DUE MOTI UNIFORMEMENTE ACCELERATI PARTICOLARI

a cura di Vitali Marina
realizzato con la supervisione del Prof. Fabio Breda
I.S.I.S.S. M. Casagrande, Pieve di Soligo, a.s. 2015-2016

Abstract. *Dati due corpi che si muovono con moto uniformemente accelerato nello stesso verso cerco di trovare il loro punto di incontro, scoprendo che non sempre il risultato algebrico coincide con il risultato reale.*

PROBLEMA:
Alfredo parte da fermo con la sua moto nello stesso istante in cui, in quel punto di strada, Marina transita a bordo di un scooter alla velocità di $18m/s$. Alfredo subisce una accelerazione di $4m/s^2$ mentre Marina inizia a decelerare in modo costante (-8 m/s^2). Dopo quanto tempo e quanto spazio si incontrano?

LEGGI ORARIE DEI RISPETTIVI MOTI:

- legge generale: $s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$
- Alfredo:

$$s_A = 0 + 0t + \frac{1}{2}4t^2$$
$$\boxed{s_A = 2t^2}$$

- Marina:

$$s_M = 0 + 18t - \frac{1}{2}8t^2$$
$$\boxed{s_M = 18t - 4t^2}$$

GRAFICO ACCELERAZIONE/TEMPO:

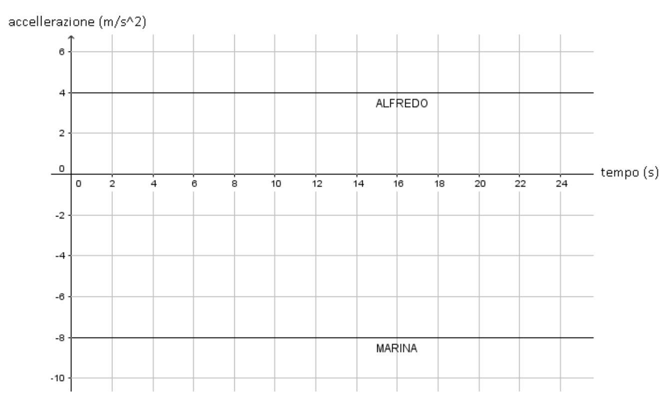


GRAFICO VELOCITÁ/TEMPO:

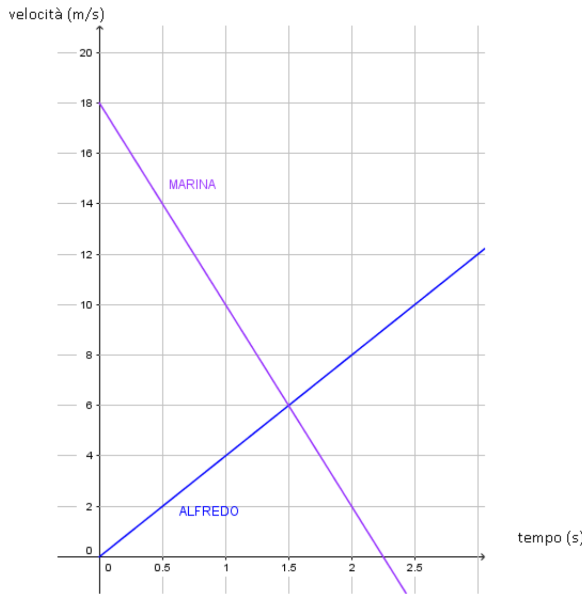
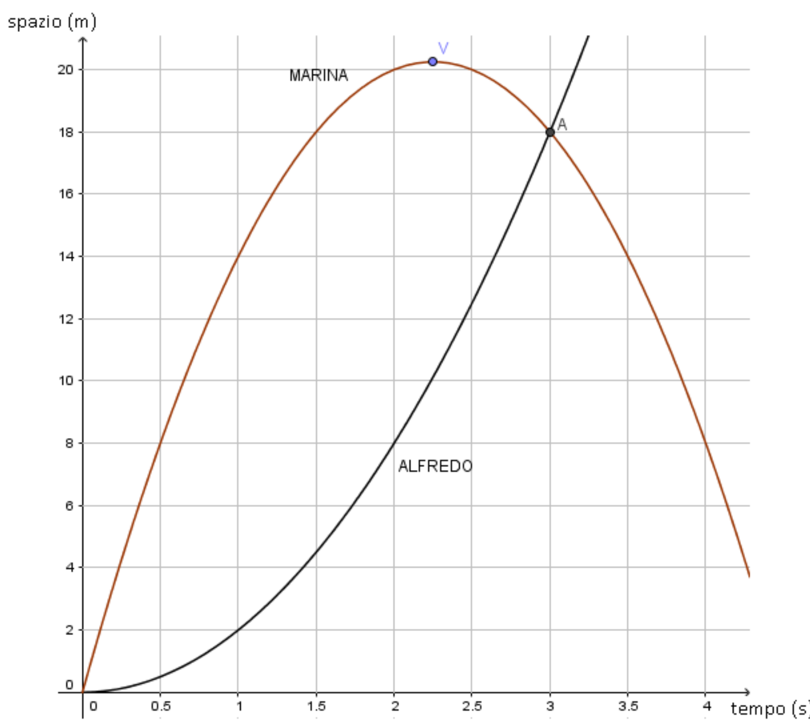


