Scomporre la somma di due quadrati

a cura di Metaliu Klara
realizzato con la supervisione del Prof. Fabio Breda
I.S.I.S.S. M. Casagrande, Pieve di Soligo, a.s. 2015/16

Abstract. *In questo articolo andremo a discutere la scomposizione della somma di due quadrati.*

Introduzione: Diversi tipi di binomi si possono scomporre in fattori, come la differenza tra quadrati che si può ridurre nella somma di due termini per la loro differenza:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Anche la differenza tra due cubi è riducibile secondo la seguente formula:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

In modo analogo, è possibile fattorizzare anche la somma tra due cubi:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Ma la somma tra due quadrati è scomponibile o è irriducibile? In questo articolo cercheremo di capire come e quando è possibile scomporre questo tipo di polinomio.

Enunciamo un risultato che ci aiuterà nella nostra analisi.

Teorema. *I polinomi irriducibili in $\mathbb{R}[x]$ sono i polinomi di primo e i polinomi di secondo grado con $\Delta < 0$.*

Il teorema ci dice che la somma $x^2 + a$ con $a \in \mathbb{R}_0^+$ è irriducibile in $\mathbb{R}[x]$ se e solo se $\Delta < 0$.
Infatti in questo caso $\Delta = 0 - 4a = -4a$ è negativo e quindi il polinomio non è scomponibile.

Quest'affermazione potrebbe essere contestata perché $-4a$ non è sempre minore di 0, dato che il suo valore dipende da quello attribuito ad a. Ma bisogna prestare attenzione al fatto che sia stata esplicitata la condizione per cui a deve essere un numero reale, positivo e diverso da 0 ($a \in \mathbb{R}_0^+$). Se a è positivo, il prodotto tra -4 e un qualsiasi numero positivo porterà sempre ad un numero negativo.

Stando al teorema, somme di quadrati tipo $x^2 + 4$ sono irriducibili in $\mathbb{R}[x]$ ma il teorema non sancisce che tutte le somme di quadrati siano irriducibili in $\mathbb{R}[x]$, per esempio $x^4 + a$ con $a \in \mathbb{Q}_0^+$, per il teorema, è riducibile in $\mathbb{R}[x]$ poiché è un polinomio di grado maggiore del secondo. Per scomporlo usiamo una tecnica che prende il nome di completamento del quadrato.

Tecnica del completamento del quadrato

Proviamo a scomporre il polinomio $x^4 + 4$. In questo binomio i monomi sono entrambi quadrati, rispettivamente di x^2 e 2. Si procede nel seguente modo, aggiungendo il termine mancante per poter scomporre il polinomio in un quadrato di binomio:

$$x^4 + 4 + 4x^2$$

Così facendo modifichiamo il polinomio di partenza ma dato che ciò non è possibile è necessario aggiungere anche l'opposto di questo termine per lasciare inalterata la somma.

$$x^4 + 4 + 4x^2 - 4x^2$$

Osservando il polinomio si può notare che non è altro che una differenza tra due termini, $x^4 + 4 + 4x^2$ e $4x^2$. Ma entrambi sono quadrati, cosa che rende il polinomio fattorizzabile in una somma per differenza secondo la formula $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$.

$$(x^4 + 4 + 4x^2) - (4x^2) = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 = (x^2 + 2 + 2x)(x^2 + 2 - 2x)$$

Così abbiamo che $x^4 + 4$ è riducibile in $\mathbb{Z}[x]$.

Ma quando $x^4 + a$ è riducibile in $\mathbb{Z}[x]$ e quando lo è in $\mathbb{Q}[x]$? Dipende dalla scelta di a. Nel nostro caso $a = 4$ quindi $\sqrt{4} \in \mathbb{Q}_0^+ \wedge 4 \in \mathbb{Q}_0^+$.

Che caratteristiche deve avere a? Scomponiamo $x^4 + a$ ripercorrendo il metodo del completamento del quadrato:

$$x^4 + a = x^4 + a + 2\sqrt{a}x^2 - 2\sqrt{a}x^2 = (x^2 + \sqrt{a})^2 - 2\sqrt{a}x^2 = (x^2 + \sqrt{a} + \sqrt[4]{4a}x)(x^2 + \sqrt{a} - \sqrt[4]{4a}x)$$

Le condizioni per a sono:

1. $a \in \mathbb{Q}_0^+$

   $\mathbb{Q}$ è l'insieme dove troviamo numeri interi e frazioni $\left\{... - 2, -1, 0, 1, 2... + \frac{1}{5}, +\frac{6}{7}... - \frac{4}{3}, -\frac{8}{5}...\right\}$.

   L'insieme $\mathbb{Q}_0$ comprende tutti questi numeri, escluso lo 0. Il termine a deve essere compreso in $\mathbb{Q}_0$ perché prendendo in considerazione altri insiemi come $\mathbb{R}$, potrebbe essere anche una radice cubica; in questo modo non sarebbe possibile usare la tecnica del completamento del quadrato così da rendere il binomio irriducibile in $\mathbb{Q}$.

2. $\sqrt{a} \in \mathbb{Q}_0^+$

   L' insieme dei numeri razionali, come già detto, comprende solo numeri interi e frazioni quindi non le radici. Se la radice di un numero n è interna a $\mathbb{Q}$ significa che n è un quadrato, quindi a deve essere un quadrato.

