ISTITUTO MARCO CASAGRANDE PIEVE DI SOLIGO

SEZIONE LICEO SCIENTIFICO

Alunno: Arghittu Nicola

Classe: 5° A

I FONDAMENTI DELLA MATEMATICA

APPROFONDIMENTO ESAME DI MATURITA'

ANNO SCOLASTICO 2016/2017

INTRODUZIONE

Partendo da un'analisi dei fondamenti della geometria delle origini (esposta per la prima volta in maniera rigorosa nell'opera *Gli Elementi* di Euclide, IV-III sec. a.C.), osserviamo come una teoria matematica non possa definirsi assoluta (come si riteneva la geometria euclidea), ma piuttosto un punto di vista preciso e assiomatico non completo della realtà. È ciò che fa sorgere per secoli un problema sulla coerenza delle teorie (ovvero quella proprietà per la quale queste non portino a contraddizioni al loro interno) e che spinge i matematici a ricercare per diverse vie una serie di principi stabili che possano assicurare questa coerenza. Ma tale visione è anche la chiave intuitiva che porta alla nascita delle geometrie non-euclidee e alla loro rappresentazione su modelli reali; queste hanno dato il via a scoperte scientifiche quali la fisica quantistica e la relatività generale e hanno trovato nel mondo delle arti (oltre a quello delle tecnologie) delle applicazioni inaspettate. Ma soprattutto hanno mostrato come la matematica sia in primis creatività e immaginazione.

Il testo seguente esprime i pensieri e le scoperte di diversi matematici, filosofi e studiosi. Dai fondamenti della geometria di Euclide passiamo infatti ad analizzare quelli sviluppati (oltre duemila anni dopo) in chiave "più moderna" e più solida da David Hilbert (1862-1943). Per il tedesco questo è solo il punto di partenza che gli permette di spostare il problema dell'assolutezza della geometria ad un problema dell'assolutezza dell'aritmetica e della logica-matematica. Arrivare a questo implica l'esprimere qualsiasi ente (punto, retta o piano), qualsiasi forma o curva e qualsiasi solido con un oggetto matematico (in relazione biunivoca con i singoli oggetti geometrici); ed esprimere qualsiasi numero, qualsiasi operazione e qualsiasi funzione come un procedimento logico preciso. Sorge dunque la questione del formulare una logica non contradditoria: nascono diverse scuole a tal proposito e ognuna di queste sviluppa una propria proposta. In particolare quella di Hilbert (riassunta nel "programma hilbertiano") non vuole abbandonare la speranza di formulare una teoria assoluta sulla quale fondare qualsiasi altra teoria. Finché un tal Kurt Gödel (1906-1978) non infligge un colpo d'arresto a questa strada, dimostrando la sua impraticabilità.

Partecipare al progetto *Math-en-Jeans* insieme con un gruppo di ragazzi della mia scuola ha contribuito fortemente a coltivare questo mio interesse per l'argomento. Condividere un pomeriggio settimanalmente a cercare di costruire insieme una teoria, una geometria particolare e una sua rappresentazione su un modello è stato come trasformare la matematica da un qualcosa di formulato e già creato, ad un qualcosa da immaginare e da inventare.

1.L’ASSIOMATIZZAZIONE DELLA GEOMETRIA

1.1.L’ORIGINE DELLA MATEMATICA

La matematica ha origini lontane nel tempo; già Sumeri, Egizi, Fenici e Cinesi sviluppano concetti quali quello di sistema sessagesimale (utilizzato ancora attualmente per la misurazione degli angoli e del tempo), quello di numero intero e quello di misura delle lunghezze. La scoperta di alcuni documenti babilonesi porta poi alla luce qualcosa di molto avanzato: un sistema per la risoluzione di particolari problemi specifici sulla base di modelli logici (già costruiti probabilmente inconsciamente); è ciò che potremmo definire come una serie di intuizioni parziali che astrae situazioni empiriche, creando degli abbozzi di formula generale. Ma ciò che caratterizza un enorme passo in avanti nella nascita della matematica è l’atteggiamento del tutto cosciente (sviluppato dai Greci), volto a voler organizzare in sequenze logiche, riconosciute assolutamente valide da chiunque, una qualsiasi dimostrazione matematica. È questo l’atteggiamento (tra il VI e il IV sec. a.C.) di filosofi/matematici quali Talete, Pitagora e Eudosso.

E non è forse un caso che con la nascita della filosofia avvenga anche la nascita della metodica matematica: la filosofia di quest’epoca è incentrata sulla ricerca degli elementi primi di tutte le cose e la matematica ellenica è anch’essa una ricerca di un modello generale al quale si possa ricondurre la realtà; con Pitagora si arriva addirittura a considerare il principio di numero come entità assoluta della realtà, fondamento della materia e governatrice di essa. Con Archimede, Euclide e Apollonio si giunge in seguito all’idea di dimostrazione che ancora oggi manteniamo quasi totalmente: quel processo logico-deduttivo (dal gr. *apodissi*) in virtù del quale si garantisce la validità di un enunciato. Aristotele introduce teoreticamente questa nozione (di dimostrazione) come un particolare sillogismo che produce logicamente una conoscenza scientifica partendo da dei principi primi assoluti e veri. Sarà proprio l’attribuire l’assolutezza e la verità a questi principi che differenzierà questa definizione da quella della matematica assiomatica e dalla visione di Hilbert. La filosofia di Platone infine, fondata sul concetto di idea, non può che essere interessata alla matematica i cui enti sono essi stessi delle idee astratte concretizzate nella fisica del nostro mondo.

1.2.LA GEOMETRIA EUCLIDEA

Analizzate velocemente queste visioni filosofiche della matematica, passiamo ora ad analizzare l'opera che ha costituito il modello dei matematici per secoli e secoli e ha registrato le leggi della geometria che è chiamata da questo momento in poi euclidea: gli *Elementi di Euclide*.

Euclide è un matematico vissuto tra il IV e il III sec. a.C. ad Alessandria d'Egitto. Quel poco che conosciamo di lui e ciò che Proclo (vissuto nel V sec. d.C.) ci racconta: un uomo apprezzato per la sua riservatezza, ma soprattutto un uomo saggio e rigoroso. Un aneddoto della sua vita ce lo mostra infatti aver risposto alla richiesta del re riguardo all'esistenza di un mezzo più breve degli *Elementi* per imparare la geometria, con la frase: "In geometria non esistono vie regie".

In effetti gli *Elementi* sono un'opera complessivamente lunga, articolata in 13 libri: l'autore ha raccolto in essi tutti i risultati ottenuti dai matematici precedenti, articolandoli in modo organico, con metodi e argomentazioni rigorosi e puramente sviluppati in un piano teorico. I contenuti dei diversi libri sono i seguenti:

- *Libro I*. Si apre con l'esposizione di tre serie di principi[1] (alcune definizioni, i cinque postulati e le nozioni comuni) e continua col trattare le proprietà fondamentali dei poligoni e dei cerchi.
- *Libri II-IV.* Si continua la trattazione delle proprietà dei poligoni e dei cerchi (uguaglianza dei triangoli, teoria delle parallele, equivalenza dei poligoni, quadratura di un poligono, …).
- *Libro V.* Si sviluppa la teoria delle proporzioni tra grandezze.
- *Libro VI*. Si sviluppa la teoria delle proporzioni tra poligoni (e quindi delle similitudini).
- *Libri VII-IX*. Si espone la teoria dei numeri interi, espressi come dei segmenti e il prodotto tra due come un rettangolo; si dimostra l'infinità dei numeri primi.
- *Libro X*. Si classificano la commensurabilità e l'incommensurabilità tra le grandezze; si distingue tra commensurabili in lunghezza e commensurabili in potenza [2].
- *Libri XI-XIII*. Si trattano la geometria solida, il metodo dell'esaustione[3] (già introdotto da Eudusso) e i poliedri regolari.

[1] In seguito approfondiremo ed analizzeremo questi.
[2] Due misure sono commensurabili in grandezza se è possibile trovare un'unità che possa indicare n e m volte (con n e m naturali) entrambe. Due misure sono commensurabili in potenza se i quadrati costituiti da esse sono commensurabili in lunghezza. Ad esempio il lato e la diagonale di un quadrato sono incommensurabili in lunghezza e commensurabili in potenza.
[3] È un metodo utilizzato per il calcolo di aree e volumi; esso consiste nel considerare successioni di figure inscritte e circoscritte alla figura in esame sempre più "precise" con la figura data, la cui misura risulta l'elemento di separazione delle misure di quelle figure che la approssimano per difetto e per eccesso.

Come accennato nei contenuti dei libri, i principi della geometria di Euclide si sviluppano in tre serie: *definizioni, postulati e nozioni comuni*.

Con *definizioni* il matematico intende esprimere i concetti base e primitivi, già noti a chiunque perché propri della mente umana e della realtà (è una visione platonica che concepisce l'esistenza di idee assolute anche per la matematica): è quindi comprensibile come molte di queste definizioni di per sé non "definiscano", ma piuttosto diano una descrizione intuitiva di termini basilari, i quali noi oggi chiameremmo concetti primitivi. Ecco l'elenco delle *definizioni* presenti negli *Elementi*:

1. Un punto è ciò che non ha parti.
2. Una linea è una lunghezza senza larghezza.
3. Gli estremi di una linea sono punti.
4. Una retta è una linea che giace ugualmente rispetto ai punti su di essa.
5. Una superficie è ciò che ha lunghezza e larghezza.
6. Gli estremi di una superficie sono linee.
7. Una superficie piana è quella che giace[4] ugualmente rispetto alle rette su di essa.
8. Un angolo piano è l'inclusione reciproca di due linee in un piano le quali si incontrino e non giacciano in linea retta (si escludono gli angoli piatti).
9. Quando le linee che comprendono l'angolo sono rette, l'angolo è detto rettilineo.
10. Quando una retta innalzata a partire da un'altra retta forma con essa angoli adiacenti e uguali fra loro, ciascuno dei due angoli è retto, e la retta si dice perpendicolare a quella su cui si è innalzata.
11. Si dice ottuso l'angolo maggiore di un angolo retto.
12. Si dice acuto l'angolo minore di un angolo retto.
13. Si dice termine ciò che è estremo di qualche cosa.
14. Si dice figura ciò che è compreso da uno o più termini.

[4] Si noti come nell'elenco delle definizioni compaiano termini quali parte, lunghezza, larghezza, giacenza, … tutti concetti mai definiti precedentemente. Ciò chiarisce maggiormente quello inteso precedentemente con l'espressione "alcune definizioni non definiscono".

15. Si dice cerchio una figura piana delimitata da un'unica linea tale che tutte le rette che terminano su di essa a partire da un medesimo punto fra quelli interni alla figura siano uguali fra loro.