GRAFICO SPAZIO/TEMPO:



Da questo grafico si nota che i due corpi si dovrebbero incontrare alle coordinate del punto A.
Risoluzione sistema per trovare il punto di incontro A:

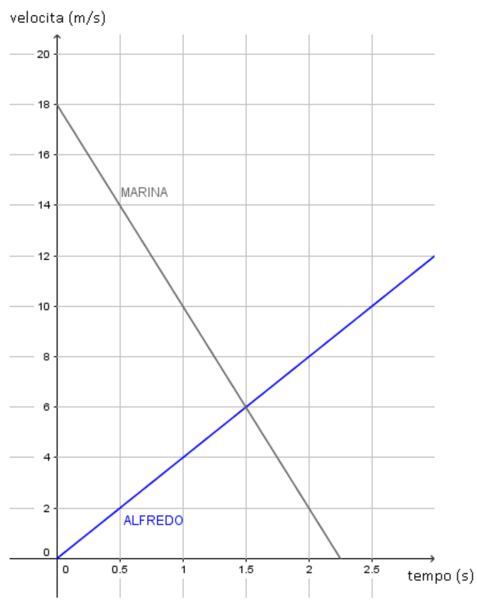
$$\begin{cases} s_A = 2t^2 \\ s_M = 18t - 4t^2 \end{cases} \quad \begin{cases} s_A = s_M \\ 2t^2 = 18t - 4t^2 \end{cases} \quad \begin{cases} / \\ 2t^2 - 18t + 4t^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} / \\ 6t^2 - 18t = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} / \\ 2t(3t-9) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} / \\ t = 0s \Rightarrow \text{partenza di Alfredo} \vee t = 3s \end{cases}$$

$$\begin{cases} s_A = 2t^2 \\ s_M = 18t - 4t^2 \end{cases} \quad \begin{cases} s_A = 2 \cdot 3^2 \\ s_M = 18 \cdot 3 - 4 \cdot 3^2 \end{cases} \quad \begin{cases} s_A = 18m \\ s_M = 18m \end{cases}$$

Risulterebbe che si incontrano dopo 3 s distanti 18 m dal punto di partenza di Alfredo. In realtà questo non accade perché quando Marina acquisisce una velocità pari a 0 m/s si ferma, non continua a decelerare e quindi non inizia a tornare indietro. Perciò il grafico delle velocità deve essere rappresentato solo nel primo quadrante perché la velocità non diventi negativa.