C'è un'altra caratteristica che a deve avere per rendere il binomio scomponibile in $\mathbb{Q}$: la sua radice deve essere l'esatta metà di un quadrato, cioè

$$\sqrt{a} = \frac{n}{2} \qquad \text{con} \qquad \sqrt{n} \in \mathbb{Q}$$

Questo perché il termine mancante è il doppio prodotto e dato che il primo monomio è x^2, affinché si possa procedere con la tecnica del completamento e arrivare alla differenza tra quadrati, $2\sqrt{a}$ deve essere un quadrato.
Ecco un altro esempio con $a \in \mathbb{Q}_0^+ \wedge \sqrt{a} \in \mathbb{Q}_0^+ \wedge \sqrt{a} = \frac{n}{2} \quad \text{con} \quad \sqrt{n} \in \mathbb{Q}$:

$$a = 64 \qquad 64 = 8^2 \qquad 8 = \frac{16}{2} \qquad \sqrt{16} \in \mathbb{Q}$$

$$x^4 + 64 = x^4 + 64 + 16x^2 - 16x^2 = (x^2+8)^2 - (4x)^2 = (x^2+8+4x)(x^2+8-4x)$$

Proviamo ad attribuire ad a il valore di una frazione, mantenendo comunque le caratteristiche precedentemente elencate.

$$a = \frac{81}{4} \qquad \frac{81}{4} = \left(\frac{9}{2}\right)^2 \qquad \sqrt{9} \in \mathbb{Q}$$

$$x^4 + \frac{81}{4} = x^4 + \frac{81}{4} + 9x^2 - 9x^2 = \left(x^2 + \frac{9}{2}\right)^2 - (3x)^2 = \left(x^2 + \frac{9}{2} + 3x\right)\left(x^2 + \frac{9}{2} - 3x\right)$$

Per confermare questa tesi eseguiamo la scomposizione con un numeri che non rispettano i parametri elencati.

$$a = 25 \qquad 25 = 5^2 \qquad 5 = \frac{10}{2} \qquad \sqrt{10} \notin \mathbb{Q}$$

$$x^4 + 25 = x^4 + 25 + 10x^2 - 10x^2 = (x^2+5)^2 - 10x^2$$

e

$$a = \frac{49}{9} \qquad \frac{49}{9} = \left(\frac{7}{3}\right)^2 \qquad \frac{7}{3} = \frac{14}{6} \qquad \sqrt{\frac{14}{3}} \notin \mathbb{Q}$$

$$x^4 + \frac{49}{9} = x^4 + \frac{49}{9} + \frac{14}{3}x^2 - \frac{14}{3}x^2 = \left(x^2 + \frac{7}{3}\right)^2 - \frac{14}{3}x^2$$

In questo modo abbiamo dimostrato che una somma $x^4 + a$ è riducibile in $\mathbb{Q}$ se e solo se:

- $a \in \mathbb{Q}+_0$
- $\sqrt{a} \in \mathbb{Q}_0^+$
- $\sqrt{a} = \frac{n}{2}$ con $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$

Fin da subito abbiamo escluso di chiederci se il binomio fosse fattorizzabile in $\mathbb{R}[x]$ perché la sua riducibilità è data dal teorema sopra infatti le radici sono interne a questo insieme. E' interessante però capire se la scomposizione può essere interna all'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi. Riprendiamo due degli esempi mostrati:

$$x^4 + 64 = x^4 + 64 + 16x^2 - 16x^2 = (x^2 + 8)^2 - (4x)^2 = (x^2 + 8 + 4x)(x^2 + 8 - 4x)$$

Questa prima scomposizione è evidentemente interna all'insieme $\mathbb{Z}[x]$ dato i coefficienti lo sono.

$$x^4 + \frac{81}{4} = x^4 + \frac{81}{4} + 9x^2 - 9x^2 = \left(x^2 + \frac{9}{2}\right)^2 - (3x)^2 = \left(x^2 + \frac{9}{2} + 3x\right)\left(x^2 + \frac{9}{2} - 3x\right)$$

In questo caso la scomposizione, pur essendo interna a $\mathbb{Q}[x]$, è esterna rispetto a $\mathbb{Z}[x]$ per la presenza delle frazioni, esterne all'insieme dei numeri interi.
Possiamo quindi constatare che per rendere la scomposizione di $x^4 + a$ interna a $\mathbb{Z}[x]$ è necessario che $a \in \mathbb{N}_0$. Solo un numero naturale diverso da zero con le caratteristiche prima elencate può mantenere la scomposizione interna all'insieme dei numeri interi.

In conclusione possiamo affermare che la somma di due quadrati $x^4 + a$ con $a > 0$ è scomponibile nell'insieme dei numeri razionali se e solo se

$$a \in \mathbb{Q}_0^+ \wedge \sqrt{a} \in \mathbb{Q}_0^+ \wedge \sqrt{a} = \frac{n}{2} \qquad \text{con} \qquad \sqrt{n} \in \mathbb{Q}$$

Considerando invece l'insieme dei numeri interi, il binomio diventa riducibile quando

$$a \in \mathbb{N}_0 \wedge \sqrt{a} \in \mathbb{N}_0 \wedge \sqrt{a} = \frac{n}{2} \qquad \text{con} \qquad \sqrt{n} \in \mathbb{N}$$