16. Quel punto si chiama centro del cerchio.

17. Si dice diametro del cerchio una retta condotta per il centro e terminata da ambedue le parti dalla circonferenza del cerchio, la quale retta taglia anche il centro a metà.

18. Si dice semicerchio la figura compresa dal diametro e dalla circonferenza da esso tagliata, e centro del semicerchio è quello stesso che è anche centro del cerchio.

19. Si dice rettilinee le figure delimitate da rette, vale a dire: figure trilatere quelle comprese da tre rette, quelle quadrilatere comprese da quattro rette e multi-latere quelle comprese da più di quattro rette.

20. Si dice triangolo equilatero la figura trilatera che ha i tre lati uguali, isoscele quella che ha due lati uguali e scaleno quello che ha i tre lati disuguali.

21. Si dice triangolo rettangolo la figura trilatera che ha un angolo retto, triangolo ottusangolo quella che ha un angolo ottuso e acutangolo quello che ha i tre angoli acuti.

22. Si dice quadrato la figura quadrilatera che ha i lati uguali e gli angoli retti.

23. Si dicono parallele rette giacenti nello stesso piano che, prolungate illimitatamente in entrambe le direzioni, non si incontrino fra loro da nessuna delle due parti.

Euclide poi enuncia i *cinque postulati* della sua teoria (che differiscono secondo una distinzione di Aristotele dalle *nozioni comuni* per l'ambito geometrico a cui si riferiscono, opposto all'ambito più generale, matematico delle nozioni). Per noi un postulato è "verità certa, da accettarsi come tale". Ma Aristotele non ritiene corretto ciò: secondo il filosofo, esso non è "da accettarsi come vero", ma è corretto perché *a posteriori* concorda con la realtà. Ecco l'elenco dei *cinque postulati* di Euclide presenti negli *Elementi*:

1. È possibile condurre una linea retta da un qualsiasi punto ad ogni altro punto.

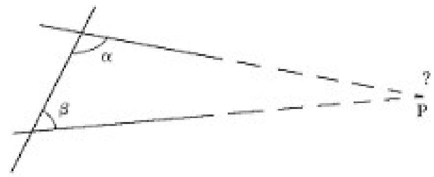
2. È possibile prolungare illimitatamente una retta finita in linea retta.

3. È possibile descrivere un cerchio con qualsiasi centro e distanza (raggio) qualsiasi.

4. Tutti gli angoli retti sono uguali fra loro.

5. Se, in un piano, una retta, intersecando due altre rette, forma con esse, da una medesima parte, angoli interni la cui somma è minore di due angoli retti, allora queste due rette, se illimitatamente prolungate, finiscono con l'incontrarsi dalla parte detta. (figura 1)

Figura 1



Analizzandoli si nota immediatamente la maggiore complessità che presenta il 5° postulato rispetto ai primi quattro. Esso è poco intuitivo e non sempre rappresentabile per costruzione: il punto P tende (all'ampliarsi di α e β) ad "uscire dal foglio". La sua evidenza è quindi messa in dubbio: ciò rende questo postulato bersaglio di critiche e di studi, non accettabile per alcuni e per altri un probabile teorema dimostrabile con i primi quattro postulati (come vedremo in seguito). Lo stesso Euclide tende ad evitarne l'utilizzo il più possibile[5], consapevole della sua "stranezza". Una sua caratteristica, oltre alla non intuitività, è il porre la condizione di parallelismo in negativo: l'enunciato mostra le condizioni per le quali due rette *non* siano parallele e non le condizioni per le quali due rette lo siano. Nonostante ciò, è il postulato passato alla storia con il nome di postulato delle parallele e enunciato comunemente nella forma (che in seguito dimostreremo essere equivalente): *per un punto esterno ad una retta situata in un piano, passa un'unica retta parallela alla retta data (cioè non secante alla retta data)*.

Come già accennato, l'attrazione dei matematici per questo postulato è enorme, ma tutti i tentativi di ricondurlo ad un teorema dimostrabile sono un fallimento. Un fallimento questo che permette però di dimostrare l'indipendenza di questo postulato dai primi quattro e porta alla nascita delle geometrie non euclidee: nessuno ha dimostrato l'esistenza della parallela passante per un punto di una retta data, così che la fantasia e l'immaginazione di alcuni matematici brillanti ha navigato per mondi nei quali questa parallela non esiste e in altri nei quali questa è solamente una delle infinite possibili. Fantasia e immaginazione, mondi che sembrano non appartenere alla nostra realtà: per la visione classica, mantenuta per tutto il medioevo e per i secoli successivi questo è vero; ma, come vedremo in seguito, le scoperte ad opera di Eugenio Beltrami (1835-1900) e di Felix Klein (1849-1925) di modelli che realizzano le geometrie non euclidee all'interno della geometria euclidea, mostrano come queste geometrie stesse possano rappresentare punti di vista della nostra realtà. Attualmente si ritiene si debba di volta in volta utilizzare il tipo di geometria più adatto al problema che si sta analizzando.

Successivamente ai *postulati* nel *I libro* degli *Elementi* compaiono le *nozioni comuni*. Esse esprimono alcune proprietà dell'uguaglianza e della congruenza. Ecco l'elenco delle principali *nozioni comuni*:

- Cose che sono uguali a una stessa cosa sono uguali anche tra loro.

---

[5] Si noti che le prime 28 proposizioni non necessitano di esso per essere dimostrate.

- E se a cose uguali si aggiungono cose uguali, le somme sono uguali.
- E se a cose uguali si sottraggono cose uguali, i resti sono uguali.
- E le cose che coincidono fra loro sono fra loro uguali.
- E il tutto è maggiore della parte.

Conclusa la serie dei fondamenti della sua geometria[6], Euclide inizia a creare la geometria stessa, ovvero a dimostrarne dei teoremi (da lui chiamati con il termine *proposizioni*).

1.3.TENTATIVI DI DIMOSTRAZIONE DEL 5° POSTULATO

Abbiamo accennato al tentativo di alcuni matematici nel corso della storia di ricercare una dimostrazione del 5° postulato di Euclide; ma sulla base di quali considerazioni questi studiosi intraprendono questa strada? Essi fanno propria l'ipotesi "il 5° postulato è un teorema". Effettivamente questa ipotesi non è infondata: la formulazione del postulato (del tipo "se…allora") è simile alla formulazione utilizzata tipicamente nei teoremi (che appunto deducono una tesi -allora- da una serie di ipotesi -se-). Si cerca quindi di utilizzare i *termini*, i quattro *postulati* restanti, le *nozioni* e *proposizioni* 1-28 e 31 (indipendenti dal 5° postulato) per arrivare ad una possibile dimostrazione di questo ipotetico teorema. Questi studiosi intraprendono però strade senza uscita. Alcuni tentativi risultano comunque di notevole interesse e tutti nel complesso indispensabili al superamento di questa visione assoluta della geometria. Vediamone alcuni.

Già un certo Posidonio (135-51 a.C.) tenta di superare il problema del 5° postulato. Egli cambia la definizione di rette parallele[7]: per Posidonio due rette parallele sono due rette che giacendo sullo stesso piano e venendo prolungate indefinitamente, mantengono sempre la stessa distanza tra loro. È però questa una definizione implicata dal postulato di Euclide: dimostrare il 5° postulato partendo da tale ipotesi (nuova definizione di parallele) è partire dal postulato stesso per dimostrarlo. La sua dimostrazione non ha portato alla risoluzione del problema, ma all'equivalenza[8] dell'enunciato "se due rette sono parallele, allora sono equidistanti" all'enunciato originario del 5° postulato.

---

[6] Il sistema di Euclide non è del tutto completo: mancano dei principi quali il Postulato di Archimede, il postulato di continuità della retta e i postulati riguardanti l'ordine sulla retta. Saranno punti inseriti nella formulazione di Hilbert della geometria euclidea.

[7] Definizione 23 degli Elementi: *parallele sono due rette che, essendo sullo stesso piano e venendo prolungate indefinitamente da entrambe le parti, non si incontrano fra loro in nessuna di queste.*

[8] Due enunciati si definiscono equivalenti se è possibile ricavare uno dall'altro e viceversa.

Proclo (411-485 d.C., già citato in precedenza come colui che ci racconta di Euclide) nel libro *Commento al primo libro di Euclide* scrive: «[il 5° postulato] deve essere assolutamente cancellato dai postulati perché è un teorema...». Il tentativo del matematico di dimostrare ciò parte da un'intuizione interessante: ipotizzando il teorema "dati in un piano una retta e un punto esterno ad essa, per il punto passa al più una parallela alla retta data", ovvero ipotizzando di poter in seguito dimostrare l'unicità di una parallela per un punto, Proclo riesce a trasformare il 5° postulato in un teorema conseguente a questa ipotesi[9]. Il problema si trasferisce quindi nel riuscire a dimostrare il teorema ipotizzato: operazione impossibile senza l'utilizzo del postulato di Euclide[10]. Di conseguenza si entra in un circolo "vizioso" che non produce altro che la consapevolezza dell'equivalenza dell'enunciato di Proclo (chiamato quindi postulato e non teorema dell'unicità della parallela) all'enunciato di Euclide.

Altri tentativi sono compiuti da matematici arabi come Nasir Al-Din Al-Tusi (1201-1274 d.C.) e Omar Khayyam (1048-1131 d.C.). In ognuno di questi tentativi di dimostrazione, e nei successivi, viene implicitamente dato per vero un assioma equivalente a quello delle parallele, rendendo vana la dimostrazione.

Tra il XVIII ed il XIX secolo, in seguito al fallimento di tutti i tentativi effettuati fino ad allora nel cercare una dimostrazione diretta del postulato, gli studiosi provano ad assumere per validi i primi quattro postulati e, sostituendo il V Postulato con la sua negazione, a creare delle geometrie alternative, sperando così di arrivare ad una contraddizione. Vediamo a proposito il tentativo di Girolamo Saccheri (1667-1733) che, nel libro *Euclide ab omni naevo vindicatus*[11], tenta appunto la via della dimostrazione per assurdo[12] per arrivare a definire teorema il 5° postulato. L'enunciato del teorema che Saccheri intende utilizzare per arrivare a dimostrare che il 5° postulato di Euclide potrebbe essere quindi il seguente: "Se, in un piano, una retta, intersecando due altre rette, forma con esse, da una medesima parte, angoli interni la cui somma è minore di due angoli retti, allora queste due rette, se illimitatamente prolungate, finiscono col *non* incontrarsi dalla parte detta." Per dimostrare l'esistenza di un assurdo il matematico costruisce il così detto "rettangolo di Saccheri": un quadrilatero birettangolo isoscele (figura 2), ottenuto innalzando da una basa AB due segmenti uguali AD e BC, perpendicolari ad essa, e unendo i punti C e D. Essendo la figura un birettangolo isoscele, gli angoli alla sommità $\hat{C}$ e D si dimostra che sono congruenti. L' unione dei punti medi M e N (rispettivamente di CD e di AB), crea un segmento MN che si può dimostrare essere perpendicolare sia ad AB sia a CD. Da questa figura e da queste dimostrazioni egli ricava tre ipotesi:

---

[9] Siano r una retta, P un punto del piano esterno ad essa e PQ una trasversale alla retta r che formi con essa un angolo α. Si tracci per P la retta s che formi con la retta PQ un angolo β tale che $\alpha + \beta < 2R$. Si tracci ora la retta PR che formi con PQ un angolo γ tale che $\alpha + \gamma = 2R$, così che PR sia per una proposizione di Euclide parallela a r. Per l'ipotesi di Proclo essa è inoltre l'unica e s deve dunque incontrare r in un punto (dimostrando il 5° postulato).

