poincaré (1854-1912), ed ebbe come massimo rappresentante Luitzen Brouwer (1881-1996). Il suo modo di intendere la matematica era direttamente innestato sulla concezione antropologica della matematica.

Secondo l'intuizionismo, se ci si fosse attenuti al programma logicista la matematica non sarebbe diventata altro che una tautologia, negando la capacità creativa dell'uomo e il *principio di induzione*: la logica costituirebbe un'appendice della matematica, e non viceversa. Il programma negava in particolare il *principio del terzo escluso*, risalente ad Aristotele; questo principio sostiene che '$A \veebar \neg A$', ovvero: 'A è vera, oppure è vera la negazione di A'; di conseguenza nessuna altra possibilità è ammessa (*tertium non datur*).

Per la logica intuizionista, inaugurata nel 1912 dalla lezione *Intuizionismo e formalismo* di Brouwer, la negazione della negazione non equivale ad una dimostrazione della verità di una proposizione, almeno per gli insiemi transfiniti: si esclude così il ragionamento per assurdo e qualsiasi dimostrazione che non sia costruttiva. Il tentativo di rifondare la matematica su queste basi negava una buona parte degli sviluppi della matematica dell'epoca, o meglio il modo in cui era dimostrata, e in particolare il cantorismo: gli insiemi infiniti non numerabili furono giudicati controintuitivi e perciò privi di significato. In questi insiemi l'intuizionismo ritrovò l'origine dei paradossi della teoria, motivo per cui si propose l'ambizione anacronistica di riportare la matematica allo stato precedente al 1874, ovvero al debutto della teoria dell'infinito di Cantor.

Il formalismo

> ❝ *Dobbiamo essere in grado ovunque di sostituire le parole punti, linee e piani, con le parole tavoli, sedie e bicchieri di birra.* ❞
>
> – David Hilbert

La scuola *formalista* non tendeva dichiaratamente ad una delle due correnti tradizionali, ma si può dire che raccolse i frutti migliori del logicismo e dell'intuizionismo. Secondo i formalisti, guidati da David Hilbert (1862-1943) e vantando precursori e contemporanei da Euclide a Giuseppe Peano (1858-1932), la matematica doveva essere fondata su un numero limitato di assiomi, tra loro coerenti, da cui si sarebbe potuta dimostrare l'intera teoria come altrettanto coerente. Poca importanza assumerebbe il significato intuitivo dei termini usati, quali 'punto' in geometria o 'numero' in matematica, a patto che sia rispettata l'assoluta coerenza degli enunciati. L'attività del matematico assumerebbe valore nel momento della creazione, ma la verità di ogni teorema sarebbe dovuta essere ricercata nei princìpi, non nella mente.

Peano contribuì ad una profonda riforma dei simboli della matematica parallela a quella di Frege, esposta nel *Formulaire de mathématiques* (1895), da cui deriva gran parte della simbologia utilizzata tuttora. Il suo contributo principale è dovuto però alla pubblicazione dei *Principi dell'aritmetica esposti con metodo nuovo* (1889), in cui assiomatizzò l'aritmetica dotandola di tre concetti primitivi, che non vengono definiti in quanto considerati nozione comune, e cinque assiomi, di cui si enuncia l'ultimo.

- Numero: $n \in \mathbb{N}$;
- Zero: 0;
- Successore immediato: $\mathrm{S}\,n$.

Il *successore immediato* di un numero naturale si può intendere in termini aritmetici come il risultato della somma di 1: così $\mathrm{S}\,0 = 1$. L'operazione successore permette di definire, parallelamente alla *teoria dei gruppi*, qualsiasi naturale dall'iterazione di una stessa operazione:

$$\begin{aligned} 1 &= \mathrm{S}\,0 \\ 2 &= \mathrm{S}\,1 = \mathrm{S}(\mathrm{S}\,0) \\ &\dots \\ n+1 &= \mathrm{S}\,n \end{aligned}$$

Tra gli assiomi, il *principio di induzione matematica* è di cruciale importanza perché esprime la possibilità di dedurre le proprietà di un numero senza doverle dimostrare singolarmente.

Principio 1.2.2 (di induzione matematica)**.** *Ogni proprietà di cui gode lo zero e il successore immediato di ogni numero che gode della proprietà data appartiene a tutti i numeri.*

Il complesso di assiomi costituì il nucleo dell'*aritmetica di Peano*, che in seguito avrebbe potuto ambire alla risoluzione del *secondo problema di Hilbert* (§ 1.3).

A David Hilbert è dovuta quella che è considerata la definitiva assiomatizzazione della geometria euclidea: nei *Fondamenti della geometria* (1899) utilizzò ventuno postulati, aggiungendo ai cinque classici altri che in precedenza erano stati dati per impliciti. Il suo metodo non dimostrava la coerenza intrinseca della geometria, ma ne spostava la risoluzione: associando ad ogni oggetto geometrico un oggetto algebrico, similmente a Cartesio e Fermat, la geometria si sarebbe dimostrata coerente se e solo se a sua volta l'algebra fosse stata dimostrata coerente.

1.3 La matematica di un secolo

> ❝ *Chi di noi non sarebbe felice di poter sollevare il velo dietro cui si nasconde l'avvenire, lasciando cadere l'occhio sui futuri progressi della nostra scienza e sui segreti del suo sviluppo?* ❞
>
> – David Hilbert

Era il giorno 8 agosto 1900 quando Hilbert prese la parola al II Congresso Internazionale della Matematica di Parigi, segnando la storia della matematica del secolo appena inaugurato. Nella sua trattazione, espose dieci problemi da una lista di ventitré, in seguito pubblicata, che secondo le previsioni dell'autore avrebbe guidato la ricerca matematica del Novecento. Così avvenne.

In particolare, il *secondo problema* era inerente alla coerenza degli assiomi dell'aritmetica; una dimostrazione accettabile da Hilbert doveva però rispettare la condizione di essere *assoluta*.

Per Hilbert, una dimostrazione assoluta di coerenza è basata su procedimenti che fanno appello a un numero non infinito di proprietà strutturali delle formule o di operazioni con le formule; ovvero, è fondata su procedimenti *finitistici*, o *algoritmi*, come vennero in seguito definiti. La costruzione di tali dimostrazioni necessita di una completa formalizzazione del sistema utilizzato, privando gli oggetti del loro significato intuitivo, e dell'enunciazione di un insieme di regole per combinare e manipolare i segni che compongono il calcolo; naturalmente le dimostrazioni ricorrono soltanto a postulati e teoremi contemplati nella teoria in seno alla quale avvengono. La dimostrazione di coerenza di una teoria matematica deve dunque, secondo Hilbert, avvenire in contesto *metamatematico*, poiché la congettura da dimostrare 'la teoria A è coerente' è posta sulla teoria stessa, e non all'interno di essa.

Se la coerenza dell'aritmetica fosse stata dimostrata, il grande risultato di Cantor – la riduzione di $\mathbb{R}$ a $\mathbb{N}$ – avrebbe permesso la fondazione di tutta la matematica su un numero limitato di assiomi, e con essa la geometria. Tutto questo era nello specifico l'obiettivo del *programma di Hilbert*.

Capitolo 2

Crisi dei fondamenti della matematica

2.1 L'antinomia di Russell

> ❝ *Per creare una sana filosofia voi potete rinunciare alla metafisica, ma siate un buon matematico.* ❞
>
> – Bertrand Russell

> "Solo in un punto ho incontrato una difficoltà. [...] Sia w il predicato: essere un predicato che non può essere predicato di se stesso. Si può predicare w di se stesso? Da ogni risposta segue l'opposto. Bisogna dunque concludere che w non è un predicato. Allo stesso modo non esiste una classe (come totalità) di quelle classi che come totalità non appartengono a sé stesse. Ne concludo che in determinate circostanze un insieme definibile non forma una totalità."

Questo passo[1], tratto da una lettera di Russell a Frege datata 1902, segnò il definitivo ingresso della matematica nella crisi dei fondamenti.

La critica di Russell nacque dall'analisi della dimostrazione cantoriana dell'inesistenza di un numero cardinale massimo; allo stesso modo, a generare il paradosso è il *principio di comprensione* fregeano. Nella lettera, la contraddizione è espressa da Russell nella notazione di Peano come:

$$w = \mathrm{cls} \frown x \ni (x \sim \varepsilon\, x) \,.\, \supset \colon w \,\varepsilon\, w \,.\, = \,.\, \sim \varepsilon\, w$$

Utilizzando una scrittura più attuale:

$$w = \{x \mid x \notin x\} \Rightarrow w \in w \Leftrightarrow w \notin w$$

In altri termini, il problema posto da Russell riguarda una particolare categoria di classi *autoreferenziali*, ossia che si riferiscono a loro stesse: la classe degli insiemi che non appartengono a loro stessi appartiene a se stessa?

È bene distinguere ora le *classi* dagli *insiemi*: questi ultimi sono oggetti delle prime, ovvero una classe è un insieme nel momento in cui esiste una classe alla quale appartiene come oggetto. Di conseguenza, tutti gli insiemi sono classi di oggetti, ma non tutte le classi sono insiemi; classi che non sono insiemi sono dette *classi proprie*. Il *paradosso di Russell* si riduce in definitiva alla constatazione che la classe degli insiemi che non appartengono a loro stessi è propria.

Si definisca quindi w come 'classe degli insiemi che non appartengono a loro stessi': se si assume che w appartenga a se stesso, allora deve per il *principio di comprensione* rispettare la proprietà degli oggetti della classe, ossia di non appartenere a se stesso; viceversa, se si assume che w non appartenga a se stesso, esso gode della proprietà che definisce la classe, e pertanto, per il medesimo *principio di comprensione*, rientra nella classe ed appartiene a se stesso.

Del tutto analogo è il paradosso scoperto da Cantor sugli ordinali, divenuto noto come *paradosso di Burali-Forti* dal nome del matematico italiano che lo presentò al I Congresso della Matematica di Zurigo nel 1897, mentre è dal *paradosso di Cantor* che derivò quello scoperto da Ernst Zermelo tra il 1899 e il 1900 e poi divenuto noto come di Russell.

Per esemplificare il concetto sono stati successivamente introdotti diversi paradossi entrati nell'immaginario collettivo, i più noti dei quali sono quelli *del barbiere* e *del bibliotecario*. Esistono però esempi *ante litteram* dell'antinomia, in particolare il *paradosso del mentitore*, attribuito a Epimenide di Creta.

[1]Dalla lettera XXVI/1 di Russell a Frege, 16 giugno 1902 (Frege, 1976, p. 184)

- *Paradosso del mentitore.* Si supponga come fatto assodato che i cretesi siano bugiardi; l'affermazione in sé non genera contraddizioni. Se questa affermazione viene sostenuta da un cretese – quale Epimenide era – ci si ritrova però nell'impossibilità di decidere se i cretesi siano effettivamente bugiardi o meno. È l'equivalente di affermare 'sto mentendo' oppure 'questa frase è falsa'.

- *Paradosso del barbiere.* In un paese c'è un unico barbiere che si vanta di fare la barba a tutti gli uomini che non si sbarbano da soli e a nessun altro. Un giorno il barbiere si chiede se debba tagliarsi la barba da solo o meno, accorgendosi che si sbarberebbe da solo se e solo se non si sbarbasse da solo, e viceversa; l'unica soluzione che riesce a escogitare il barbiere è quella di non tagliare affatto la barba.