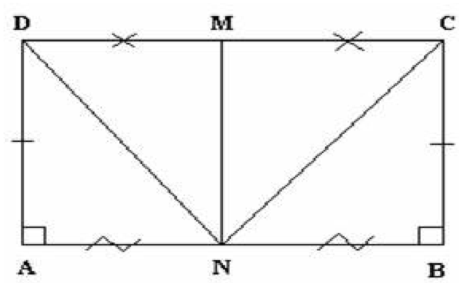
[10] Siano r una retta, P un punto del piano esterno ad essa e PQ una trasversale alla retta r che formi con essa un angolo α. Si tracci la retta PR che formi con PQ un angolo γ tale che $\alpha + \gamma = 2R$, così che PR sia per una proposizione di Euclide parallela a r. Solamente il 5° postulato dimostra a questo punto l'unicità di PR.

[11] Trad.: *Euclide riscattato da ogni difetto*.

[12] Il procedimento per assurdo consiste nel prendere per vero il teorema contrario a quello che si vuole dimostrare e, partendo da questo teorema, di cercare di arrivare appunto ad un assurdo (cosa che darebbe valenza al teorema di partenza ed escluderebbe il suo contrario).

- Gli angoli Ĉ e D sono acuti (ipotesi dell'angolo acuto).
- Gli angoli Ĉ e D sono retti (ipotesi dell'angolo retto).
- Gli angoli Ĉ e D sono ottusi (ipotesi dell'angolo ottuso).

Figura 2



Considerare valido il teorema contrario al postulato di Euclide implica la non validità dell'ipotesi dell'angolo retto. Se Saccheri riuscisse quindi a dimostrare che ognuna delle due ipotesi rimanenti avrebbe condotto ad un assurdo, allora il 5° postulato di Euclide diventerebbe un teorema dimostrato per assurdo. Dimostra che l'ipotesi dell'angolo ottuso conduce ad una contraddizione: se vera porta al 5° postulato che, come detto, implica l'ipotesi dell'angolo retto. Saccheri scrive a questo punto: "L'ipotesi dell'angolo ottuso è completamente falsa, perché distrugge se stessa". È questa una deduzione corretta, mentre l'esclusione dell'ipotesi dell'angolo acuto non lo è: questa in realtà non porta ad alcun assurdo nella geometria che prende come vera la negazione del 5°postulato di Euclide. Insomma, se Saccheri si accorgesse di ciò, probabilmente arriverebbe con largo anticipo a definire una nuova geometria (appunto non-euclidea), denominata in seguito geometria iperbolica. In questa (che analizzeremo in seguito), come prevede l'ipotesi dell'angolo acuto, (anche se ci può apparire come qualcosa di controintuitivo) esistono almeno due rette parallele ad una retta data passanti per lo stesso punto (esterno alla retta).

Come abbiamo visto numerosi sono i tentativi, da parte di matematici e non solo, di dimostrare il V Postulato a partire dagli altri quattro assiomi, o di riformularlo In modo che la sua verità apparisse più evidente, ma invano. Il fallimento di tali tentativi fa così diffondere l'idea che il postulato euclideo non sia dimostrabile. Il primo ad avanzare tale ipotesi è lo studente di Gottinga G.C. Klugel che, assistito dal suo relatore di tesi Kastner, esamina 28 tentativi di dimostrazione del postulato (tra i quali quello di Saccheri) dimostrandone i punti fallaci. Egli non riesce però a dimostrare la sua affermazione, che trova tuttavia ampio consenso nel mondo matematico e che contribuisce a dare il via alla nascita di geometrie non-euclidee. Queste riscontrano tuttavia inizialmente numerosi ostacoli sia in ambito culturale (ed in particolar modo nella filosofia kantiana che allora sta prendendo piede), sia in ambito matematico, per i risultati apparentemente paradossali cui porta. Ma, come sottolinea Gauss in una lettera ad un amico del 12 luglio 1831: *"...la geometria non euclidea non contiene assolutamente nulla di contradditorio, sebbene molti dei suoi risultati debbano sulle prime essere ritenuti paradossali; tuttavia scambiare ciò per una contraddizione sarebbe unicamente un'illusione, provocata dal la vecchia abitudine a considerare la geometria euclidea strettamente vera"*.

1.4.LA CLASSIFICAZIONE DI KLEIN DELLE GEOMETRIE NON EUCLIDEE

“La rivoluzione non euclidea è una rivoluzione scientifica, importante quanto la rivoluzione copernicana in astronomia, la rivoluzione darwiniana in biologia, o quanto la rivoluzione newtoniana o quella del secolo XX in fisica, rivoluzione che è però di gran lunga meno nota perché i suoi effetti sono stati più indiretti: una rivoluzione nata dal l'invenzione di un'alternativa al la tradizionale geometria euclidea."

Trudeau, R., *La rivoluzione non euclidea*

Abbiamo visto alcuni dei più celebri tentativi falliti di dimostrazione del 5° postulato di Euclide. Come già accennato, questi tentativi hanno portato alla nascita delle geometrie non euclidee, ovvero quelle geometrie che partono da una serie di postulati differenti da quelli di Euclide. Prima di vedere le principali tra queste, analizziamone una classificazione fatta dal matematico Felix Klein (1849-1925). Nel 1872 Klein, in un discorso pronunciato all’università di Erlangen (intitolato *Vergleichende Batrachtungen uber neuere geometrische Forschungen* [13]), presenta questa classificazione basata sulle proprietà formali e metriche delle diverse teorie: si tratta del così chiamato *Programma di Erlangen* (*Erlanger Programme*). È un programma che cerca l’unificazione di tutte le geometrie, cercando di associare a ciascuna di esse un gruppo. Con gruppo si intende un concetto matematico abbastanza generico composto da un insieme di elementi e da una o più operazioni che legano questi[14]. Gli elementi possono variare da numeri (aritmetica), a punti (geometria) o a trasformazioni (algebra e geometria); le operazioni possono variare da aritmetiche (come l’adizione e la moltiplicazione), a geometriche (come la traslazione e la rotazione) o ad algebriche (ovvero composte da un due operazioni qualunque).

Ogni geometria viene espressa da Klein come l’insieme delle proprietà che rimangono invarianti in un gruppo che la rappresenta. Siano M un insieme qualunque, G un gruppo di trasformazioni di M. Conveniamo di chiamare M spazio, i suoi elementi punti e un qualunque insieme di punti, figura. Diremo che la figura A è equivalente alla figura B se esiste una trasformazione di G che manda A su B, cioè:

$A \sim B$ se $\exists\ \phi \in G\ (\phi: M \to M) \mid \phi(A) = B$

Klein allora chiama geometrica ogni proprietà delle figure dello spazio M e ogni grandezza legata ad una figura che resti invariata per tutte le trasformazioni del gruppo G, vale a dire che sia comune a tutte le figure equivalenti. Il sistema di proposizioni relative alle proprietà delle figure e

[13] Trad.: *Esame comparato delle ricerche recenti in geometria.*
[14] Un gruppo per essere definito tale deve contenere la proprietà associativa e deve avere un elemento neutro, una sola unità e, di conseguenza, l’inverso di ogni elemento (che deve essere unico).

delle grandezze invarianti per tutte le trasformazioni del gruppo G si chiama la geometria del gruppo G. Ecco la sua classificazione:

Proprietà	Geometria			
	Sferica	Ellittica	Parabolica (euclidea)	Iperbolica (Lobacevskij e Bolyai)
Assiomi euclidei modificati	1°, 2° e 5°	2° e 5°	nessuno	5°
Parallele per un punto ad una retta	Nessuna		Una	Infinite
Somma degli angoli interni di un triangolo	>2R		=2R	<2R
Triangoli simili non congruenti	No		Sì	No
Teorema di Pitagora	No		Sì	No

1.5.LE PRINCIPALI GEOMETRIE NON EUCLIDEE

1.5.1.LA GEOMETRIA DI LOBAČEVSKIJ E BOLYAI

È la geometria che Saccheri non vede (quella che corrisponde all'ipotesi dell'angolo acuto): la geometria che nega il 5° postulato di Euclide. Questa geometria (intrapresa già da Gauss e da Bolyai) raggiunge una formulazione completa con Lobacevskij. Nel 1817 Gauss abbandona i suoi tentativi di dimostrazione del 5° postulato e decide di dedicarsi allo studio di questa geometria. Non pubblica alcun libro a riguardo, ma i suoi lavori ci arrivano comunque da appunti e lettere scritti dal matematico. L'ultimo appunto attribuitogli risale al 1832: in quell'anno infatti Gauss entra in contatto con una prima pubblicazione di un'opera sulla geometria non euclidea composta da Jànos Bolyai. Gauss conosce il padre di Jànos (con il quale studia e condivide l'interesse per i tentativi di dimostrazione del postulato di Euclide), che non vuole che il figlio intraprenda la strada del matematico; in una lettera (del 1820) infatti scrive:

"Dovresti fuggirla come una relazione sfrenata e dissoluta; può privarti del tuo tempo, della salute, della tranquillità, di tutta la tua gioia di vivere. Quest'oscurità abissale potrebbe forse inghiottire un migliaio di Newton alti come torri, non ci sarà mai luce sulla terra[...]"

Ma il figlio non demorde e non perde tempo in vane dimostrazioni: studia la (da lui chiamata) *geometria assoluta,* denominata oggi geometria di Lobacevskij e Bolyai e, in seguito alla classificazione di Klein, geometria iperbolica[15].

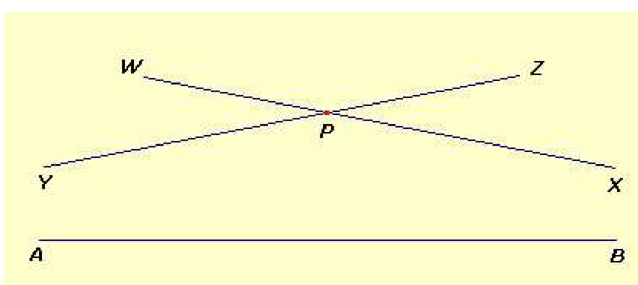
In un'appendice di un manuale del padre[16] Jànos pubblica i suoi lavori: è questa l'opera letta da Gauss, alla quale il matematico risponde un po' superbamente, rivendicando di aver raggiunto per primo quei risultati (sebbene senza alcuna pubblicazione di essi). Tra i due sorge una rivalità che non sarà mai superata. Ma Bolyai subisce un arresto solo quando alcuni articoli pubblicati da Lobacevskij sulla geometria iperbolica gli tolgono ogni riconoscimento e merito: da questo momento Jànos interrompe gli studi e non scrive più alcun libro a riguardo. Questi articoli di Lobacevskij sono il *Sui principi della geometria* (1829-1830), *La geometria immaginaria* (1835) e *Nuovi principi della geometria con una teoria completa delle parallele* (1838). Tuttavia questi risultati non sono di successo immediato: la filosofia kantiana in voga all'epoca supporta la verità a priori della geometria euclidea, come una forma della mente umana che consente di dare collocazione spaziale e temporale ai fenomeni. Anche Gauss viene a conoscenza di questi articoli: due matematici hanno raggiunto i suoi stessi risultati ma, a differenza sua hanno pubblicato questi (Gauss non vien per questo motivo citato nel nome odierno di tale geometria). Siamo difronte all'abolizione del dogma di "verità assoluta" attribuito alla geometria euclidea.

La geometria di Lobacevskij e Bolyai assume come 5° postulato il seguente (figura 3):

"Se P è un punto qualunque e AB una retta qualsiasi che non passa per P (nemmeno se prolungata), allora vi sono due rette YPZ e WPX, passanti per P, tali che:

1. *YPZ non è un'unica retta;*
2. *YPZ e WPX sono entrambe parallele ad AB;*
3. *Nessuna retta passante per P, interna all'angolo YPX è parallela ad AB."*

Figura 3



[15] Così chiamata perché rappresentabile con un modello in cui un piano è un iperboloide.

[16] Il manuale (1832) è intitolato *Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos purae, elementaris ac sublimioris, methodo intuitiva, evidentiaque huic propria, introducendi*. Il titolo dell'appendice di János è: *Appendix scientiam spatii absolute vera exhibens, a veritate aut falsitate axiomatis Euclidei (a propri haud unquam decidenda) indipendentem: adjecta ad casum falsitatis quadratura circoli geometrica.*

Con questo postulato (unito ai primi quattro della geometria euclidea) si dimostrano diversi teoremi:

- Ogni retta passante per P che entra nell'angolo ZPX è parallela ad AB. Le rette YPZ e WPX sono dette *parallele asintotiche* per P ad AB, mentre le rette interne all'angolo ZPX sono dette *parallele divergenti* per P ad AB.

- Le parallele asintotiche ad una retta passanti per un punto P formano angoli uguali e acuti con la perpendicolare PK condotta dal punto alla retta. Questo angolo è detto angolo di parallelismo ($\pi(l)$, dove l è la lunghezza del segmento PK) e si ha che $\pi(l) = X\hat{P}Q = Y\hat{P}Q < 90°$.

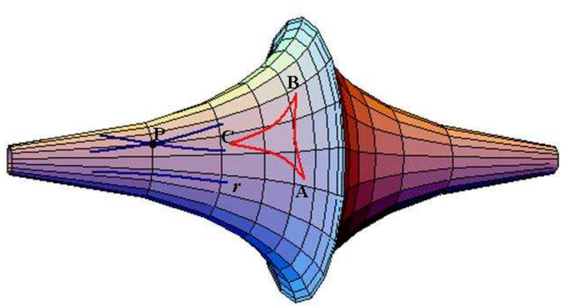
- La somma degli angoli interni di un triangolo è minore di 2 angoli retti.[17]

- Due triangoli che hanno angoli interni congruenti sono congruenti.[18]

A questo punto si pensa che questa teoria possa contenere qualcosa di contraddittorio. Ma la scoperta di modelli[19] che la traducono in concetti euclidei smentisce definitivamente questa ipotesi.

Il primo modello è realizzato da Eugenio Beltrami (1835-1900) nel 1868. Il matematico scrive l'articolo *Saggio sopra un'interpretazione della geometria non euclidea*, nel quale indica la geometria di Lobacevskij e Bolyai come una teoria delle geodetiche[20]. Una geodetica è il percorso più breve che unisce due punti in una superficie qualsiasi, non per forza piana. Il modello di Beltrami interpreta il termine di retta con il termine di geodetica: nella geometria iperbolica una retta è una geodetica della geometria euclidea. Allo stesso modo interpreta il termine di piano con il termine di superficie e il termine di segmento con quello di arco di geodetica (ovvero porzione di essa). Una possibile superficie che soddisfa, almeno in alcune regioni[21], i postulati della geometria iperbolica è la così detta pseudo-sfera di Beltrami (figura 4): una superficie ottenuta dalla rotazione (attorno all'asse y) di una curva definita come il luogo dei punti del piano tali che i segmenti di tangente, compresi tra

Figura 4



[17] Nella geometria euclidea la somma degli angoli interni di un triangolo è sempre pari a 2 angoli retti.
[18] Nella geometria euclidea sono simili e non per forza congruenti.
[19] Un modello costituisce una possibile interpretazione (o realizzazione) di una teoria, intesa come sistema puramente simbolico e astratto di assiomi e teoremi, in quanto stabilisce un universo di enti per i quali gli assiomi e i teoremi della teoria sono veri o, il che è lo stesso, presenta la stessa struttura logica della teoria.
[20] Curve di minima lunghezza che uniscono due punti in uno spazio in cui è definito un criterio di misura.
[21] Il difetto di tale superficie per cui esso non può costituire un modello globale per la geometria iperbolica, è il fatto che la trattrice presenta un punto cuspoidale, che, ruotando, genera un cerchio di punti singolari della superficie.

essa e una retta fissa, hanno lunghezza costante. Beltrami non riuscì a dimostrare l'esistenza di un modello che potesse rappresentare in ogni sua regione la geometria di Lobacevskij e Bolyai, ma il suo lavoro rimane di gran lunga molto importante a livello storico: si tratta del primo modello che ha portato alla chiave per interpretare le geometrie non euclidee.

Un secondo modello per la geometria iperbolica è il modello di Jules Henri Poincaré (1854-1912). Poincaré è un matematico, fisico e filosofo che si occupa molto del dibattito sulle geometrie. A riguardo scrive:

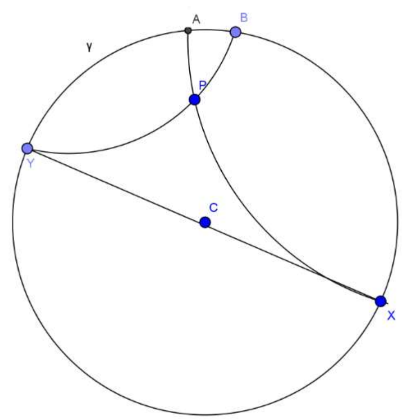
"Poiché sono possibili parecchie geometrie, siamo sicuri che proprio la nostra sia quel la vera?... Per rispondere è necessario che prima ci poniamo la domanda sul la natura degli assiomi della geometria. Sono essi giudizi a priori come vuole Kant? In tal caso ci si imporrebbero con tale forza che sarebbe impossibile concepire il contrario e quindi potremmo costruirvi sopra un edificio teorico; non ci sarebbero in tal caso geometrie non euclidee. Gli assiomi della geometria sono dunque verità sperimentali? [...] Ma se la geometria fosse una scienza sperimentale, non potrebbe essere una scienza esatta; sarebbe soggetta a continue revisioni [...] Gli assiomi della geometria non sono dunque né giudizi sintetici a priori né fatti di esperienza. Sono invece del le convenzioni; la nostra scelta, fra tutte le convenzioni possibili, è guidata da fatti sperimentali, ma resta libera e non trova dei limiti che nel la necessità di evitare le contraddizioni. Per questo i postulati possono rimanere rigorosamente veri, anche se le leggi sperimentali che ne hanno determinato l'adozione fossero solo approssimative. In altre parole, gli assiomi della geometria non sono che definizioni camuffate. Ed allora che cosa si deve pensare del problema se la geometria euclidea è vera? Tale problema è senza senso! Altrettanto varrebbe domandare se il sistema metrico è vero e false le misure antiche; se le coordinate cartesiane sono vere e le polari false. Una geometria non può essere più vera di un'altra; può essere soltanto più comoda."

Poincaré espone il suo modello in forma di racconto di fantasia sul suo libro *La scienza e l'ipotesi* (1902). Consideriamo su un piano euclideo un cerchio γ di centro C e di raggio R: è il mondo di una specie bidimensionale di esseri fantasiosi che noi osserviamo dall'esterno. Una strana proprietà di questo mondo che noi osservatori notiamo è che all'allontanarci da C le unità di lunghezza (regoli) si contraggono (posto che al centro un regolo misuri un metro, più questo è distante da C più questo è minore di un metro). Chiamiamo l(r) la lunghezza di un regolo in funzione della distanza r da C: essa segue la legge $l(r) = 1m-(r^2/R^2)$. Così che, a distanza r = (1/2)R un regolo misura l(r) ≈ 0.7500 m, a distanza r = (1/3)R un regolo misura l(r) ≈ 0.4375 m, a distanza r = (15/16)R un regolo misura l(r) ≈ 0.1211 m,… dunque al tendere di r = R si avrà che l(r) = 0.[22] Questo è ciò che osserviamo noi dall'esterno: per un abitante di quel mondo si mantengono le proporzioni di tutti gli oggetti (all'allontanarsi da C) e quindi per lui un regolo misura ovunque un'unità costante. È interessante però notare che questa proprietà rende per l'omino immaginato il suo mondo un mondo infinito (proprio come un piano euclideo): egli infatti non può mai raggiungere la circonferenza del cerchio, in quanto dovrebbe percorrere una distanza d composta da infiniti regoli (per noi sempre più piccoli) e impiegherebbe quindi un tempo infinito.

[22] Si noti che questo è un limite e in quanto tale presenta un asintoto irraggiungibile: r non potrà mai essere uguale a R.