- *Paradosso del bibliotecario.* Un bibliotecario si trova a dover redigere una catalogazione di tutti i libri della biblioteca. Prendendo a riferimento diversi parametri, si ritrova ad avere una quantità di cataloghi tale da necessitare una propria, ulteriore, catalogazione; il bibliotecario constata a questo punto che alcuni cataloghi includono loro stessi – per esempio, presumibilmente, quello dei cataloghi con numero di pagine maggiore di uno – mentre altri no. Decide quindi di stendere un ultimo catalogo di tutti i cataloghi che non includono loro stessi, chiedendosi se questo catalogo debba esserne incluso o meno. Di fronte all'insolubilità del problema, storia vuole che il bibliotecario si dimetta dall'incarico.

L'ultimo paradosso è di particolare interesse perché, a differenza degli altri due, vi si può riconoscere una suddivisione in livelli:

1. Libri (oggetti);
2. Cataloghi dei libri (classi di oggetti);
3. Cataloghi dei cataloghi dei libri (classi di insiemi di oggetti).

Russell, come il bibliotecario della storia, incappò nel paradosso tentando di classificare gli insiemi come appartenenti o meno a loro stessi mediante una tavola di verità. Nelle modalità, il procedimento è del tutto analogo all'argomento diagonale già visto.

	A	B	C	D	E	$\dots$
A	$\boldsymbol{\notin}$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\cdots$
B	$\notin$	$\boldsymbol{\in}$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\cdots$
C	$\in$	$\notin$	$\boldsymbol{\in}$	$\notin$	$\notin$	$\cdots$
D	$\in$	$\in$	$\notin$	$\boldsymbol{\notin}$	$\notin$	$\cdots$
E	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\boldsymbol{\notin}$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Si definisca ora la classe R, relazionata agli altri insiemi della tabella attraverso l'inversione dei simboli che compaiono nella diagonale:

	R
A	$\in$
B	$\notin$
C	$\notin$
D	$\in$
E	$\in$
$\vdots$	$\vdots$

Questa classe è, per l'esattezza, la classe degli insiemi che non appartengono a loro stessi. Tale classe, similmente a quanto visto per il numero associato all'ordinale ω, differisce da ogni altra classe della successione a meno di un simbolo di appartenenza; R non può quindi essere classificato nella sequenza stessa, come Russell dimostrò.

Diversi matematici, tra cui Poincaré e lo stesso Russell, osservarono che i paradossi della teoria degli insiemi nascono sempre da casi di autoreferenza: banalizzando, la classe di tutti i libri non è un libro, ma la classe di tutte le classi è una classe; e qui può incorrere la contraddizione.

L'antinomia, scaturita dal porre insiemi come oggetti di altre classi, è una prova dell'incoerenza dell'originale teoria degli insiemi.

Il paradosso di Richard

Di massima importanza nella risoluzione della crisi da poco aperta fu il *paradosso di Richard*, enunciato per la prima volta nel 1905 dall'omonimo matematico francese; ad esso infatti si ispirò Gödel per il suo *teorema di incompletezza* (§ 2.3.2).

Si supponga l'esistenza di un linguaggio in cui tutte le proprietà e definizioni puramente aritmetiche siano formulabili in un numero finito di termini, presupposto un numero arbitrariamente piccolo di termini primitivi non definiti esplicitamente. Ciascuna definizione può quindi essere ordinata in modo crescente secondo il numero di caratteri contenuti nella definizione e, in caso di parità, secondo l'ordine alfabetico; si stabilisce quindi una relazione biunivoca tra le definizioni e l'insieme $\mathbb{N}$. Ad esempio:

$$\begin{array}{ccc} 1 & \rightarrow & \text{`Segno'} \\ 2 & \rightarrow & \text{`Numero'} \\ \dots & \rightarrow & \dots \end{array}$$

Dato questo ordinamento, può senz'altro incorrere che un numero risponda alla definizione ad esso associata; nell'esempio, 2 è un numero, quindi possiede la proprietà a cui è associato. Si dia quindi la definizione di *numero richardiano*, ovvero:

Definizione 2.1.1 (Numero richardiano)**.** Un numero x si definisce richardiano se non possiede la proprietà definita dall'espressione associata a x nell'insieme serialmente ordinato delle definizioni aritmetiche.

La proprietà di essere un numero richardiano, riguardando la serie in esame, è dunque tipica dell'insieme dei numeri naturali, pertanto la sua definizione rientra nell'insieme delle definizioni aritmetiche; di conseguenza, ad essa è a sua volta associato un numero intero che ne esprime la posizione nella serie. Se tale numero è n ci si trova, in modo analogo ai paradossi già presentati, nell'indecidibilità di definire n richardiano o meno.

A differenza dell'*antinomia di Russell*, di fatto irresolubile nel contesto della *teoria ingenua degli insiemi*, il *paradosso di Richard* può essere aggirato concentrandosi su un dettaglio essenziale. La definizione di numero richardiano non è *puramente* aritmetica, poiché non è definibile formalmente attraverso le operazioni di somma, moltiplicazione, ecc. tipiche dei numeri naturali; essa è infatti metamatematica, perché si riferisce al numero e all'ordine dei caratteri contenuti nelle definizioni: proposizione sull'aritmetica, non in essa.

2.2 Due tentativi paralleli

❝ *Ogni disciplina matematica attraversa tre fasi: quella ingenua, quella formale e quella critica.* ❞

– David Hilbert

Agli albori della crisi, due lavori si proposero di porle immediatamente fine, ottenendo risultati parziali che furono poi utili alla risoluzione definitiva della questione e allo sviluppo della matematica successiva. Segue la spiegazione di questi due approcci.

2.2.1 La teoria dei tipi

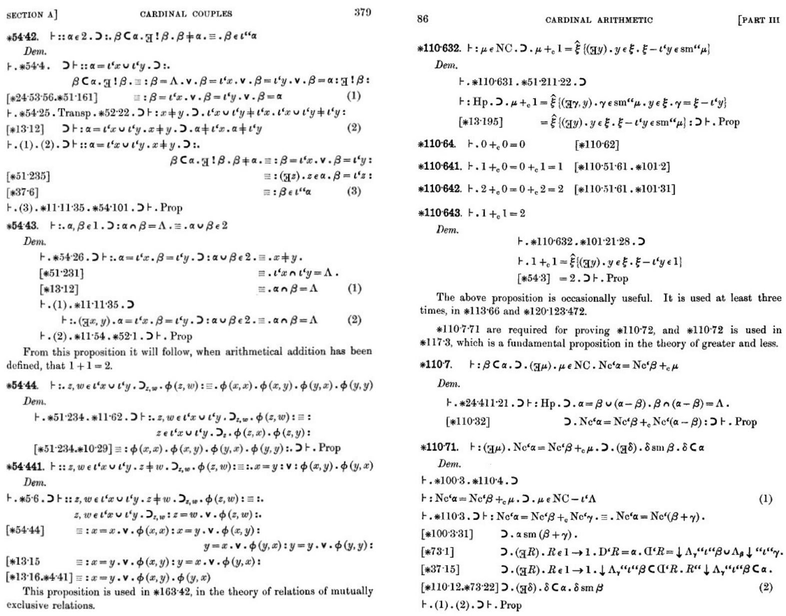
Sulla linea di pensiero di Frege, Russell si propose di dimostrare che tutte le nozioni aritmetiche possono essere definite attraverso concetti puramente logici; nacquero così i *Principia mathematica* (voll. I, II, III rispettivamente 1910, 1912, 1913), scritti in collaborazione con Whitehead.

Dati i presupposti del proprio paradosso, Russell risolse di impedire la definizione stessa di classi autoreferenziali e sopprimere quindi sul nascere ogni possibilità di incorrere in una contraddizione. La teoria proposta nei *Principia* esclude quindi il postulato secondo cui gli insiemi possano essere elementi, suddividendoli in 'tipi' successivi: insiemi di elementi "atomici", classi di insiemi di atomi, ecc. – o se si preferisce cataloghi di libri, cataloghi di cataloghi di libri, ecc. –, imponendo che ogni classe di un dato tipo possa avere come elementi solo insiemi del tipo precedente[2], oppure atomi.

La *teoria dei tipi* così formulata si privò delle contraddizioni della *teoria ingenua degli insiemi* attraverso un principio di generazione enunciato nel 1908 come:

Principio 2.2.1 (del circolo vizioso)**.** *Ciò che comprende la totalità di un insieme non può essere un membro dell'insieme.*

[2]Si è mantenuta per coerenza la distinzione tra insieme e classe, sebbene in questo sistema non esista possibilità alcuna di ambiguità: dati due tipi successivi, del primo fanno parte gli elementi, dell'altro gli insiemi a cui appartengono quegli stessi elementi; gli elementi sono comunque trattati come atomi, indipendentemente dalla loro reale natura.



SECTION A] CARDINAL COUPLES 379

$*54{\cdot}42.\ \vdash :: \alpha \in 2 . \supset :. \beta \subset \alpha . \exists ! \beta . \beta \neq \alpha . \equiv . \beta \in \iota``\alpha$

Dem.

$\vdash . *54{\cdot}4 . \supset \vdash :: \alpha = \iota`x \cup \iota`y . \supset :.$
$\beta \subset \alpha . \exists ! \beta . \equiv : \beta = \Lambda . \vee . \beta = \iota`x . \vee . \beta = \iota`y . \vee . \beta = \alpha : \exists ! \beta :$
$[*24{\cdot}53{\cdot}56 . *51{\cdot}161] \quad \equiv : \beta = \iota`x . \vee . \beta = \iota`y . \vee . \beta = \alpha \quad (1)$
$\vdash . *54{\cdot}25 . \mathrm{Transp} . *52{\cdot}22 . \supset \vdash : x \neq y . \supset . \iota`x \cup \iota`y \neq \iota`x . \iota`x \cup \iota`y \neq \iota`y :$
$[*13{\cdot}12] \quad \supset \vdash : \alpha = \iota`x \cup \iota`y . x \neq y . \supset . \alpha \neq \iota`x . \alpha \neq \iota`y \quad (2)$
$\vdash . (1) . (2) . \supset \vdash :: \alpha = \iota`x \cup \iota`y . x \neq y . \supset :.$
$\beta \subset \alpha . \exists ! \beta . \beta \neq \alpha . \equiv : \beta = \iota`x . \vee . \beta = \iota`y :$
$[*51{\cdot}235] \quad \equiv : (\exists z) . z \in \alpha . \beta = \iota`z :$
$[*37{\cdot}6] \quad \equiv : \beta \in \iota``\alpha \quad (3)$
$\vdash . (3) . *11{\cdot}11{\cdot}35 . *54{\cdot}101 . \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

$*54{\cdot}43.\ \vdash :. \alpha, \beta \in 1 . \supset : \alpha \cap \beta = \Lambda . \equiv . \alpha \cup \beta \in 2$

Dem.

$\vdash . *54{\cdot}26 . \supset \vdash :. \alpha = \iota`x . \beta = \iota`y . \supset : \alpha \cup \beta \in 2 . \equiv . x \neq y .$
$[*51{\cdot}231] \quad \equiv . \iota`x \cap \iota`y = \Lambda .$
$[*13{\cdot}12] \quad \equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda \quad (1)$
$\vdash . (1) . *11{\cdot}11{\cdot}35 . \supset$
$\vdash :. (\exists x, y) . \alpha = \iota`x . \beta = \iota`y . \supset : \alpha \cup \beta \in 2 . \equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda \quad (2)$
$\vdash . (2) . *11{\cdot}54 . *52{\cdot}1 . \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

From this proposition it will follow, when arithmetical addition has been defined, that $1 + 1 = 2$.