Anche in questo mondo la luce percorre, come nel nostro, le traiettorie più corte possibili per raggiungere un punto B partendo da un punto A: Poincaré dimostra che queste traiettorie (oltre al diametro, unica traiettoria che noi consideriamo rettilinea) sono degli archi di circonferenze ortogonali a γ.[23] Gli abitanti del pianeta considerano queste come delle rette porte su di un piano che per loro è il pianeta stesso: una retta in questo modello è quindi un arco di circonferenza ortogonale ad una circonferenza considerata come piano, oppure un diametro di questa circonferenza-piano, ricordando che queste rette sono in quanto tali infinite. In questo mondo vale il contrario del 5° postulato di Euclide: presa una retta-diametro XY e un punto P esterno ad essa, esistono due parallele asintotiche a XY, ovvero quelle rette (archi di circonferenza) che passano rispettivamente per X e P, e per Y e P. Sono infatti parallele perché i punti X e Y non esistono per gli abitanti del mondo γ ma rappresentano i punti limite irraggiungibili per una distanza r = R. Inoltre tutte le rette che intersecano la circonferenza γ in punti compresi tra X e Y (dalla parte di P) e passano per P sono rette parallele divergenti alla retta XY. (Figura 5)

Figura 5



Se consideriamo un punto Q vicinissimo a C, le parallele asintotiche a XY passanti per Q ci appariranno praticamente rettilinee: siamo difronte a due rette assimilabili a delle rette euclidee, entrambe parallele ad una stessa retta. Queste ipotesi sono perfettamente compatibili con la nostra esperienza e quindi, se fossero vere, lo spazio attorno a noi sarebbe iperbolico e noi non ce lo saremmo mai accorti.

[23] Ovvero circonferenze che presentano le tangenti (nei punti di intersezione) perpendicolari tra loro.

1.5.2.LE GEOMETRIE ELLITTICHE: L'ELLITTICA E LA SFERICA

Abbiamo visto come dall'ipotesi dell'angolo acuto di Saccheri sia poi nata la geometria iperbolica. Per rendere vera l'ipotesi dell'angolo ottuso invece, non è sufficiente modificare solamente il 5° postulato di Euclide (cosa che già Saccheri aveva dimostrato) in quanto si raggiunge una contraddizione. È necessario quindi procedere con la modifica di almeno un altro postulato, il 2°: è ciò che caratterizza le geometrie ellittiche di George Friedrich Bernard Reimann (1826-1866).

Reimann, figlio di un pastore luterano, vive nella semplicità e nella povertà; è di salute cagionevole e la morte precoce ne è una testimonianza. Ciò nonostante la sua mente è brillante e le sue abilità matematiche innate e abnormi: già all'età di sei anni è in grado di risolvere problemi aritmetici in maniera così rigorosa da stupire chiunque e da superare il proprio maestro. Di tal genio se ne accorge Gauss che, avuto George come suo alunno, spinge fortemente il ragazzo a intraprendere la strada delle geometrie non euclidee (in particolare dello studio della neonata geometria di Lobacevskij e Bolyai): è la sua vocazione e Reimann non si limita ad analizzare e a studiare ciò che è già stato compiuto, ma arriva a formulare una sua teoria del tutto originale e interessante, la teoria delle geometrie ellittiche.

Come già accennato i presupposti di questa teoria sono racchiusi nella negazione dei postulati 2° e 5° di Euclide. Ecco come Reimann modifica questi:

- Una retta è una linea chiusa che ha lunghezza finita e costante pur essendo illimitata.[24]
- Due qualsiasi rette di un piano hanno sempre almeno un punto in comune.[25]

Questo sistema di basa sul principio per il quale lo spazio è finito: ciò non esclude la sua illimitatezza. Questa infatti è una proprietà empirica che permette ad un corpo di percorrere una traiettoria rettilinea senza che questo incontri mai un vincolo che gli impedisca il tragitto. E questa proprietà non consegue che lo spazio in cui giace la traiettoria debba essere infinito: per Reimann una retta è una linea chiusa di lunghezza limitata che giace su uno spazio curvo finito.

Da questa intuizione Reimann ricava due geometrie ellittiche e i relativi modelli: la geometria ellittica semplice e la geometria ellittica doppia, detta geometria sferica. Questa distinzione nasce dal seguente teorema dimostrato dal matematico:

"tutte le rette perpendicolari ad una retta data r, da una stessa parte di essa[26] si incontrano in un punto P equidistante da tutti i punti di r. Ciò avviene anche nella parte opposta relativamente ad un punto P'".

---

[24] Il 2° postulato di Euclide prevede invece che una retta si possa prolungare all'infinito, considerando equivalenti i concetti di infinito e illimitato (si continui la lettura per trovare chiarificata tale differenza introdotta da Reimann).
[25] Ciò si traduce con la non esistenza di rette parallele e quindi nell'ipotesi dell'angolo ottuso di Saccheri.
[26] Con parte si intende una porzione di spazio delimitata da una retta.

Se i punti P e P’ coincidono allora siamo difronte alla geometria ellittica, mentre se questi punti sono distinti siamo difronte alla geometria sferica. Nelle due geometrie infatti varia il concetto di punto: nella prima un punto ellittico è definito come una coppia di punti euclidei diametralmente opposti, mentre nella seconda un punto sferico è un punto euclideo qualsiasi situato nel piano. In entrambe le teorie invece un piano è una superficie sferica euclidea (anche se nella geometria ellittica si può considerare il piano come una superficie semi-sferica) e una retta una circonferenza massima di una superficie.

In entrambe le geometrie ellittiche valgono i seguenti teoremi:

- La somma degli angoli interni di un triangolo è maggiore di due angoli retti.
- I triangoli che hanno angoli congruenti sono tutti congruenti tra loro.

Nella geometria sferica inoltre valgono anche i seguenti teoremi:

- Per due punti antipodi[27] passano infinite rette.
- Due rette hanno sempre due punti in comune.
- Due punti individuano due segmenti.

1.6.DALLA CADUTA DELL’UNIVCITA’ ALLA CADUTA DELLA COERENZA ASSOLUTA DELLA GEOMETRIA EUCLIDEA

Come già affermato più volte, per secoli la geometria euclidea è stata ritenuta la detentrice della verità assoluta in quanto trovava a priori nel mondo fisico la propria coerenza[28]. Ma ora sono nate altre geometrie che rappresentano punti di vista della realtà e che tolgono alla geometria euclidea l’unicità. Se infatti consideriamo i vari modelli studiati per rappresentare le teorie non euclidee, relazioniamo sempre questi alla geometria euclidea, definendo i termini di ciascun modello con delle definizioni partendo da definizioni di Euclide. È ciò che induce Felix Klein ad affermare: *“se la geometria euclidea è coerente, allora anche la geometria ellittica e la geometria iperbolica lo sono”*. In un contesto in cui con teorie diverse ma comunque coerenti si possono costruire partendo da oggetti comuni, l’assolutezza della verità viene meno. E la coerenza a priori della geometria euclidea in quanto aderente alla realtà perde dunque di legittimità. È necessario quindi riconsiderare il concetto di vero/coerente riferito ad una teoria: tra il XIX e il XX secolo, si instaura l’assiomatica. Con tale termine si indica un procedimento di scelta di assiomi appunto (ovvero di termini, di postulati

[27] Si definiscono punti antipodi punti sferici che corrispondono a due punti euclidei diametralmente opposti.
[28] Proprietà di una teoria per la quale lo sviluppo della teoria stessa non conduce a contraddizioni.

e di nozioni comuni, senza che questi mantengano però la proprietà dell'evidenza) in modo arbitrario ma non contradditorio.

Nasce inoltre l'esigenza di cercare una base dell'intera matematica, sulla quale fondare qualsiasi altra teoria con una coerenza non relativa. Una base quindi assoluta, che non richiede di elementi esterni ad essa per essere dimostrata: una matematica primitiva dalla quale tutto possa derivare. È il così detto *Programma di Hilbert*.

1.7.DAVID HILBERT

David Hilbert (1862-1943) è uno tra i più importanti matematici di tutta la storia. Professore universitario all'università di Gottinga, nel corso della sua vita porta a compimento diversi progetti. È una personalità singolare. Vive con libertà, frequenta diverse donne e non accetta il conservatorismo universitario. Le norme e i costumi sociali non lo colpiscono. Vi sono degli aneddoti della sua vita che ci dimostrano queste particolarità. Si dice infatti che al ristorante abbia chiesto più volte a delle signore presenti i loro boa muschiati per ripararsi dagli spifferi. Oppure che abbia indossato per diversi giorni dei pantaloni strappati all'università dove insegnava e che il suo assistente (conducendo David un giorno tra dei cespugli spinosi con il tentativo di trovare una motivazione delicata di tale strappo) abbia pensato galantemente di avvertirlo di ciò: ma la risposta inaspettata del matematico sarebbe stata: *"Oh no, sono così da settimane ma nessuno se ne è accorto!"*. La matematica non lo lascia mai: è forse il vicolo più forte della sua vita. Come del resto i numerosi rapporti di amicizia che nascono nell'ambiente universitario. Sa apprezzare e credere nelle ricerche dei propri studenti. La sua singolarità rimane evidente comunque anche in questo. Si racconta infatti che al funerale di un suo allievo (morto improvvisamente), il quale aveva lavorato invano alla dimostrazione di un teorema complesso ma aveva lasciato degli spunti del tutto innovativi e interessanti in questa dimostrazione, Hilbert, incaricato di redigere il discorso funebre, abbia letto sotto la pioggia la dimostrazione del giovane. Oppure che alla notizia dell'abbandono della facoltà di matematica da parte di uno studente promettente (che intendeva diventare poeta), egli abbia risposto: *"Non sono sorpreso. Non aveva abbastanza immaginazione per diventare un matematico"*.

1.8. L'ASSIOMATIZZAZIONE DELLA GEOMETRIA DI HILBERT

Tutto il suo progetto di cercare una base assoluta della matematica parte dall'assiomatizzazione rigorosa della geometria euclidea. Nel 1899 pubblica il libro *Grundlagen der Geometrie*[29] dove presenta questi assiomi. Ma per arrivare a questi è necessario considerare la combinazione di due grandi conquiste matematiche ottenute precedentemente:

- L'invenzione della geometria analitica di Cartesio[30], ossia il metodo di utilizzare le coordinate (coppie, terne, quaterne, …) di numeri per lo studio della geometria. Per lo spazio euclideo tridimensionale, si usano tre coordinate per rappresentare un punto e una equazione o un sistema di equazioni per rappresentare un piano, una retta, una curva, una superficie.

- La creazione dei numeri reali ad opera principalmente di Richard Dedekind (1831-1916), di Georg Carnot (1845-1918) e dello stesso Hilbert che arriva a concepire il campo[31] reale come l'unico campo ordinato[32] archimedeo[33] completo[34].

Sulla base di queste due conquiste si riconosce che lo spazio tridimensionale studiato da Euclide si identifica con lo spazio numerico R^3. In questo spazio i punti sono le terne di numeri reali (x, y, z), un piano è il luogo dei punti (x, y, z) che sono soluzione di un'equazione del tipo $ax + by + cz + d = 0$, con coefficienti reali (di cui i primi tre non tutti nulli) ed una retta è il luogo dei punti (x, y, z) che sono soluzione di un sistema di due equazioni che rappresentano dei piani. Il problema dell'assiomatizzazione dello spazio euclideo diventerà quindi il problema dell'assiomatizzazione dello spazio numerico R^3.

Vediamo dunque l'assiomatica di Hilbert per la geometria euclidea, che riorganizza e completa il programma di Euclide sviluppato negli *Elementi*.

---

[29] Trad. Fondamenti della Geometria

[30] René Descartes, detto Cartesio (1596-1600)

[31] Un campo K è una terna (A, +, *), composta da un insieme non vuoto di elementi e due operazioni + (addizione) e * (moltiplicazione), tali che entrambe le operazioni siano commutative ($a + b=b + a$ e $a * b=b * a$), entrambi le operazioni siano associative ($(a+b)+c=a+(b+c)$ e $(a*b)*c=a*(b*c)$) e valgono le due leggi distributive tra somma e prodotto ($a (b + c)= ab + ac$ e $(a + b) c = ac + bc$), $\forall$ a, b, c $\in$ A.

[32] Un campo K si definisce ordinato se (dato un suo sottoinsieme P, detto insieme degli elementi positivi) in esso valgono le seguenti leggi:

- Legge della tricotomia: ogni elemento di K, o è nullo, o appartiene a P, oppure il suo opposto appartiene a P (e in questo caso l'elemento è chiamato negativo)
- Legge della compatibilità: somme di coppie di elementi di P appartengono ancora a P e prodotti di coppie di elementi di P appartengono ancora a P.

[331] Un campo archimedeo è un campo nel quale, dati comunque due numeri positivi esiste un multiplo di uno che supera l'altro (*postulato di Archimede*).

[34] Il campo reale è un campo archimedeo completo in quanto si può dimostrare che qualsiasi campo archimedeo K è un suo sottocampo, ovvero un campo con un insieme di elementi A sottoinsieme di R.

Lo spazio è una terna A = (P, R, Ͳ), dove P è un insieme non vuoto di oggetti detti punti, R un insieme non vuoto di parti di P dette rette, Ͳ un insieme non vuoto di parti di P dette piani, tali che l'intersezione tra R e Ͳ non sia vuota e tali che siano soddisfatti i seguenti gruppi di assiomi:

I GRUPPO: assiomi dell'appartenenza.

- Per due punti distinti qualunque passa una ed una sola retta.
- Per tre punti non allineati qualunque passa uno ed un sol piano.
- Ogni retta contiene almeno due punti distinti, ogni piano contiene almeno tre punti non allineati, lo spazio contiene almeno quattro punti non complanari.
- Se due punti distinti di una retta appartengono ad un piano, la retta è contenuta nel piano.
- Se due piani hanno in comune un punto, essi hanno in comune almeno un altro punto.

II GRUPPO: assiomi dell'ordine.

È data una relazione ternaria di inter-giacenza tra punti allineati (che si denota scrivendo ABC e che si legge "B giace tra A e C") in modo che valgano i seguenti assiomi:

- Se A, B, C sono punti allineati qualunque, allora ABC implica CBA.
- Se A e C sono punti distinti qualunque, esiste almeno un B tale che ABC ed esiste almeno un D tale che ACD.
- Dati tre punti distinti e allineati qualunque, esattamente uno di essi giace tra gli altri due.
- *Assioma di Pasch*: Siano dati comunque tre punti non allineati A, B, C ed una retta del loro piano, la quale non passi per alcuno dei tre punti. Se la retta passa per un punto posto tra A e B, allora essa passa anche o per un punto posto tra B e C oppure per un punto posto tra A e C.

I primi due gruppi di assiomi permettono di introdurre i concetti di segmento, di semiretta e di angolo.[35]

---

[35]Se A e B sono due punti distinti ed a è la retta che li contiene, si chiama segmento di estremi A e B l'insieme dei punti di a posti tra A e B. Gli altri punti si dicono esterni al segmento.
Dato un punto O di una retta a, possiamo dividere la retta in due semirette di origine O nel modo seguente. Si fissi su a un punto A distinto da O: la semiretta (aperta) OA (semiretta di a, di origine O e contenente A) è costituita dal punto A e dai punti X di a tali che OXA oppure OAX; l'altra semiretta di a di origine O è costituita dai punti Y di a tali che AOY. Aggiungendo ad una semiretta aperta la sua origine si ottiene la corrispondente semiretta chiusa. In questo modo si

III GRUPPO: assiomi della congruenza.

È data una relazione di congruenza tra segmenti e una relazione di congruenza tra angoli[36], entrambe denotate con ≡, in modo che valgano i seguenti assiomi:

- Dati comunque due punti A, B ed una semiretta a' che ha origine in punto A', esiste un unico punto B' di a' tale che siano congruenti i segmenti AB e A'B' (cioè AB ≡ A'B').
- Ogni segmento è congruente a se stesso: AB ≡ AB, AB ≡ BA.
- Se AB ≡ A'B' e A'B' ≡ A''B'', allora AB ≡ A''B''.
- Se su una retta a sono dati due segmenti AB e BC (privi di punti in comune), su una retta a' sono dati due segmenti A'B' e B'C' (privi di punti in comune) e se AB ≡ A'B' e BC ≡ B'C', allora AC ≡ A'C'.
- Sia dato comunque un angolo ab in un piano α e sia data comunque in un piano α' una retta r' ed un punto O' di r'. Sia a' una delle due semirette di r' di origine O'. In ciascuno dei due semipiani di α' individuati da r', esiste esattamente una semiretta b' di origine O' tale che a'b' ≡ ab e tale che tutti i punti interni dell'angolo a'b' appartengano al semipiano di α' considerato.
- Ogni angolo è congruente a se stesso: ab ≡ ab e ab ≡ ba.
- Se ab ≡ a'b' e a'b' ≡ b''a'' allora ab ≡ a''b''.
- Dati comunque due triangoli ABC e A'B'C', tali che AB ≡ A'B', AC ≡ A'C', BAC ≡ B'A'C', allora si ha anche ABC ≡ A'B'C' e ACB ≡ A'C'B'.

IV GRUPPO: assioma delle parallele.

- Dati comunque una retta a ed un punto A non appartenente ad a, esiste, nel piano individuato da A e da a, esattamente una retta b, passante per A e che non interseca a. Tale retta b è detta la parallela per A ad a.[37]

---

ottiene una partizione di a in tre classi: il punto O e le due semirette aperte di a di origine O. Si può dimostrare che un qualsiasi punto A' della semiretta OA definisce la medesima semiretta.
Siano date in un piano α due semirette a = OA e b = OB entrambe di origine un punto O. Si
chiama angolo (di lati OA e OB e di vertice O, e si denota con AOB oppure con ab) la porzione di piano inclusa tra le due semirette. Si chiamano interni all'angolo tutti i punti di α i quali a due a due individuano segmenti non aventi alcun punto in comune con i lati dell'angolo; si chiamano esterni all'angolo i punti di α i quali non siano interni e non appartengano ai lati.

[36] I primi quattro assiomi infatti (riferiti ai segmenti) corrispondo agli altri quattro (riferiti agli angoli).

[37] Questo assioma è equivalente al 5° postulato di Euclide.

Definiamo quindi spazio affine (di dimensione 3) una qualunque terna ordinata A = (P, R, Ͳ) i cui punti, rette e piani verificano tutti gli assiomi del I GRUPPO (assiomi di incidenza) e tutti quelli del IV GRUPPO (assioma delle parallele). Due spazi affini A = (P, R, Ͳ) e A' = (P',R', Ͳ') si dicono isomorfi se esiste un isomorfismo ovvero una corrispondenza biiettiva fra P e P' e di conseguenza tra R e R' e tra Ͳ e Ͳ'. Da ciò deriva il seguente teorema:

Ogni spazio affine 3-dimensionale è coordinatizzabile sopra un corpo K, ovvero è isomorfo allo spazio affine numerico $A^3(K)$, i cui punti sono le terne ordinate di numeri di K ed i piani e le rette vengono definiti di conseguenza (tramite equazioni).

V GRUPPO: assiomi della continuità.

- Assioma di Archimede. Siano dati su una qualunque retta a un punto qualunque A^1 posto tra due dati punti A e B; e siano dati altri punti A^2, A^3, A^4, ... tali che A^1 sia posto tra A e A^2, A^2 tra A^1 e A^3, A^3 tra A^2 e A^4 e così via; e tali che si abbiano le congruenze $AA^1 \equiv A^1A^2 \equiv A^2A^3 \equiv A^3A^4 \equiv \ldots$ Allora esiste nella successione dei punti A^2, A^3, A^4, … un punto A^n tale che B è posto tra A e A^n.

- Assioma della completezza. Gli elementi (punti, rette, piani) della geometria costituiscono un sistema A = (P, R, Ͳ), che non si può ampliare se si mantengono tutti gli assiomi precedenti.

A questo punto Hilbert dimostra che lo spazio numerico tridimensionale reale $A^3(R)$ soddisfa tutti gli assiomi e quindi può essere utilizzato per rappresentare lo spazio geometrico tridimensionale euclideo. Con uno spazio numerico di tale tipo infatti vi è una perfetta biiezione tra ogni punto geometrico ed ogni terna dello spazio, tra ogni piano e ogni equazione e tra ogni retta e ogni equazione. Inoltre viene conservata l'inter-giacenza tra punti allineati, la congruenza tra segmenti e tra angoli e il parallelismo.

2.0.L’ASSIOMATIZZAZIONE DELL’ARITMETICA

Hilbert ha ricondotto un sistema di punti, rette e piani ad un sistema di numeri. Queste tre entità (considerate sempre come enti primitivi) possono quindi essere definite partendo dalla nozione di numero reale. È quindi necessario vedere come i matematici (Hilbert e non solo) abbiano pensato di definire tale nozione. Le principali vie percorse possono essere raggruppate nel seguente modo:

- Procedimento del metodo genetico, ovvero quel metodo che fa risalire un numero reale a dei numeri naturali (presi come concetti primitivi).
- Procedimento del metodo assiomatico (di Hilbert), ovvero quel metodo che definisce un numero reale attraverso una serie di assiomi. In particolare Hilbert pone una serie di assiomi che gli permettono di definire l’insieme R come l’unico campo ordinato archimedeo completo.

Secondo un’osservazione scherzosa di Bertrand Russell (1872-1970), *la differenza tra il metodo genetico e il metodo assiomatico è la stessa che passa tra il lavoro onesto e il furto*: con questo ci si impadronisce in un attimo di tutta la ricchezza accumulata faticosamente tramite quello. Non è in effetti così interessante analizzare gli assiomi di Hilbert per l’insieme reale, in quanto questi consistono nel prendere per definito qualcosa che i matematici che intraprendono il metodo genetico deducono. Analizzeremo quindi in seguito solamente quest’ultima strada, tenendo conto che la prima (quella di Hilbert) consiste nel prendere per vera questa via della quale tratteremo.