$*54{\cdot}44.\ \vdash :. z, w \in \iota`x \cup \iota`y . \supset_{z,w} . \phi(z, w) : \equiv . \phi(x, x) . \phi(x, y) . \phi(y, x) . \phi(y, y)$

Dem.

$\vdash . *51{\cdot}234 . *11{\cdot}62 . \supset \vdash :. z, w \in \iota`x \cup \iota`y . \supset_{z,w} . \phi(z, w) : \equiv :$
$z \in \iota`x \cup \iota`y . \supset_z . \phi(z, x) . \phi(z, y) :$
$[*51{\cdot}234 . *10{\cdot}29] \equiv : \phi(x, x) . \phi(x, y) . \phi(y, x) . \phi(y, y) :. \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

$*54{\cdot}441.\ \vdash :: z, w \in \iota`x \cup \iota`y . z \neq w . \supset_{z,w} . \phi(z, w) : \equiv :. x = y : \vee : \phi(x, y) . \phi(y, x)$

Dem.

$\vdash . *5{\cdot}6 . \supset \vdash :: z, w \in \iota`x \cup \iota`y . z \neq w . \supset_{z,w} . \phi(z, w) : \equiv :.$
$z, w \in \iota`x \cup \iota`y . \supset_{z,w} : z = w . \vee . \phi(z, w) :.$
$[*54{\cdot}44] \quad \equiv : x = x . \vee . \phi(x, x) : x = y . \vee . \phi(x, y) :$
$y = x . \vee . \phi(y, x) : y = y . \vee . \phi(y, y) :$
$[*13{\cdot}15 \quad \equiv : x = y . \vee . \phi(x, y) : y = x . \vee . \phi(y, x) :$
$[*13{\cdot}16 . *4{\cdot}41] \equiv : x = y . \vee . \phi(x, y) . \phi(y, x)$

This proposition is used in $*163{\cdot}42$, in the theory of relations of mutually exclusive relations.

86 CARDINAL ARITHMETIC [PART III

$*110{\cdot}632.\ \vdash : \mu \in \mathrm{NC} . \supset . \mu +_c 1 = \hat{\xi}\{(\exists y) . y \in \xi . \xi - \iota`y \in \mathrm{sm}``\mu\}$

Dem.

$\vdash . *110{\cdot}631 . *51{\cdot}211{\cdot}22 . \supset$
$\vdash : \mathrm{Hp} . \supset . \mu +_c 1 = \hat{\xi}\{(\exists \gamma, y) . \gamma \in \mathrm{sm}``\mu . y \in \xi . \gamma = \xi - \iota`y\}$
$[*13{\cdot}195] \quad = \hat{\xi}\{(\exists y) . y \in \xi . \xi - \iota`y \in \mathrm{sm}``\mu\} : \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

$*110{\cdot}64.\ \vdash . 0 +_c 0 = 0 \quad [*110{\cdot}62]$

$*110{\cdot}641.\ \vdash . 1 +_c 0 = 0 +_c 1 = 1 \quad [*110{\cdot}51{\cdot}61 . *101{\cdot}2]$

$*110{\cdot}642.\ \vdash . 2 +_c 0 = 0 +_c 2 = 2 \quad [*110{\cdot}51{\cdot}61 . *101{\cdot}31]$

$*110{\cdot}643.\ \vdash . 1 +_c 1 = 2$

Dem.

$\vdash . *110{\cdot}632 . *101{\cdot}21{\cdot}28 . \supset$
$\vdash . 1 +_c 1 = \hat{\xi}\{(\exists y) . y \in \xi . \xi - \iota`y \in 1\}$
$[*54{\cdot}3] \quad = 2 . \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

The above proposition is occasionally useful. It is used at least three times, in $*113{\cdot}66$ and $*120{\cdot}123{\cdot}472$.

$*110{\cdot}7{\cdot}71$ are required for proving $*110{\cdot}72$, and $*110{\cdot}72$ is used in $*117{\cdot}3$, which is a fundamental proposition in the theory of greater and less.

$*110{\cdot}7.\ \vdash : \beta \subset \alpha . \supset . (\exists \mu) . \mu \in \mathrm{NC} . \mathrm{Nc}`\alpha = \mathrm{Nc}`\beta +_c \mu$

Dem.

$\vdash . *24{\cdot}411{\cdot}21 . \supset \vdash : \mathrm{Hp} . \supset . \alpha = \beta \cup (\alpha - \beta) . \beta \cap (\alpha - \beta) = \Lambda .$
$[*110{\cdot}32] \quad \supset . \mathrm{Nc}`\alpha = \mathrm{Nc}`\beta +_c \mathrm{Nc}`(\alpha - \beta) : \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

$*110{\cdot}71.\ \vdash : (\exists \mu) . \mathrm{Nc}`\alpha = \mathrm{Nc}`\beta +_c \mu . \supset . (\exists \delta) . \delta \,\mathrm{sm}\, \beta . \delta \subset \alpha$

Dem.

$\vdash . *100{\cdot}3 . *110{\cdot}4 . \supset$
$\vdash : \mathrm{Nc}`\alpha = \mathrm{Nc}`\beta +_c \mu . \supset . \mu \in \mathrm{NC} - \iota`\Lambda \quad (1)$
$\vdash . *110{\cdot}3 . \supset \vdash : \mathrm{Nc}`\alpha = \mathrm{Nc}`\beta +_c \mathrm{Nc}`\gamma . \equiv . \mathrm{Nc}`\alpha = \mathrm{Nc}`(\beta + \gamma) .$
$[*100{\cdot}3{\cdot}31] \quad \supset . \alpha \,\mathrm{sm}\, (\beta + \gamma) .$
$[*73{\cdot}1] \quad \supset . (\exists R) . R \in 1 \to 1 . \mathrm{D}`R = \alpha . \mathrm{G}`R = \downarrow \Lambda_\gamma``\iota``\beta \cup \Lambda_\beta \downarrow ``\iota``\gamma .$
$[*37{\cdot}15] \quad \supset . (\exists R) . R \in 1 \to 1 . \downarrow \Lambda_\gamma``\iota``\beta \subset \mathrm{G}`R . R`` \downarrow \Lambda_\gamma``\iota``\beta \subset \alpha .$
$[*110{\cdot}12 . *73{\cdot}22] \supset . (\exists \delta) . \delta \subset \alpha . \delta \,\mathrm{sm}\, \beta \quad (2)$
$\vdash . (1) . (2) . \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

Figura 2.1: Le pagine 379 (vol. I) e 83 (vol. II) dei *Principia Mathematica*, nelle quali rispettivamente si anticipa e si dimostra l'identità $1 + 1 = 2$ con metodi esclusivamente logici. Si noti il commento degli autori: *"The above proposition is occasionally useful."*, "La proposizione di cui sopra è talvolta utile."

In altri termini, si può dire che ogni proprietà di oggetti di un dato tipo definisce un loro insieme che può rientrare esclusivamente del tipo successivo; quindi, la definizione degli insiemi di Russell e di Cantor è priva di significato.

Il grande debito verso i *Principia* consiste nell'aver introdotto un ampio sistema di notazioni attraverso il quale poter esprimere in modo generale tutte le proposizioni della matematica pura. Inoltre, nell'opera viene esplicitata tanta parte delle regole di inferenza formale fino ad allora usate indiscriminatamente e quasi inconsapevolmente nelle dimostrazioni matematiche.

Tuttavia, l'implementazione di questo sistema per la ridefinizione della matematica comportò in seguito un suo notevole aumento di complessità; tant'è che il tentativo, per quanto ammirevole, fu infine abbandonato.

2.2.2 La teoria di Zermelo-Fraenkel

Una seconda proposta avanzata per risolvere il *paradosso di Russell* consistette nel sistema di postulati dato da Ernst Zermelo (1871-1953), enunciato nel 1908 e successivamente ampliato da Abraham Fraenkel (1891-1965) − permettendo la definizione di insiemi infiniti e quindi la riduzione da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{N}$ − e da John von Neumann (1903-1953) − che introdusse l'*assioma di regolarità* −. La *teoria assiomatica degli insiemi*, spesso abbreviata come *ZF*, è oggi riconosciuta come la teoria degli insiemi per antonomasia.

In questa sezione, e in particolare nell'enunciazione degli assiomi, vengono utilizzate lettere minuscole ad indicare elementi, siano essi atomi o insiemi, e lettere maiuscole ad indicare classi di elementi; nelle formule in cui una classe svolge entrambi i ruoli la stessa lettera, minuscola e maiuscola, indica la medesima classe. L'unica eccezione è costituita dall'*assioma 9*, dove la distinzione tra elemento e classe è ambigua.

Assioma 2.2.1 (di estensionalità)**.** *Due insiemi sono uguali se e solo se hanno esattamente gli stessi elementi:* $A = B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$.

Assioma 2.2.2. *Esiste l'insieme vuoto:* $\exists\emptyset \mid \forall x(x \notin \emptyset)$.

Assioma 2.2.3 (di estrazione/di comprensione)**.** *Ogni proprietà che possa essere espressa nel linguaggio formale della teoria degli insiemi può essere usata per definire un insieme:* $\forall P\big(\exists A = P(a)\big)$.

Assioma 2.2.4. *Dati due insiemi, esiste l'insieme costituito dalla loro coppia non ordinata:* $\forall x, y(\exists A = \{x, y\})$.

Assioma 2.2.5. *L'unione di insiemi è essa stessa un insieme:* $\exists C \mid C = A \cup B$.

Assioma 2.2.6. *Dato un insieme, esiste sempre il suo insieme potenza, ovvero l'insieme di ogni suo sottoinsieme o parte:* $\forall A\big(\exists \mathcal{P}(A)\big)$.

Assioma 2.2.7 (dell'infinito)**.** *Esiste almeno un insieme infinito:* $\exists A \mid |A| \geq \aleph_0$.

Assioma 2.2.8 (di rimpiazzamento)**.** *L'immagine di un insieme mediante una funzione è un insieme:* $(x \in A) \wedge (f : A \mapsto B) \Rightarrow \exists y \mid y \in B$.

Assioma 2.2.9 (di fondazione/di regolarità)**.** *Nessun insieme appartiene a se stesso:* $\forall x(x \notin x)$.

Nella teoria, gli insiemi di Russell e di Cantor non esistono per l'ultimo assioma, analogo al *principio del circolo vizioso*; pertanto, non possono sussisterne le contraddizioni.

Nel 1904, quindi prima della formalizzazione della nuova teoria degli insiemi, Zermelo propose l'*assioma della scelta*:

Assioma 2.2.10 (della scelta)**.** *Data una classe infinita di insiemi non vuoti, esiste l'insieme a cui appartiene un elemento di ciascuno degli insiemi della classe:*

$$X = \{y \mid y \neq \emptyset\} \wedge |X| \geq \aleph_0 \Rightarrow \exists W = \{z \mid \forall i(z \in Y_i)\}\,.$$

Se si assume come assioma anche quest'ultimo, la teoria viene siglata *ZFC*, in cui 'C' sottintende a *choice*; la legittimità di introdurre questo assioma all'interno della teoria degli insiemi scatenò una vera e propria crisi nella crisi. Senza entrare nel dettaglio, questo principio permette di dimostrare alcuni risultati basilari dell'algebra e dell'analisi, in modo però non considerato legittimo da parte degli intuizionisti.

Per quanto potenti, *ZF* e *ZFC* – vi fu dimostrata l'indimostrabilità dell'*ipotesi del continuo*, che costituiva il *primo problema di Hilbert* – non diedero risposta al quesito sui fondamenti della matematica, concentrandosi nel divenire eredi della vecchia teoria degli insiemi, finalmente esorcizzata dai paradossi.

2.3 Soluzione della crisi

> ❝ *Come è noto, il progresso della matematica verso un'esattezza ogni volta maggiore ha fatto sì [...] che si possa arrivare a delle deduzioni seguendo alcune regole meccaniche.* ❞
>
> – Kurt Gödel

Kurt Gödel (1903-1978), logico matematico e convinto platonista di origine ceca, fu colui che riuscì a porre termine al trentennio della crisi dei fondamenti, in modo del tutto inaspettato dalla comunità matematica.

Al momento del suo intervento, la via logicista sembrava ormai abbandonata dopo l'insuccesso dei *Principia*, mentre l'intuizionismo, che riuscì a raccogliere adepti almeno fino al 1922, era stato ormai debellato in seguito all'imposizione del *programma di Hilbert* e dell'impegno di quest'ultimo, specie negli ultimi anni Venti, nell'estromettere Brouwer dalla direzione dei *Matematische Annalen*, prestigiosa rivista del settore.

Nel 1928 la vittoria del formalismo sul dibattito dei fondamenti sembrava ormai incontrastata. A Gödel spettò il compito di intonare il suo canto del cigno, il *teorema di completezza*, e decretarne la fine attraverso il *teorema di incompletezza*.

2.3.1 Il teorema di completezza

Gödel presentò la sua tesi di dottorato all'Università di Vienna nel 1930, lo stesso anno in cui venne pubblicata come articolo; tale tesi presentava il suo *teorema di completezza*:

Teorema 2.3.1 (di completezza)**.** *Ogni dimostrazione verificabile algoritmicamente può essere condotta utilizzando un numero finito di regole logiche:*

1. *Se vale* P*, vale '*$P \Rightarrow Q$*';*
2. *Se valgono '*$P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$*' e '*$P \Rightarrow Q$*', vale '*$P \Rightarrow R$*';*
3. *Se vale '*$\neg P \Rightarrow \neg Q$*', vale '*$P \Rightarrow Q$*';*
4. *Se vale '*$\forall x P(x)$*', vale* $P(n)$ *per ogni* n *numero;*
5. *Se vale '*$\forall x\big(P \Rightarrow Q(x)\big)$*', vale '*$P \Rightarrow \big(\forall x Q(x)\big)$*' per ogni* x *non appartenente a* P*;*

6. *Vale la proprietà riflessiva dell'uguaglianza:* $\forall x(x = x)$ *;*

7. *Vale la proprietà commutativa dell'uguaglianza:* $\forall x, y(x = y \Rightarrow y = x)$ *;*

8. *Vale la proprietà transitiva dell'uguaglianza:* $\forall x, y, z(x = y \wedge y = z \Rightarrow x = z)$ *;*

9. *Se due variabili sono uguali, possono essere sostituite l'una all'altra in ogni espressione numerica;*

10. *Se due variabili sono uguali, possono essere sostituite l'una all'altra in ogni enunciato;*

11. *Se valgono* P *e '*$P \Rightarrow Q$*', vale* Q *;*

12. *Se vale* $P(x)$ *per un* x *generico, vale '*$\forall x P(x)$*'.*

Le *regole logiche* sono enunciati universalmente validi che trascendono la specificità della branca della matematica in cui vengono utilizzate; sebbene il loro numero sia potenzialmente infinito, il *teorema di completezza* dimostra che ne sono sufficienti dodici per realizzare qualsiasi ragionamento.

L'importanza del *teorema di completezza* consta nell'offerta della solida base logica necessaria alla realizzazione del *programma di Hilbert*; tuttavia, non suscitò la dovuta attenzione − su di sé e sul logico che lo propose − nel panorama matematico internazionale, che lo considerò soltanto la prova della realizzabilità di un programma che era già considerato prossimo al pieno successo. Fu per questo tanto maggiore lo stupore quando Gödel stesso ne dimostrò la vanità.

2.3.2 I teoremi di incompletezza

Il 7 settembre 1930, durante la sessione plenaria del congresso di Königsberg dedicato alla definizione di un metodo univoco di dimostrazione delle verità matematiche, Gödel espose per la prima volta l'enunciato del suo *teorema di incompletezza*:

Teorema 2.3.2 (di incompletezza)**.** *Comunque si scelga un insieme di assiomi di una teoria che includa l'aritmetica e i cui enunciati siano verificabili algoritmicamente, esiste sempre almeno un enunciato vero non dimostrabile mediante gli assiomi stessi.*

Di seguito si riporta una dimostrazione affine a quella originale, in particolare seguendo la semplificazione apportata da John Barkley Rosser (1907–1989) nel 1936.

Il ragionamento di Gödel muove dalla considerazione del *paradosso di Richard*, che gli suggerì la possibilità di impiegare regole del calcolo di un sistema alle proposizioni riferite a quel sistema: se le proposizioni metamatematiche riferite ad un sistema formalizzato dell'aritmetica possono essere tradotte, mediante una rappresentazione, in proposizioni aritmetiche all'interno del sistema stesso, si ottiene infatti una notevole semplificazione delle dimostrazioni metamatematiche.
Facendo riferimento al proprio *teorema di completezza*, la dimostrazione è verificabile algoritmicamente e rispetta dunque i canoni delle dimostrazioni assolute.

La numerazione di Gödel

La dimostrazione del *teorema di incompletezza* necessita di un calcolo formalizzato, attraverso il quale si possano esprimere tutte le notazioni aritmetiche ordinarie e stabilirne le relazioni reciproche essenziali. Le specificità del calcolo sviluppato sono del tutto indifferenti ai fini della dimostrazione: nel suo articolo, Gödel utilizzò un adattamento del sistema dei *Principia*, ma avrebbe potuto usare anche *ZF* o qualunque altro sistema, a condizione naturalmente che includesse l'aritmetica.
Il metodo introdotto da Gödel consiste essenzialmente nell'assegnare ad ogni proposizione un numero che costituisce la sua rappresentazione metamatematica; questo metodo viene perciò definito *numerazione di Gödel*, o *gödelizzazione*, di cui si possono implementare più varianti. Queste devono in ogni caso essere in grado di stabilire una relazione biunivoca tra numeri e proposizioni.

Il calcolo dev'essere innanzitutto dotato di segni elementari, i quali sono primariamente suddivisi in costanti e variabili.
Il numero di costanti dipende dal modo in cui viene costruito il calcolo: Gödel ne usò sette, ma in questa sede se ne definiscono dieci per rendere più comprensibili la dimostrazione e le esemplificazioni del ragionamento. Le variabili possono a loro volta essere suddivise in tre sottocategorie. Si riassumono di seguito le caratteristiche dei segni elementari e la relativa numerazione qui usata.
Stabiliti i numeri corrispondenti ai segni elementari, possono quindi essere assegnati quelli corrispondenti alle formule da essi derivati.

Segno	Numero di Gödel	Significato	Regole
$\neg$	1	Non	Precede: v. proposizionali, v. predicative
$\vee$	2	Oppure	Tra: v. proposizionali, v. predicative
$\Rightarrow$	3	Implica	Tra: v. proposizionali, v. predicative
$\exists$	4	Esiste	Precede: v. generiche
$=$	5	Uguale a	Tra: v. generiche
0	6	Zero	Da trattare come v. numerica
S	7	Successore immediato di	Precede: v. numeriche
(	8	Segno d'interpunzione	Apre una formula
)	9	Segno d'interpunzione	Chiude una formula
$\mid$	10	Tale che	Tra: v. generiche

Tabella 2.1: Le dieci costanti usate nella versione della dimostrazione qui riportata.

Variabili	Simboli	Significato	Numeri di Gödel
Numeriche	$x, y, z, \ldots$	Numeri, espressioni numeriche	Primi maggiori di 10
Proposizionali	$p, q, r, \ldots$	Formule (proposizioni)	Quadrati dei primi maggiori di 10
Predicative	$P, Q, R, \ldots$	Predicati	Cubi dei primi maggiori di 10

Tabella 2.2: Le variabili usate nella dimostrazione.

La numerazione delle formule è stabilita fornendo ad ogni carattere un numero primo successivo ed elevando quel numero all'esponente corrispondente al codice del carattere interessato: il prodotto di tali potenze è il numero della formula. Naturalmente questo è permesso solo traducendo la formula in segni elementari o in formule precedentemente codificate. A titolo di esempio, si consideri l'espressione '$\exists x \mid x = \mathrm{S}\, y$', che si può tradurre come 'esiste il numero x che costituisce il successore immediato di y':

$$\begin{array}{ccccccc} \exists & x & \mid & x & = & \mathrm{S} & y \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & 11 & 10 & 11 & 5 & 7 & 13 \end{array}$$

All'espressione corrisponde quindi un numero di Gödel pari a:

$$m = 2^4 \cdot 3^{11} \cdot 5^{10} \cdot 7^{11} \cdot 11^5 \cdot 13^7 \cdot 17^{13} \approx 5.478 \times 10^{51}$$

Utilizzando queste regole, si ottiene una numerazione basata su una corrispondenza biunivoca tra ogni possibile espressione del calcolo e un sottoinsieme dei numeri naturali. Per ogni numero naturale è infatti possibile stabilire innanzitutto se esiste una formula ad esso associata e in secondo luogo qual è tale formula. Si veda il numero fattorizzabile come:

$$2^1 \cdot 3^4 \cdot 5^{11} \cdot 7^{10} \cdot 11^1 \cdot 13^{22} \approx 7.894 \times 10^{43}$$

Si nota che 22 è maggiore di 10 e non è primo; quindi, il numero dev'essere riscritto come:

$$2^1 \cdot 3^4 \cdot 5^{11} \cdot 7^{10} \cdot 11^1 \cdot 13^{11^2}$$

Analizzando gli esponenti si ottiene:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 4 & 11 & 10 & 1 & 11^2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \neg & \exists & x & \mid & \neg & p \end{array}$$

Si osserva quindi che la formula risultante ha significato secondo le regole del calcolo $-$ in particolare, è la definizione del quantificatore universale '$\forall x(p)$', a testimonianza del fatto che da segni elementari possono essere dedotti segni non elementari $-$. Allo stesso modo, si può notare come 1000 non rappresenti un numero di Gödel:

$$1000 = 2^3 \cdot 5^3$$

Poiché 3 non compare come termine, si potrebbe dedurre che la seconda posizione sia occupata da un segno che abbia come numero di Gödel 0; dato che tale segno non esiste $-$ altrimenti in ogni formula esisterebbero infiniti di questi segni $-$, non resta che concludere che non esiste nemmeno una formula associata a 1000.