2.1.IL METODO GENETICO

Come già accennato il metodo genetico trasforma l’insieme dei numeri reali in particolari definizioni che partono dal concetto di numero naturale. Dall’insieme dei naturali infatti si può dedurre l’insieme degli interi, l’insieme dei razionali, l’insieme dei reali e l’insieme dei complessi. Occorre quindi *creare*[38] il numero naturale per poi arrivare a qualsiasi altro numero. A riguardo, analizziamo il lavoro di Giuseppe Peano (1858-1932). Il matematico considera tre concetti primitivi definiti dagli assiomi che li governano per definire l’insieme dei numeri naturali: il numero naturale, il numero uno e il successore di un numero. Gli assiomi enunciati sono i seguenti (*Assiomi di Peano*):

[38] Vi è una famosa citazione a riguardo che esclude questa facoltà all’uomo: Leopold Kronecker (1823-1891) afferma infatti *“Dio ha creato i numeri naturali, tutto il resto è opera dell’uomo”*. Con questa frase il matematico intende evidenziare come partendo da questo concetto si possa arrivare a tutta la matematica studiata.

- Uno è un numero naturale.
- Per ogni numero naturale esiste un ben determinato numero naturale successore di quello.
- Uno non è successore di alcun numero naturale.
- Due numeri naturali aventi lo stesso successore sono uguali tra loro.
- Se un insieme di numeri naturali contiene uno ed il successore di ogni suo elemento, allora quell'insieme coincide con l'insieme di tutti i numeri naturali N.[39] Questo assioma è noto come il *principio d'induzione.*

Si definiscono poi le operazioni in N quali:

- L'addizione, secondo le leggi $1 + n = \sigma(n)$ e $\sigma(m) + n = \sigma(m+n)$, dove σ indica la funzione "passaggio al successore" e m e n due qualsiasi elementi di N.
- La moltiplicazione, secondo le leggi $1*n = n$ e $\sigma(m)*n = m*n + n$.

E si definisce l'ordinamento: $m<n$ se esiste un h (che appartiene ad N) tale che $m+h = n$ (per ogni n, m di N) e viceversa.

Si dimostrano poi le proprietà delle operazioni.

Si assume a questo punto l'insieme degli interi Z come un insieme di coppie ordinate di numeri naturali (a, b) e tra le quali possiamo avere una particolare equivalenza (≡). Si indica quindi $Z = (N \times N) \setminus \equiv$. Questa equivalenza è definita dalla legge: $(a, b) \equiv (c, d)$ se $a + d = b + c$ (e viceversa), dove a, b, c, d sono numeri naturali.

Si definiscono poi le operazioni in Z quali:

- L'addizione, secondo la legge $[(a, b) + (c, d)] = [(a+c, b+d)]$.
- La moltiplicazione, secondo la legge $[(a, b) * (c, d)] = [(ac + bd, ad + bc)]$.

E si definisce l'ordinamento $(a, b) < (c, d)$ se $a+d < b+c$ (e viceversa).

Abbiamo inoltre l'immersione dell'insieme N in Z, in quanto ogni elemento n di N può essere indicato in Z con la coppia ordinata $(\sigma(n), 1)$. Si stabilisce poi di indicare con 0 ogni coppia (n, n), con -n ogni coppia $(1, \sigma(n))$ e con a-b (definita come a + (-b)) ogni coppia (a, b).

---

[39] Si pensi all'insieme (1, 2, 3): esso contiene il numero uno, il numero 2, il successore di 2 (ovvero il numero 3), ma non contiene il successore di 3. Un insieme di numeri naturali che contenga i successori di tutti i suoi elementi è quindi solamente l'insieme di tutti i numeri naturali.

Si assume a questo punto l'insieme dei razionali Q come l'insieme di coppie di numeri interi (a, b), di cui b sempre diverso da 0, tra le quali possiamo avere una particolare equivalenza (≡). Si indica quindi Q = (Z x Z- {0}) \ ≡. Questa equivalenza è definita da (a, b) ≡ (c, d) se a*d = b*c (e viceversa), dove a, b, c, d sono numeri interi.

Ogni coppia (a, b) di Q si denota con a/b. si definiscono poi le operazioni in Q quali:

- L'addizione, secondo la legge a/b + c/d = (ad + bc)/(bd).
- La moltiplicazione, secondo la legge (a/b)(c/d) = (ac)/(bd).

E si definisce l'ordinamento a/b < c/d se ad < bc (e viceversa).

Abbiamo inoltre l'immersione di Z in Q, in quanto ogni elemento z di Z può essere indicato in Q con la forma z/1.

A questo punto non resta che dedurre l'insieme dei numeri reali R da quello dei numeri razionali Q. A tal proposito analizziamo tre procedure intraprese rispettivamente dai matematici Cauchy, Dedekind e Carnot.

1. Cauchy definisce R l'insieme di classi di equivalenza[40] di particolari successioni di numeri razionali (dette successioni di Cauchy). Una successione si dice di Cauchy se, per ogni valore ε (piccolo a piacere) che appartiene a Q, esiste sempre un elemento della successione, dopo del quale la differenza in valore assoluto di due elementi qualsiasi è sempre minore di ε.[41] Due successioni di Cauchy si definiscono equivalenti se la loro differenza è una successione infinitesima[42]. Un numero irrazionale risulta quindi una successione (a^1, a^2, a^3, a^4, …) di numeri razionali via via sempre più piccoli, mentre un numero razionale risulta una successione (a, a, a, a, …) di numeri razionali sempre uguali: l'insieme Q è dunque immerso in R.

2. Dedekind definisce invece un numero reale come una classe di equivalenza di sezioni di Dedekind dell'insieme Q. Con sezione di Dedekind (o partizione ordinata) si indica una partizione non banale dell'insieme dei razionali in due "classi" A e B, ovvero una divisione di Q in due sottoinsiemi A e B tali che:

    - L'unione di A e B sia Q.
    - L'intersezione tra A e B sia vuota.

---

[40] Una classe di equivalenza è un insieme di elementi che hanno in comune la proprietà di essere messi in relazione biunivoca con un elemento campione (che quindi li rappresenta).

[41] Un esempio di successione di Cauchy potrebbe essere la seguente: $S_n=(1/n^2)$, ovvero S = {1, 1/4, 1/9, 1/16, 1/25, 1/36, 1/49, …}. Posto per esempio ε = 0.1, esiste il valore S_4 = 1/16 tale che la differenza di due qualsiasi elementi di S_n con n > 4 è sempre minore di ε. Questo avviene per qualsiasi valore di ε.

[42] Si definisce infinitesima una successione di Cauchy che per ogni ε razionale piccolo a piacere la successione, da un determinato elemento in poi, assume sempre valori minori di ε.

- Né A né B siano insiemi vuoti.
- Ogni elemento di A sia minore di ogni elemento di B.

Ogni partizione ha al massino un elemento di separazione razionale, ovvero un elemento q tale che, se un numero razionale è minore di esso, allora tale numero deve appartenere ad A e, se un numero razionale è maggiore di esso, allora tele numero deve appartenere a B. Questo q razionale deve (per la definizione di partizione ordinata) appartenere o ad A o a B. In alcune sezioni però questo elemento razionale non esiste. Si pensi ad esempio alla sezione di Dedekind (con x che appartiene a Q) A = {(x < 0) *vel* (x^2 < 2)} e B = {(x > 0) *et* (x^2 > 2)}: l'elemento di separazione di tale partizione è quel numero r tale che $r^2 = 2$ e tale numero non esiste in Q.

Due partizioni si dicono equivalenti se hanno lo stesso elemento di separazione: questo può quindi appartenere a Q oppure, se ciò non avviene, può essere definito come un elemento dell'insieme irrazionale. La loro unione da l'insieme R. Una classe di sezioni equivalenti (classe di equivalenza) identifica quindi un numero reale e Q è immerso in R.

3. Carnot infine definisce i numeri reali come classi di equivalenza di coppie di classi contigue di numeri razionali. Una coppia di classi contigue di numeri razionali è una coppia di sottoinsiemi A e B di Q tali che:

    - Ogni elemento di A è minore di ogni elemento di B.
    - Per ogni ε razionale piccolo a piacere, esistono almeno un elemento a di A e un elemento b di B, tali che |a – b| < ε.

    Un esempio di coppia di classi contigue può essere la seguente:

    A = {1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, 1.41421, 1.414213, 1.4142135, 1.41421356, …}

    B = {2, 1.5, 1.42, 1.415, 1.4143, 1.41422, 1.414214, 1.4142136, 1.41421357, …}

    Ogni coppia di classi contigue ammette al massimo un elemento di separazione q razionale che indica l'intera coppia. Le coppie che non ammettono un elemento di separazione razionale (ad esempio la coppia sopra riportata), ammettono un elemento di separazione definito irrazionale. Coppie che hanno lo stesso elemento di separazione sono equivalenti e rappresentano lo stesso numero. Si definisce quindi R l'insieme delle classi, di coppie di classi contigue tutte equivalenti tra loro, ad ognuna delle quali è associato un numero reale (razionale o irrazionale) che corrisponde all'elemento di separazione. Q è quindi immerso anche in questo caso in R.

3.0.L'ASSIOMATIZZAZIONE DELLA LOGICA

Fin ora abbiamo analizzato come i matematici abbiamo cercato di costruire i numeri reali partendo dall'assiomatizzazione dei numeri naturali. Come visto tutti questi matematici costruiscono gli assiomi partendo dal concetto di insieme. Questo procedimento sposta il problema di coerenza dell'aritmetica ad un problema di coerenza della logica: occorre infatti formulare un'assiomatica della teoria degli insiemi che non conduca a contraddittorietà per poter definire coerente la teoria sui numeri. E invece sono scoperte alcune contraddizioni, chiamate *paradossi*, che rendono instabile la nozione di insieme. Tra le più note ricordiamo:

- *Paradosso di Richard* (Jules Richard, 1905). L'insieme A dei numeri interi positivi che possono essere descritti a parole con al più 100 lettere dell'alfabeto è non vuoto (contiene ad esempio: settantadue, nove per nove, ecc.) ed è finito perché usando le 26 lettere dell'alfabeto si possono formare al più 26^{100} espressioni con al più 100 lettere (e molte di quelle espressioni non sono dotate di significato); sia B l'insieme dei restanti numeri interi (quelli la cui descrizione richiede almeno 101 lettere). Anche B è non vuoto per quanto detto. Sia b l'intero definito come il più piccolo numero di B. Dunque il più piccolo intero non descrivibile con al più 100 lettere può invece essere definito con meno di 100 lettere.