Oltre che alle formule in sé, è possibile assegnare una numerazione propria delle dimostrazioni delle stesse, in modo analogo al precedente. Considerata una dimostrazione come una concatenazione di formule, il suo numero di Gödel si ottiene moltiplicando numeri primi successivi elevati ai numeri corrispondenti alle formule.

Aritmetizzazione della metamatematica

Una volta assegnata una numerazione univoca di ogni segno o formula contemplata dalla teoria, è necessario dimostrare un teorema che giustifichi il suo utilizzo nell'aritmetizzazione della metamatematica:

Teorema 2.3.3. *Tutte le proposizioni metamatematiche su proprietà strutturali delle espressioni del calcolo possono essere rappresentate dal calcolo stesso.*

Essenzialmente, poiché da ogni espressione del calcolo si possono dedurre una proposizione metamatematica e un numero di Gödel, l'aritmetizzazione è possibile se si può effettuare la costruzione di una proposizione sul numero di Gödel stesso. Si definisca a titolo di esempio un nuovo segno (non elementare):

Definizione 2.3.1. Se x e z sono entrambi numeri di Gödel, si definisce '$\mathrm{Dim}(x, z)$' la relazione puramente aritmetica che sussiste tra x e z qualora x rappresenti la sequenza di formule che dimostra la formula rappresentata da z.

Si noti che, pur stabilendo una relazione numerica ben definita tra i codici della formula e della dimostrazione associata, il segno '$\mathrm{Dim}(x, z)$' ha valore metamatematico. Di conseguenza, costituisce un esempio di proposizione metamatematica espressa con un formalismo aritmetico; il che non vale però da giustificazione formale all'utilizzo di tale formula.

Nel caso in esame è necessario, come da definizione, che x e z rappresentino non numeri generici, ma numeri di Gödel; in generale, dev'essere applicabile la *sostituzione* di variabili numeriche qualsiasi con dei codici, tali che solo numeri uguali a determinati codici verifichino una data relazione aritmetica. A questo punto si introduce nel formalismo una simbologia che permetta di effettuare tali sostituzioni; in particolare, un nuovo segno è essenziale alla dimostrazione del teorema:

Definizione 2.3.2. Si definisce '$\mathrm{sost}(y, 13, y)$' il numero di Gödel della formula ottenuta sostituendo, nella formula rappresentata dal numero di Gödel y, la variabile con numero di Gödel 13 con il numerale y.

Si chiarisce il concetto con un esempio. Facendo riferimento alla formula '$\exists x \mid x = \mathrm{S}\, y$', si è visto come questa abbia numero di Gödel $m \approx 5.478 \times 10^{51}$. Si definisce ora $r = \mathrm{sost}(m, 13, m)$: questo è il numero di Gödel associato all'espressione '$\exists x \mid x = \mathrm{S}\, m$'. In sintesi, il segno introdotto permette di sostituire a una variabile numerica di un'espressione il numero di Gödel dell'espressione stessa. Si osserva che il segno è definito anche nel caso in cui y non appaia nella formula presa in considerazione: infatti, si può dimostrare che in tal caso '$\mathrm{sost}(y, 13, y) = y$' sia considerando che, se la sostituzione fosse effettuata, la formula risulterebbe identica, sia considerando che la sostituzione non possa essere effettuata affatto.

Si noti che non è stato utilizzato il termine 'numero' per riferirsi ad y: questo ribadisce che l'intento non è quello di sostituire dei segni aritmetici, quali sono per l'esattezza i numeri naturali − incorrendo altrimenti nel *paradosso di Richard* −, ma 'numerali' che costituiscono la *rappresentazione metamatematica* di proposizioni, quindi formule, aritmetiche. Il questo modo, è debitamente giustificato l'utilizzo del formalismo aritmetico per trattare la metamatematica.

Dimostrazione

La dimostrazione effettiva del teorema si articola su cinque punti fondamentali. Si consideri la sua schematicità come prova sufficiente che la dimostrazione rispetta il metodo finitista di Hilbert.

1. Costruzione di una formula aritmetica G che rappresenta la proposizione 'La formula G non è dimostrabile'.
   (a) Si definisce '$\forall x\big(\neg\, \mathrm{Dim}(x, z)\big)$', che rappresenta la proposizione metamatematica 'Ad ogni x, x non è il numero di Gödel della dimostrazione della formula con numero di Gödel z'; questa è equivalente alla proposizione 'La formula con numero di Gödel z non è dimostrabile'.
   (b) Si sostituisce z con il numero di Gödel $\mathrm{sost}(y, 13, y)$ seguendo la regola di sostituzione (cfr. § 2.3.1, regola 9): la formula ottenuta è '$\forall x\big(\neg\, \mathrm{Dim}(x, \mathrm{sost}(y, 13, y))\big)$'. Analogamente alla precedente, la proposizione metamatematica associata si traduce come 'La formula con numero di Gödel $\mathrm{sost}(y, 13, y)$ non è dimostrabile'.
   (c) Si stabilisce n come numero di Gödel della formula '$\forall x\big(\neg\, \mathrm{Dim}(x, \mathrm{sost}(y, 13, y))\big)$'.
   (d) Si definisce la formula G come '$\forall x\big(\neg\, \mathrm{Dim}(x, \mathrm{sost}(n, 13, n))\big)$'.

(e) Si calcola il numero di Gödel di G, verificando che esso è pari a $\mathrm{sost}(n, 13, n)$; per farlo, è sufficiente considerare la definizione del segno introdotto precedentemente.
(f) Di conseguenza, per la definizione di G, la formula '$\forall x\big(\neg\,\mathrm{Dim}(x, \mathrm{sost}(n, 13, n))\big)$' rappresenta la proposizione metamatematica "$\forall x\big(\neg\,\mathrm{Dim}(x, \mathrm{sost}(n, 13, n))\big)$' non è dimostrabile'.
(g) Pertanto, G è una formula aritmetica che rappresenta la proposizione metamatematica 'G non è dimostrabile'.

2. Dimostrazione che G è dimostrabile se e solo se $\neg G$ è dimostrabile, oppure, nell'ipotesi in cui il calcolo sia consistente, che sono entrambe indimostrabili.

(a) Ipotesi: G è dimostrabile; di conseguenza, esiste k che costituisce il numero di Gödel della dimostrazione, ovvero '$\mathrm{Dim}(k, \mathrm{sost}(n, 13, n))$' è vera.
(b) Si ricorre quindi ad un teorema della teoria: 'La formula '$\mathrm{Dim}(x, y)$' è formalmente dimostrabile'.
(c) Di conseguenza, si può dimostrare che, nell'ipotesi in cui l'aritmetica sia inconsistente, se G è dimostrabile allora $\neg G$ è dimostrabile per lo stesso enunciato di G; similmente, si può dimostrare che se $\neg G$ è dimostrabile, allora G è dimostrabile. In alternativa, assunto per ipotesi che l'aritmetica sia consistente, G è indecidibile.

3. Dimostrazione della verità di G attraverso un ragionamento metamatematico.

(a) Si è già dimostrato che se gli assiomi dell'aritmetica sono consistenti, "$\forall x\big(\neg\,\mathrm{Dim}(x, \mathrm{sost}(n, 13, n))\big)$' non è dimostrabile', quindi 'G non è dimostrabile', è vera.
(b) La rappresentazione aritmetica dell'enunciato menzionato coincide con la stessa formula in essa contenuta, ovvero '$\forall x\big(\neg\,\mathrm{Dim}(x, \mathrm{sost}(n, 13, n))\big)$', quindi G.
(c) Il formalismo aritmetico è costruito in modo tale che a proposizioni metamatematiche vere corrispondano formule aritmetiche parimenti vere.
(d) Di conseguenza, G è vera poiché corrisponde ad una proposizione metamatematica vera.

4. Dimostrazione dell'incompletezza essenziale dell'aritmetica.

(a) Per definizione, una teoria è detta completa se dai suoi assiomi sono dimostrabili *tutti gli enunciati veritieri* della teoria stessa.
(b) Si è già dimostrato che la verità di G si può provare mediante un ragionamento metamatematico, ma non attraverso gli assiomi dell'aritmetica (se si assume consistente).
(c) Pertanto, se l'aritmetica è consistente, è incompleta.

Questa constatazione è valida indipendentemente dall'aggiunta di un assioma *ad hoc*[3] per dimostrare G: in modo analogo a come è stato ricavato l'enunciato G, è sempre possibile ricondursi a un enunciato G', indecidibile secondo la teoria, la cui verità può essere dimostrata in altro modo.

Questo risultato è noto come *primo teorema di incompletezza.*

5. Costruzione di una formula A che rappresenti 'L'aritmetica è coerente' e dimostrazione della sua indimostrabilità.

(a) La proposizione 'L'aritmetica è coerente' equivale a 'Esiste almeno una formula dell'aritmetica che non è dimostrabile'; ovvero, l'enunciato di A è '$\exists y \mid \forall x\big(\neg\,\mathrm{Dim}(x, y)\big)$'.
(b) Costruzione della proposizione 'Se l'aritmetica è coerente, essa è incompleta'. Poiché G è vera e non dimostrabile dalla teoria, equivale a 'L'aritmetica è incompleta'; pertanto, la formula cercata può essere scritta come '$A \Rightarrow G$', esteso '$\exists y \mid \forall x\big(\neg\,\mathrm{Dim}(x, y)\big) \Rightarrow \forall x\big(\neg\,\mathrm{Dim}(x, \mathrm{sost}(n, 13, n))\big)$'.
(c) Ipotesi: A è dimostrabile.
(d) Per la regola di separazione (cfr. § 2.3.1, regola 11), poiché anche '$A \Rightarrow G$' è dimostrabile, G è dimostrabile.
(e) Si è però già dimostrato che, se l'aritmetica è consistente, G è indecidibile.
(f) Di conseguenza, A non è dimostrabile.

Si è quindi infine dimostrato che se l'aritmetica è consistente, la sua coerenza non può essere dimostrata attraverso un ragionamento metamatematico dotato di una rappresentazione nel formalismo dell'aritmetica stessa.

Questo risultato è noto come *secondo teorema di incompletezza.*

[3] È da specificare che Hilbert, al pari di Frege (cfr. Frege, 1976, p. 52 e sgg.) e presumibilmente di ogni altro esperto del settore, considerava invalida l'aggiunta di assiomi in corso d'opera nella costruzione di una teoria, per ovvie ragioni.

Conseguenze

Si riassumono le principali conseguenze dei teoremi di Gödel.

- Qualsiasi sistema in cui si possa sviluppare l'aritmetica è essenzialmente incompleto: dato un numero finito di assiomi qualsiasi esiste sempre almeno un enunciato aritmetico vero non deducibile dagli assiomi stessi;
- È impossibile dare una dimostrazione metamatematica della coerenza di un sistema sufficientemente ampio da contenere in esso l'aritmetica, a meno che non si utilizzi una dimostrazione fondata su regole di inferenza essenzialmente diverse dalle regole di trasformazione usate per la dimostrazione degli altri teoremi del sistema.

È da notare però che la dimostrazione si avvale di due ipotesi particolari, più volte ribadite per evitare di incorrere in perplessità:

- La dimostrazione deve essere *assoluta*, quindi avvenire secondo un metodo finitista e utilizzando il medesimo formalismo della teoria di cui si cerca di provare la coerenza;
- Nella specifica dimostrazione dell'incompletezza dell'aritmetica, si assume che l'aritmetica stessa sia *coerente*, o *consistente*: ciò significa che i suoi enunciati non sono in contraddizione.

Rinunciare alla seconda ipotesi per dimostrare in altro modo la completezza dell'aritmetica risulta controproducente: possedendo degli assiomi contraddittori si possono dimostrare infatti tutti gli enunciati veritieri della teoria, ma anche quelli non veritieri, quindi sia i teoremi che i non teoremi; un compromesso inammissibile.

La prima ipotesi è invece sacrificabile: Gödel non provò che la dimostrazione sia impossibile in generale, ma solo con questa specifica ipotesi; per questo a partire dai teoremi di incompletezza egli stesso e altri matematici dell'epoca si concentrarono su una prova che si avvalesse di altri metodi.

Il *teorema di incompletezza*, così come venne annunciato nel 1930, decretò a un tempo la definitiva chiusura della crisi dei fondamenti ed il fallimento del programma formalista.

Capitolo 3

Epilogo

3.1 La matematica di un trentennio

> ❝ *Secondo me un matematico, in quanto matematico, non si deve preoccupare dei concetti filosofici, opinione questa espressa anche da parecchi filosofi.* ❞
>
> – Henri Lebesgue

Il giorno successivo all'annuncio del (primo) *teorema di incompletezza*, Hilbert, in un messaggio radiofonico, ribadì il motto *"Wir müssen wissen, wir werden wissen"*, persuaso della vittoria incontrastata del metodo assiomatico e inconsapevole del suo ormai ineluttabile fallimento. L'articolo di Gödel riportante l'enunciato e la dimostrazione dei teoremi, *Sulle proposizioni formalmente indecidibili dei 'Principia Mathematica' e sistemi affini*, fu pubblicato l'anno seguente, nel 1931. La sua chiarezza non diede mai adito alcuno a dubbi circa la sua correttezza.

La coerenza dell'aritmetica fu in seguito dimostrata in ambito metamatematico da Gerhard Gentzen nel 1936; tale dimostrazione non può essere però proiettata nel formalismo aritmetico e non è finitista nel senso di Hilbert, ricorrendo alla teoria cantoriana degli ordinali transfiniti. Per questa ragione non può essere considerata una dimostrazione assoluta, confermando indirettamente la tesi di Gödel.

Nel corso degli anni '30 venne mossa una critica nei confronti della crisi dei fondamenti e dalla teoria degli insiemi che le diede origine, considerando la loro unica utilità quella di aver permesso la costruzione di insiemi infiniti e di un linguaggio formalizzato per l'espressione di nuovi concetti astratti. In particolare, Nicolas Bourbaki, nome collettivo assunto da un gruppo di matematici a maggioranza francese, si impegnò a riformulare la matematica in modo utile al professionista del settore, relegando i risultati di un trentennio all'interesse dei soli logici.

Il vero campo di applicazione delle nuove idee fu però, inaspettatamente, l'informatica: nel 1933 Alonzo Church (1903-1995) fondò il *lambda calcolo*, abbreviato in λ-*calcolo*, focalizzato, anziché sul concetto di insieme, su quello di funzione. Si presenta di seguito la nascita della *teoria della computabilità* a partire dai contributi di Church e Alan Turing (1912-1954).

3.2 λ-calcolo e macchina-a

> ❝ *Il ragionamento matematico può essere considerato piuttosto schematicamente come l'esercizio di una combinazione di due capacità, che possiamo chiamare ingegno e intuito.* ❞
>
> – Alan Turing

Come si è detto, il λ-*calcolo* assume come concetti primitivi le funzioni; volendo instaurare un paragone:

Insiemi	$\leftrightarrow$	Funzioni
Elementi degli insiemi	$\leftrightarrow$	Argomenti delle funzioni
Appartenenza di un elemento a un insieme	$\leftrightarrow$	Applicazione di una funzione a un argomento
Definizione dell'insieme dagli elementi	$\leftrightarrow$	Definizione della funzione dai valori

La grande differenza tra i due sistemi corrisponde all'ultimo punto dello schema: mentre la definizione degli insiemi attraverso i propri elementi conduce ai paradossi già incontrati, quella delle funzioni dalle relazioni tra valori non conduce a contraddizione alcuna. In particolare, nel λ-*calcolo* è dimostrabile il seguente teorema:

Teorema 3.2.1. *Il* λ-calcolo *è consistente.*

La dimostrazione, fornita da Church e Rosser nel 1936, permise di fare ciò che con gli strumenti della logica era ormai dimostrabilmente impossibile: affermare la coerenza di un sistema attraverso il suo stesso formalismo. La differenza consta essenzialmente nel fatto che la negazione non è ammessa dalla suddetta teoria, mentre lo è nella logica e quindi nella teoria degli insiemi: dato $f(x)$, $\neg f(x)$ è privo di significato.

Nel 1928, durante il IV Congresso Internazionale della Matematica di Bologna, Hilbert ripropose l'*Entscheidungsproblem*, o *problema della decisione*, che verteva sulla decidibilità della matematica: dato un enunciato e un sistema di assiomi, è possibile scrivere un algoritmo in grado di stabilire la verità dell'enunciato? La risposta negativa non era scontata, dopo Gödel, soltanto per la *logica di primo ordine*, che era stata dimostrata essere completa; la soluzione definitiva fu provata indipendentemente nel 1936 da Church e da Turing.

La risoluzione di quest'ultimo si fondava sulla dimostrazione dell'equivalenza tra la questione posta da Hilbert e l'*halting problem*, o *problema della terminazione*, che consisteva nel determinare se un dato *programma* termina la propria esecuzione di fronte a un dato argomento. L'*halting problem* era stato dimostrato indecidibile attraverso un metodo basato sull'argomento diagonale: si consideri un programma `Halt` che ha per parametri un altro programma e un dato di input e che, se il dato porta alla terminazione del programma, restituisce `vero`, altrimenti restituisce `falso`; Turing osservò che con questa premessa è possibile costruire un programma indecidibile:

```
P(input)
    if Halt(input,input)=false
        then return true
        else return false
```

Questa non è altro che la scrittura in pseudo-codice dell'equivalente computazionale dell'insieme di Russell: l'esecuzione di `Halt(P,P)` non è in grado di restituire un risultato. Per Turing, questo programma valeva a dimostrazione del fatto che esistono più teoremi che *macchine-a*.

La *macchina-a*, in cui 'a' abbrevia *automatica* e meglio nota attualmente come *di Turing*, è un modello astratto elaborato nel 1934 composto da un nastro infinito suddiviso in celle, ciascuna contenente un simbolo di uno specifico alfabeto − si consideri $A = \{0, 1\}$ −, e da una testina di lettura/scrittura che può assumere un numero finito di stati $Q = \{E_0, E_1, E_2, \ldots, E_n\}$. Ad ogni occorrenza, la testina:

1. Legge il simbolo della cella;
2. In funzione del simbolo letto e del proprio stato, scrive sulla cella un simbolo (uguale o diverso);
3. In funzione degli stessi parametri, esegue uno spostamento sul nastro (a destra o a sinistra);
4. In funzione degli stessi parametri, aggiorna il proprio stato.

Il problema insito in questo tipo di macchina è che possiede un unico programma; detto in altro modo, ogni *macchina-a* si riferisce ad una specifica *tabella delle azioni* − definita anche *funzione di transizione* e indicata con il simbolo Δ − che determina per ogni stato le azioni da svolgere in relazione al simbolo letto. Turing introdusse quindi la *macchina-u*, in cui 'u' sottintende a *universale*, dispositivo in grado di simulare qualunque altra *macchina-a*.

Si può giungere ora alla soluzione dell'*Entscheidungsproblem*:

Teorema 3.2.2 (di Church/di Turing)**.** *Non esiste un algoritmo in grado di discriminare, ad ogni occorrenza, un enunciato vero da un enunciato falso all'interno della logica predicativa.*

Questo teorema, complementare a quello di Gödel, si può riassumere constatando che il processo atto a verificare una data tesi non è sempre esprimibile per mezzo di un algoritmo; pone inoltre in una relazione di equivalenza il λ-*calcolo* e la *macchina-a*, formalmente dimostrata da Turing nel 1937.

Ai risolutori del problema è inoltre dovuta la tesi che permise di definire il concetto di *computabilità*:

Tesi 3.2.1 (di Church-Turing)**.** *Qualsiasi enunciato dimostrabile in un tempo finito può essere verificato mediante un algoritmo; la classe dei problemi risolvibili attraverso una* macchina-u *sono problemi aventi soluzione esprimibile algoritmicamente.*

Sostanzialmente, questa sostiene che ad ogni problema risolvibile in un tempo finito, o *computabile*, è associato un algoritmo in grado di stabilirne la soluzione esatta. La *tesi di Church-Turing* è la base su cui poggia la *teoria della computazione*, che studia la capacità degli algoritmi di risolvere determinati problemi.

Capitolo 4

Altri fondamenti

4.1 I fondamenti ad arte

❝ *La matematica possiede non solo la verità, ma anche la bellezza suprema, una bellezza fredda e austera, come quella di una scultura.* ❞

– Bertrand Russell

Durante la crisi dei fondamenti diverse intuizioni hanno permesso in seguito la realizzazione di opere che trascendono il confine, spesso labile, tra matematica e arte. In particolare, molte creazioni del grafico olandese Mauritius Cornelius Escher (1898-1972) sono focalizzate sulla *tassellatura* delle superfici, sulle geometrie non euclidee e sugli *strani anelli*, e per questo sono a tutt'oggi apprezzate da molti matematici, per quanto lo stesso Escher sostenesse di non riflettere sulla matematica insita nelle proprie opere nella loro fase di progettazione.

4.1.1 Il problema del fregio

Quello della tassellatura non è altro che un problema di origine classica, nato dal *problema del fregio*, il quale consisteva nel determinare di quante forme diverse può essere interamente piastrellato il piano con figure geometriche identiche o ricorrenti, operazione particolarmente utile nella fattispecie per riempire geometricamente la superficie del fregio di un tempio.

Tra le più originali soluzioni proposte sono le pareti mosaicate dell'*Alhambra* di Grenada, realizzate insieme al palazzo durante il dominio arabo dell'Andalusia. In queste composizioni la struttura profondamente geometrica del disegno viene parzialmente celata dalla decorazione.

Nel Novecento il tema della tassellatura riaffiorò per mezzo della matematica in seguito all'enunciazione del *diciottesimo problema di Hilbert*, il quale chiedeva se fosse possibile la tassellatura completa di un piano in maniera *non simmetrica*, ovvero utilizzando un *modulo*, quindi un tipo di piastrella, la cui superficie fosse priva di assi di simmetria; la risposta positiva fu trovata nel 1935 ed in più occasioni illustrata da Escher.

Un altro quesito, posto successivamente, verteva sulla possibilità di piastrellare completamente in modo *non periodico* una superficie, quindi componendo una tassellatura non invariante per traslazione: preso un numero

Figura 4.1: La tassellatura triangolare di una parete dell'*Alhambra* di Grenada e il relativo schema geometrico.

Figura 4.2: M.C. Escher, *Cavalluccio marino*, 1937-1938, matita, inchiostro e acquerelli; *Aquila*, 1938, matita e acquerelli. Tassellature artistiche complete asimmetriche con schemi rispettivamente romboidale e rettangolare.