- *Paradosso del barbiere* (Bertrand Russell, 1918). Il barbiere di un piccolo villaggio non fa la barba a coloro che si radono da soli, ma la fa a tutti quelli che non si radono da soli. Un giorno il barbiere si domanda se dovrebbe o no radere se stesso. Se sì, allora no; se no, allora sì.

- *Paradosso di Cantor*. Parlare di ”insieme di tutti gli insiemi” conduce ad una contraddizione. L'insieme degli insiemi che non contengono se stesso come elemento contiene se stesso come elemento? Se sì, allora no; se no, allora sì.

Russell nota che la causa di tutti questi paradossi è la stessa: l'insieme contiene oggetti che sono l'insieme stesso. Gli assiomi che definiscono gli insiemi quindi devono escludere tale contraddizione. Si sviluppano a tele scopo diverse scuole filosofiche che ricercano i fondamenti della logica matematica in maniera diversa e arrivano a formulare in termini diversi un insieme.

3.1.LA SCUOLA LOGISTA

Nasce con Peano in Italia e con Gottlob Frege in Germania. Frege nel suo libro i *Fondamenti dell'aritmetica* cerca di costruire la matematica come un'estensione della logica. È questo lo scopo che i rappresentanti di questa scuola si propongono: la creazione di una logica matematica che inverte il precedente storico della matematizzazione della logica (ad opera di Augustus De Morgan). Tra i principali aderenti a questa scuola troviamo Russell e Whitehead (pubblicano i libri *Principles of Mathematics* nel 1903 e *Principia Mathematica* in tre volumi dal 1910 al 1913); questi fondano tutta la logica a partire da queste nozioni primitive:

- Proposizione elementare p, q, … nella quale intervengono solo costanti (es. "Mario è un uomo").
- Funzione proposizionale p(x) nella quale compaiono una o più variabili (es. "x è un uomo").
- Affermazione di verità di una proposizione elementare.
- Negazione -p di una proposizione elementare.
- Disgiunzione p *vel* q di due proposizioni elementari.

Con questi elementi è possibile definire tutta una serie di costrutti che caratterizzano un processo logico e un processo matematico (teoremi logici e teoremi matematici). Gli insiemi infine sono introdotti attraverso le funzioni proposizionali: p(x) di un dato tipo n stabilito[43] indica l'insieme di tutti gli oggetti per cui p(x) è vera.

A questo punto Russell e Whitehead sviluppano quindi una teoria dei tipi: una funzione proposizionale è di tipo 0 se a x vengono associati membri che sono singoli oggetti, di tipo 1 se a x vengono associati membri che sono funzioni di tipo 0 e di tipo n+1 se a x vengono associati membri che sono funzioni di tipo n. In questo modo un insieme è sempre di un tipo determinato e quindi non può contenere se stesso come proprio elemento (in quanto la sua variabile x assumerebbe un membro di tipo superiore al tipo che la caratterizza).

Viene poi sviluppata una teoria delle classi, bella quale si definisce classe una totalità di oggetti (anche funzioni proposizionali di tipo differente) che soddisfano una proprietà (che può essere vista come una funzione q(y) nella quale y può assumere singoli oggetti, funzioni di tipo 0, di tipo 1 o di tipo n come membro, tutti legati da una proprietà definita da q(y) stessa). Gli insiemi sono dunque delle classi ma non tutte le classi sono degli insiemi: queste ultime infatti, se considerate come degli insiemi, condurrebbero a dei paradossi.

Una funzione p(x, y) è una relazione binaria, ovvero una classe di coppie di oggetti (anche di tipo diverso tra loro) che rendono vera p: questo permette di sviluppare la teoria dei numeri e quindi dei fondamenti dell'aritmetica e della geometria.

[43] Si legga in seguito per una maggiore comprensione a riguardo.

3.2.LA SCUOLA INTUIZIONISTA

Ciò che è maggiormente criticato alla scuola logistica è l'aver perso l'intuitività della matematica. Questa infatti viene fondata sulla base di pure deduzioni logiche, da leggi del pensiero e da forme pure che prescindono dall' intuizione e dall'esperienza fisica. Kronecker (1823-1891) e Poincaré (1954-1912, si veda il suo lavoro esposto in precedenza nell'ambito delle geometrie non euclidee) basano la loro idea della matematica su questo: considerando che ogni definizione deve poi essere costruttiva (ovvero esemplificativa di un fenomeno o utile a governarlo), rifiutano l'assiomatizzazione casuale della matematica o la sua deduzione da procedimenti di puro pensiero astratto. Essi fondano la matematica sull'a priori dell'intuizione rifiutando principi come quello del terzo escluso o procedimenti come quello della dimostrazione per assurdo. Tale scuola arriva a creare una matematica basata sulle costruzioni finitiste e più in generale ad una filosofia del senso comune (di Henri Bergson).

3.3.LA SCUOLA FORMALISTA

È la scuola con a capo Hilbert e con obiettivo il così detto programma di Hilbert. Il matematico, durante il *Secondo Congresso Internazionale dei Matematici* (svoltosi a Parigi nel 1900) espone in 23 problemi, da risolvere nel secolo che stava iniziando, la non risolta questione della coerenza dell'aritmetica. La sua scuola si pone di sciogliere questa, formulando (come abbiamo visto per i numeri reali) una serie di assiomi che non contenessero l'idea di insieme. Tale idea accoglie numerosi consensi e nasce un gruppo di ricerca volto a tale scopo.

Ma perché escludere la teoria degli insiemi quando questa sembra ora fondata su una serie di postulati che non inducono più a paradossi (si veda la teoria della scuola logistica)? Poincaré (già presentato come esponente della scuola intuizionista e ideatore di un modello non euclideo) afferma a riguardo: *"Abbiamo messo un recinto attorno al gregge per proteggerlo dai lupi, ma non sappiamo se ci fossero già dei lupi nel gregge".* Con tale espressione lo studioso vuole far notare che le teorie logiche sugli insiemi costruiscono dei "paletti" che escludono delle contraddizioni note (sono quindi inseriti nella teoria dopo la scoperta di alcuni paradossi), ma lo sviluppo di una teoria può imbattersi in nuove contraddizioni in qualsiasi momento. E la matematica (nonostante questi possibili paradossi) deve tenere conto della logica: per i formalisti bisogna trattare contemporaneamente queste due e ogni ambito o disciplina deve avere la sua fondazione assiomatica logica e matematica. La logica è vista come un linguaggio di segni e di simboli che traducono enunciati in formule. Questi simboli non hanno di per sé significato, ma lo assumono dai sistemi formali di una matematica (assiomi, concetti, formule ben formate e regole di deduzione) che Hilbert e la sua scuola riescono in alcuni casi a dimostrare coerenti.

Un colpo definitivo sul tentativo di dimostrazione della coerenza del sistema formale dell'aritmetica lo infligge Kurt Gödel (1906-1978) che arriva ad affermare che un sistema formale come quello (che contiene qualsiasi branca matematica) è sicuramente incompleto, ovvero contiene enunciati che non possono essere dimostrati al suo interno. Vediamo a tal proposito i diversi teoremi di Gödel:

- *Teorema della completezza*. Una formula che sia realizzata in tutti i modelli di una teoria è dimostrabile in tale teoria. Ovvero un teorema in una teoria è dimostrabile solo se esso è valido.

- *Primo teorema d'incompletezza*. Se una teoria formale dell'aritmetica è non contradditoria, esiste una formula F della teoria che né F né non -F sono dimostrabili nella teoria. Ovvero una teoria formale dell'aritmetica non è completa.

- *Secondo teorema d'incompletezza*. Se una teoria formale dell'aritmetica è non contradditoria, non è possibile dimostrare la sua non-contraddittorietà con metodi formalizzabili all'interno di quella teoria. Ovvero l'enunciato G (in una teoria non contradditoria S) che afferma " S è una teoria non contradditoria" non è dimostrabile in S (tantomeno è dimostrabile non -G).

Questi teoremi portano a sostenere la non coerenza dei una teoria come quella dell'aritmetica. Si pensi ad esempio all'enunciato "questo enunciato è indimostrabile in questa teoria": se si riuscisse a dimostrare ciò, si negherebbe l'indimostrabilità dell'enunciato e si entrerebbe in una contraddizione; se non si riuscisse a dimostrare l'enunciato, non si potrebbe prendere per vera la sua indimostrabilità e anche in questo caso si arriverebbe ad un paradosso.

Il programma di Hilbert ha dunque fallito. Ma lascia nella storia matematica un segno profondo: se oggi consideriamo l'attività del matematico quella di cercare una dimostrazione (che prescinda dai contenuti specifici delle singole teorie) ad un teorema, è grazie ai risultati sulla teoria delle dimostrazioni che Hilbert e la sua scuola danno in eredità al mondo dei ricercatori.

3.4.LA SCUOLA STRUTTURALISTA

Nel 1933 un gruppo di matematici francesi (raccolti sotto lo pseudonimo di Nicolas Bourbaki, dal nome di Napoleone III) fonda questa scuola. Anch'essi elaborano una teoria degli insiemi assiomatica che possa superare i paradossi noti all'epoca, ma ciò che li rende rilevanti è l'esposizione di tutta la matematica in strutture e in tutta una serie di relazioni tra gli oggetti di questa scienza. Diffondono quindi nel mondo della ricerca un linguaggio comune e un quantitativo di nozioni di tipo standard che permettono la comunicabilità e la circolazione dei risultati di un progetto qualsiasi in un modo più facile e rapido. Questo gruppo esiste tutt'oggi (con il nome attuale di *Seminaire Bourbaki*) e pubblica annualmente dei *Rendiconti*.

4.0.CONCLUSIONE

Possiamo dire che tutti i tentativi di definire dei fondamenti certi della matematica (spostati su un piano logico) siano falliti. Per ironia della sorte, dopo secoli di ricerca, riscontriamo che la visione dei matematici greci dopo tutto non rappresenta qualcosa di superato ed arretrato, quanto piuttosto qualcosa che noi oggi recuperiamo: la matematica è intuizione e fantasia e la sua verità è riscontrata nelle sue applicazioni. Nella fisica, nella tecnologia, nell'economia, …

Questo non deve però trasformare questa materia in una "scienza dell'utile": la sua creatività e la sua artisticità continuino a permetterle di *sviluppparsi secondo i [suoi] principi, senza prestare alcuna attenzione alle tempeste che infuriano intorno a lei*, e continuino a permetterle *di proseguire passo dopo passo le sue consuete conquiste, che sono definitive e che non sarà mai necessario abbandonare.*[44]

[44] H. Poincaré, *The fondation of science*, 1946.

INDICE