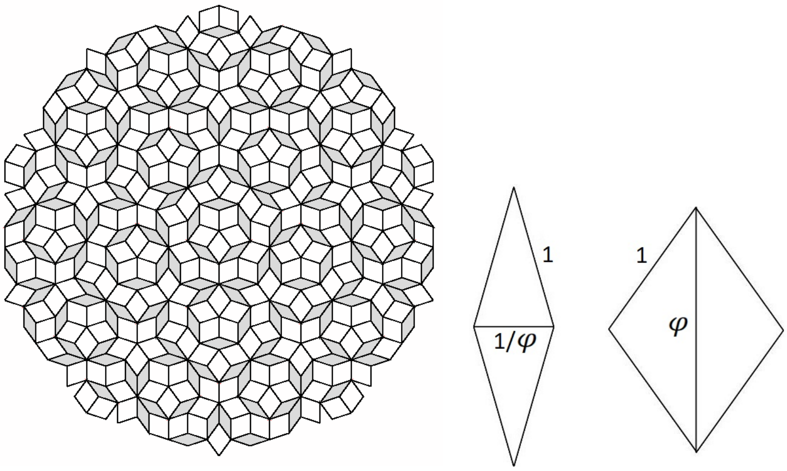


Figura 4.3: La tassellatura completa aperiodica di Penrose. È stato verificato che per superficie $S \to \infty$ il rapporto tra il numero di rombi di area maggiore e quelli di area minore tende al rapporto aureo $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.61803$, ricorrente in natura e nell'arte greca oltre che nella stessa costruzione dei rombi.

arbitrario di moduli consecutivi, la loro traslazione secondo due vettori non paralleli non coincide, in almeno un caso, con un'altra regione. Roger Penrose (1931) ricavò nel 1974 un metodo per piastrellare un piano alternando rombi di due specie, diversi per l'ampiezza degli angoli interni: di $\frac{3}{5}\pi$ e $\frac{2}{5}\pi$ quello di area maggiore, di $\frac{4}{5}\pi$ e $\frac{1}{5}\pi$ quello di area minore. L'esempio è notevole perché mostra una simmetria di rotazione pentagonale irrealizzabile nelle pavimentazioni planari periodiche.

Finora il problema si è limitato alla geometria euclidea; tuttavia, è possibile effettuare la tassellatura di superfici non euclidee, che può essere visualizzata attraverso la proiezione di tali superfici su un piano. In particolare, il *disco di Poincaré* può essere tassellato attraverso triangoli che sono congruenti non nella geometria euclidea – poiché allontanandosi dal centro essi si riducono sino ad avere dimensione infinitesima al bordo –, ma nella geometria iperbolica. Anche in questo contesto Escher produsse esempi di tassellature artistiche; d'altra parte, la geometria proiettiva di superfici curve, vagamente simile a livello visivo alla rappresentazione di superfici iperboliche, fu uno dei suoi interessi principali, come si può osservare in *Mano con sfera riflettente* (1935) e *Tre sfere II* (1946).

4.1.2 Strani anelli

Un altro tema affrontato in molte opere di Escher è quello degli strani anelli: sistemi apparentemente lineari che possono essere percorsi in un senso o nell'opposto ma che immancabilmente tornano al punto di partenza.

Figura 4.4: M.C. Escher, *Limite circolare IV*, 1960, xilografia. Tassellatura artistica di una superficie iperbolica.

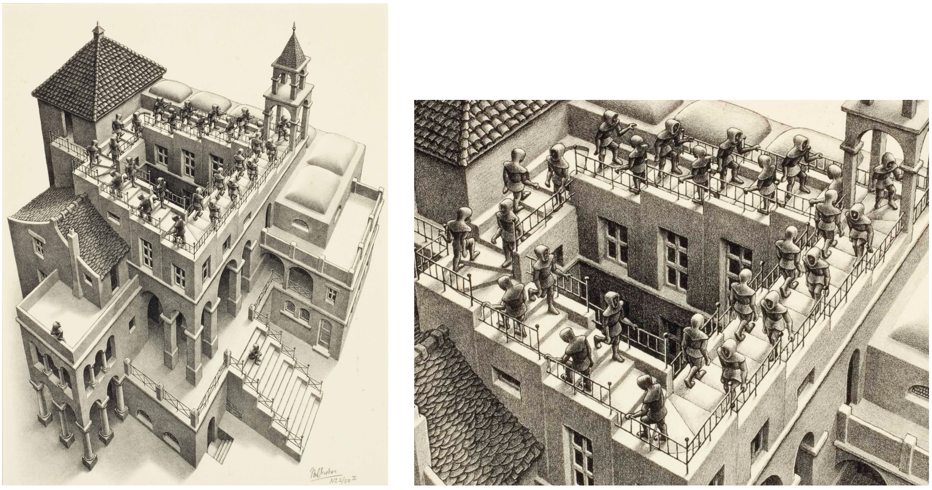


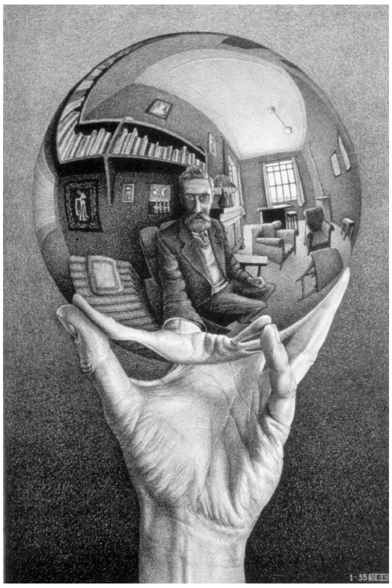
Figura 4.5: M.C. Escher, *Salita e discesa*, 1960, litografia. Visione d'insieme e particolare della scala.

Questo è permesso da una serie di trasformazioni dell'immagine che paiono essere innocue e persino plausibili se prese singolarmente, ma che nel loro complesso risultano assurde ed inconcepibili.

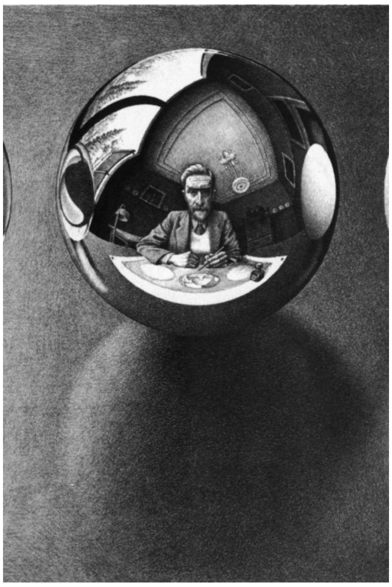
Uno strano anello molto lungo è percorso in *Metamorfosi III* (1967-1968), in cui le trasformazioni, di carattere geometrico-compositivo, non pongono nemmeno l'interrogativo sulla realizzabilità dell'opera nella realtà. L'anello più stretto costruito da Escher è quello di *Galleria di stampe* (1956), che disegna una situazione evidentemente impossibile, testimoniata dal disco vuoto che funge da raccordo tra parti altrimenti inconciliabili. Un ulteriore strano anello, a due componenti, è in *Mani che disegnano*, riportato nel frontespizio.

Un'altra opera tra le più emblematiche delle costruzioni impossibili è *Salita e discesa*: gli uomini che percorrono la scala, salendo o scendendo, rimangono in realtà nello stesso anello. Questa costruzione riprende un modello ideato da Penrose − peraltro disegnatore del *triangolo impossibile* − nel 1958; come si può osservare, un braccio della rampa è più corto degli altri e ciò permette di ingannare la prospettiva e costruire una scala eternamente ascendente o discendente. Questo nello specifico costituisce un esempio costruzioni possibili nella loro rappresentazione bidimensionale, ma non nella realtà tridimensionale: come non può esistere un triangolo con i tre angoli retti (nella geometria euclidea, che descrive la realtà "normale"), così una scala dai gradini piani che sia nel suo complesso planare.

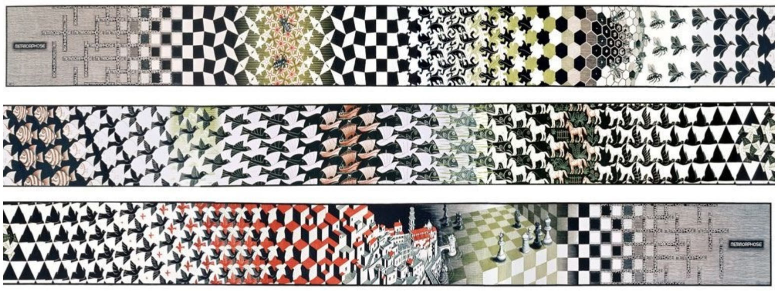
Il tema degli strani anelli, che consiste in nient'altro che nel metodo di autoreferenza, ha pervaso la crisi dei fondamenti dal *paradosso di Russell* alla risoluzione di Gödel: nello specifico, quest'ultimo fu colui che riuscì ad aggirare la caduta nello strano anello che era divenuta la matematica.



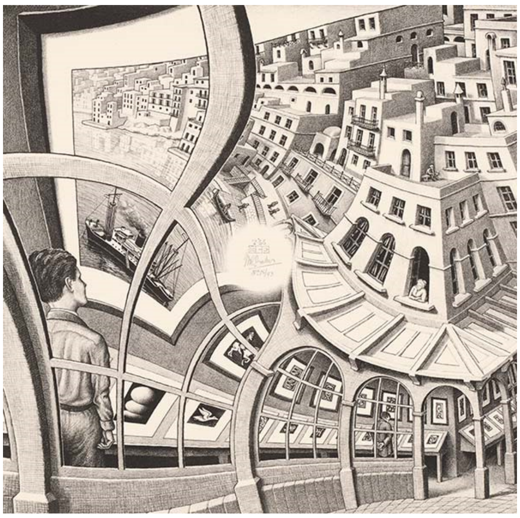
(a) Mano con sfera riflettente.



(b) Tre sfere II. Particolare.



(c) Metamorfosi III. Affiancamento di tre sezioni contigue dell'opera.



(d) Galleria di stampe.

Figura 4.6: Galleria delle opere di M.C. Escher citate nella sezione.

4.2 I fondamenti linguistici

❝ *La matematica pura è quella scienza in cui non sappiamo di cosa stiamo parlando o se ciò che stiamo dicendo è vero.* ❞

– Bertrand Russell

"I matematici concordano sì fra loro per quanto riguarda la forma esteriore dei loro enunciati, ma non sui pensieri che a essi si collegano [...] Ciò che l'un matematico dimostra non è la stessa cosa che l'altro intende coi medesimi segni. Solo apparentemente abbiamo un vasto patrimonio comune di verità matematiche."

"Abbiamo usato, io e voi, la stessa lingua, le stesse parole. Ma che colpa abbiamo, io e voi, se le parole, per sé, sono vuote? Vuote, caro mio. E voi le riempite del senso vostro, nel dirmele; e io nell'accoglierle, inevitabilmente, le riempio del senso mio. Abbiamo creduto d'intenderci; non ci siamo intesi affatto."

Questi passi, citazioni rispettivamente di Frege[1] e di Luigi Pirandello[2] (1867-1936) creano inconsapevolmente[3] un parallellismo tra logica matematica, letteratura e filosofia; la questione linguistica è al centro di questi tre ambiti proprio nel periodo della crisi dei fondamenti.

Dal punto di vista matematico, la questione della definizione assunse un ruolo di primaria importanza, portando ai diversi tentativi di completa formalizzazione della matematica stessa: era necessario separare i simboli dal loro significato in lingua corrente, poiché le accezioni di uno stesso termine tradotto in due diverse lingue sono evidentemente differenti. La stessa parola *Mengenlehre*, per quanto correttamente tradotta in 'teoria dei gruppi', dev'essere riconsiderata in relazione al fatto che il termine italiano 'gruppo' indica nello specifico ambito matematico un oggetto diverso da quello indicato da 'insieme'; in più il termine tedesco si riferisce nello specifico la teoria di Cantor: per questo una traduzione semanticamente corretta è 'teoria degli insiemi transfiniti'. Si spiega quindi la necessità della formulazione di sistemi quali quello del *Begriffsschift* e dei *Principia*: una volta stabilito un formalismo attraverso il quale esprimere concetti matematici e corredato di regole di costruzione, due matematici che operano in esso non possono che trovarsi d'accordo sulla validità di un ragionamento, senza incorrere in ambiguità alcuna.

Nella corrispondenza tra Frege e Hilbert si ha un esempio evidente delle difficoltà riscontrate nella comprensione reciproca attraverso l'utilizzo della lingua naturale, per quanto fossero entrambi di madrelingua tedesca. In particolare, Frege criticò l'uso a suo dire inappropriato di termini come 'assioma', 'definizione', 'vero', 'esistente' nei *Fondamenti della geometria* dell'omologo; Hilbert sosteneva invece che alcune distinzioni nell'utilizzo di simili termini, imprescindibili secondo il primo, fossero superflue di fronte all'unica necessità che gli enunciati fossero coerenti con il sistema in esame. Essendo il tema particolarmente caro a Frege, questi lo affrontò anche nella corrispondenza con Peano, da cui è tratto il brano di introduzione.

Dalla questione linguistica ebbero origine, oltre alle discussioni sopracitate, anche alcuni paradossi affini all'*antinomia di Russell*, come lo stesso *paradosso del bugiardo*, di cui esiste una versione a due componenti:

La frase seguente è falsa.
La frase precedente è vera.

Questo esempio rivela la presenza di uno strano anello, che rasenta l'immagine raffigurata in *Mani che disegnano*; analogamente, il *paradosso di Grelling* chiede se il termine 'eterologico', ovvero che non descrive se stesso – come 'monosillabico' non è una parola monosillabica – sia eterologico o meno. Per risolvere la contraddizione dovrebbe essere introdotta una *teoria dei tipi* linguistica attraverso la costruzione di *metalinguaggi* successivi, del tutto inappropriata intuitivamente.

La necessità di chiarezza nel linguaggio, quindi nella comunicazione tra due soggetti, assunse una dimensione esistenziale in Pirandello: non solo due vocabolari di lingue diverse danno accezioni diverse a termini che indicano apparentemente lo stesso oggetto o la stessa idea, ma anche vocabolari soggettivi, strettamente personali e individuali. Esprimere qualunque cosa è strutturalmente impossibile, appunto perché le parole non possiedono significato in sé, ma lo assumono se viene loro attribuito da un io pensante, che lo interpreta sulla base delle proprie esperienze e conoscenze pregresse. Il dramma della solitudine inalienabile dalla natura umana risiede in

[1] Dalla lettera XXXIV/11 a Peano, ca. 1896-1903 (Frege, 1976, p. 156)
[2] (Pirandello, 1926, p. 29)
[3] Anche ignorando il fatto che la probabilità che i due autori conoscessero gli scritti reciproci è intuitivamente remota, questa eventualità è da escludere definitivamente da un punto di vista filologico per i paragrafi in esame, in base al confronto tra le date di scrittura e di pubblicazione dell'epistolario e del romanzo.

questa stessa impossibilità di esprimersi e veicolare informazioni che giungano al destinatario non corrotte dal suo stesso pensiero.

Questa relazione risulta evidente in un altro passo[4] di *Uno, nessuno e centomila* (1926), romanzo che può essere considerato come la *summa* della concezione pirandelliana del mondo e dell'esistenza, a cui appartiene il brano di introduzione alla sezione.

> "Cadeva ogni orgoglio.
> Vedere le cose con occhi che non potevano sapere come gli altri occhi intanto le vedevano.
> Parlare per non intendersi.
> Non valeva più nulla essere per sé qualche cosa.
> E nulla più era vero, se niente per sé era vero. Ciascuno per conto suo l'assumeva come tale e se ne appropriava per riempire comunque la sua solitudine e far consistere in qualche modo, giorno per giorno, la sua vita."

In queste parole è riassunta la riflessione che il protagonista Vitangelo Moscarda attribuisce all'amica della moglie, Anna Rosa, nel momento in cui sembra aver compreso appieno il pensiero di lui e delle immense conseguenze da esso scaturite. Il rendersi conto della propria inviolabile solitudine la conduce in seguito, affascinata e terrorizzata al tempo stesso, a tentare invano di ucciderlo e a determinare così il definitivo abbandono da parte di Vitangelo della vita civile.

Il tema del linguaggio e della comunicazione è affrontato però non solo in *Uno, nessuno e centomila*, come si può evidenziare attraverso una citazione tratta dai *Sei personaggi in cerca d'autore*[5] (1921):

> "Ma se è tutto qui il male! Nelle parole! Abbiamo tutti dentro un mondo di cose! E come possiamo intenderci, signore, se nelle parole ch'io dico metto il senso e il valore delle cose come sono dentro di me; mentre chi le ascolta, inevitabilmente le assume col senso e col valore che hanno per sé, del mondo com'egli l'ha dentro?"

Paragrafi simili possono essere letti in altre opere teatrali dello stesso periodo, come la commedia *Ciascuno a suo modo* (1924) – altro capitolo, insieme al sopracitato, della trilogia del *teatro nel teatro* – e il dramma *Enrico IV* (1922). Da ciò si evince la grande importanza attribuita a questa tematica da Pirandello, che paradossalmente utilizzò parole per esprimere l'incapacità delle parole di descrivere una realtà intrinsecamente soggettiva; un paradosso questa volta ineliminabile, poiché il linguaggio – sia esso scritto, orale, grafico o artistico in generale – è per definizione il *medium* attraverso cui avviene la comunicazione e quindi la trasmissione della conoscenza.

La questione linguistica e della definizione appartiene alla storia della filosofia sin dai suoi primordi: da questa muove l'intero pensiero di Socrate, il cui obiettivo era quello di ricavare i concetti universali da risposte particolari alla domanda '*ti estì?*', seguendo il metodo induttivo. Il tentativo di Socrate nasceva dalla caduta annunciata dai sofisti, e in particolare da Gorgia, dell'identità tra essere, pensiero e linguaggio. Tale identità, e quindi la coincidenza tra i piani ontologico, gnoseologico e semantico della realtà, era stata precedentemente stabilita da Parmenide, maestro di Zenone e fondatore della scuola di Elea, ovvero delle *filosofie dell'uno*; la sua intuizione derivava a sua volta dalla riflessione di Eraclito sul significato del termine '*logos*', interpretabile ancora come 'legge', quindi necessità e conseguentemente essere, 'ragione', quindi pensiero, e 'discorso', quindi linguaggio.

Elaborazioni di questa portata, possibili agli albori della filosofia nell'arco dei secoli VI e V a.C., si innestarono sull'origine pratica della parola: questa era necessaria a identificare oggetti reali, non gli oggetti del pensiero ai quali in seguito si estese. L'invenzione della scrittura nel III millennio a.C. non lasciava spazio ad ambiguità: per ogni segno un oggetto diverso, nella qualità o nella quantità, e quindi anche numericamente. In un tale sistema le sfumature di significato non solo erano insignificanti, come ora si potrebbe pensare per alcune coppie di sinonimi o di un termine tradotto in lingue diverse, ma non esistevano affatto.

Attualmente è però innegabile che il decorso verso una sempre maggiore astrazione dei concetti, e quindi delle parole ad essi associate, ha dotato queste ultime di una cromia talmente definita a livello infinitesimale da non poter più essere univocamente trattate nel loro complesso. Si può dunque considerare esaurito il ruolo storico della parola, annientato dalla stessa astrazione implicita all'atto della sua nascita.

[4](Pirandello, 1926, p. 132)
[5](Pirandello, 1921, p. 140)

Bibliografia

P. Odifreddi, *La matematica del Novecento*, Piccola Biblioteca Einaudi, Torino 2000.

E.T. Bell, *I grandi matematici*, Sansoni Editore, Firenze 1997. 1ª ed. originale Simon & Schuster, New York 1937.

G. Frege, *Alle origini della nuova logica. Carteggio scientifico con Hilbert, Husserl, Peano, Russell, Vailati e altri*, a cura di G. Gabriel, H. Hermes, F. Kambartel, C. Thiel, A. Veraart, edizione italiana a cura di Corrado Mangione, Editore Boringhieri, Torino 1983. 1ª ed. originale Felix Meiner, Amburgo 1976.

E. Nagel, J.R. Newman, *La prova di Gödel*, Editore Boringhieri, Torino 1976. 1ª ed. originale New York University Press, New York 1958.

D.R. Hofstadter, *Gödel, Escher, Bach: un'Eterna Ghirlanda Brillante*, a cura di Giuseppe Trautteur, Adelphi Edizioni, Milano 1984. 1ª ed. originale Basic Books, 1979.

The M.C. Escher Company B.V., "M.C. Escher - The Official Website", `http://www.mcescher.com/`

L. Pirandello, *Uno, nessuno e centomila*, a cura di Marziano Guglielminetti, Arnoldo Mondadori Editore, Milano 1992. 1ª ed. originale Bemporad, 1926.

L. Pirandello, *Sei personaggi in cerca d'autore*, in *Maschere nude*, a cura di Sergio Campailla, Newton Compton Editori, Roma 2016. 1ª rappresentazione dell'opera Roma 1921.

Della collezione "Grandi idee della scienza. Uomini e scoperte per capire il nostro mondo", RBA Italia, Milano 2016. 1ª ed. RBA Coleccionables, Spagna 2012:

G.E. Piñeiro, *Cantor. L'infinito in matematica*;

C.M.M. Casado, *Hilbert. Le basi della matematica*;

G.E. Piñeiro, *Gödel. I teoremi di incompletezza*;

R. Lahoz-Beltra, *Turing. La computazione.*

Dei testi scolastici:

F. Cioffi, G. Luppi, A. Vigorelli, E. Zanette, A. Bianchi, S. O'Brien, *Il discorso filosofico*, voll. 1, 3a, 3b, Pearson.

Ringraziamenti

Per materiale concernente i problemi dell'infinito in matematica, prof. A. Zanardo dell'Università di Padova, conferenza tenuta il 27 novembre 2017.

Per le citazioni a § 1.2.2 e § 4.2, prof. M.A. Deledicq dell'Università di Potsdam, conferenza tenuta durante il congresso "MATh.en.JEANS" 2018 di Berlino, 13 marzo 2018.

Per il lavoro di revisione, prof.ssa I. Marin, docente di italiano dell'istituto.

Un ringraziamento speciale al prof. F. Breda, docente di matematica dell'istituto, per il supporto durante la stesura e per l'aver messo a disposizione materiale concernente la geometria, i fondamenti della stessa e della matematica, oltreché dispense universitarie sul tema.