GRAFICO VELOCITA' CORRETTO:



Per rappresentare il moto di Marina in un grafico spazio/tempo, quella che prima risultava un parabola, dobbiamo tener conto che dopo le coordinate del vertice V ($2,25; 20,25$), cioè quando la velocità diventa uguale a 0, lo spazio non inizia a diminuire ma si mantiene costante (è ferma). Perciò da quel punto in poi diventa una semiretta parallela all'asse delle ordinate e l'equazione che rappresenta la legge oraria diventa:

$$s = \begin{cases} 18t - 4t^2 & \text{se} \quad 0 < t \leq 2,25 \\ 20,25 & \text{se} \quad t > 2,25 \end{cases}$$

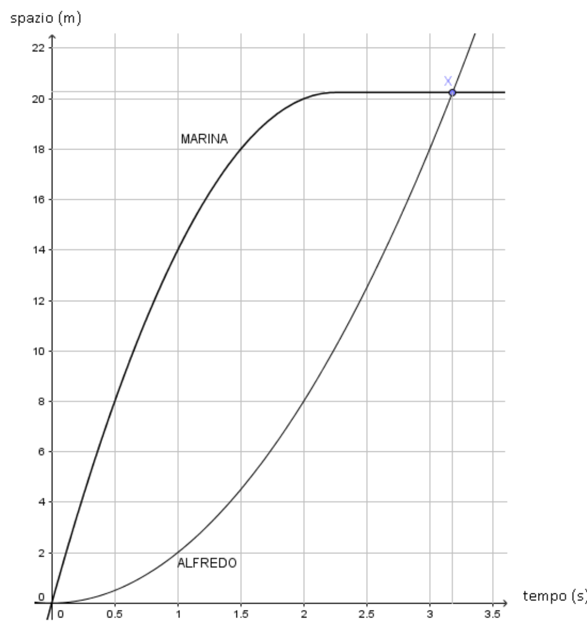
Il punto A sarebbe il punto di incontro se Marina dopo essersi fermata cominciasse a tornare indietro (la velocità sarebbe negativa). Il vero punto di incontro sarà X, un punto avente come coordinata y il vertice della parabola di Marina (20,25 m) e come coordinata x il tempo impiegato da Alfredo a raggiungere Marina che è ferma.

Il sistema per trovare questo punto è:

$$\begin{cases} s_A = 2t^2 \\ s_M = 20,25 \end{cases} \quad \begin{cases} s_A = s_M \\ 2t^2 = 20,25 \end{cases} \quad \begin{cases} / \\ \dfrac{2t^2}{2} = \dfrac{20,25}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} / \\ t = \pm\sqrt{\dfrac{20,25}{2}} \cong 3,2 \end{cases}$$

GRAFICO SPAZIO RIFATTO:



In conclusione i due corpi si incontreranno alla distanza di 20,25 m rispetto al punto di partenza di Alfredo, dopo circa 3,2 s.
Il risultato del sistema iniziale è accettabile solo se il valore delle ascisse trovato risolvendo il sistema è minore del valore delle ascisse del vertice della parabola con la concavità verso il basso. Cioè, graficamente, se il punto di intersezione delle due parabole si trova prima del vertice della parabola con la concavità verso il basso.

GENERALIZZAZIONE:

Nel problema precedente conoscevo le due velocità iniziali e le due accelerazioni. Utilizzando questi dati ho fatto dei grafici e costruito dei sistemi da cui ho dedotto che se avessi utilizzato un sistema che comprendeva le due leggi orarie per trovare un punto di incontro tra i due moti avrei sbagliato.
Senza fare grafici o sistemi avrei potuto lo stesso dire che la vera soluzione del problema era un'altra, sapendo solo che partono dallo stesso punto e che il primo corpo accelera a differenza del secondo che invece decelera?
Supponiamo che $a_1 > 0, a_2 < 0, V_{01} > 0, V_{02} > 0$ e che in entrambi i moti $S_0 = 0 \Rightarrow$ le leggi orarie sono le seguenti:

- $S_1 = V_{01}t + \frac{1}{2}a_1t^2$
- $S_2 = V_{02}t + \frac{1}{2}a_2t^2$

Inserendole in un sistema e ponendo $S_1 = S_2$:

$$\begin{cases} S_1 = V_{01}t + \frac{1}{2}a_1t^2 \\ \\ S_2 = V_{02}t + \frac{1}{2}a_2t^2 \end{cases} \quad \begin{cases} S_1 = S_2 \\ \\ V_{01}t + \frac{1}{2}a_1t^2 = V_{02}t + \frac{1}{2}a_2t^2 \end{cases} \quad \begin{cases} / \\ \\ V_{01}t + \frac{1}{2}a_1t^2 - V_{02}t - \frac{1}{2}a_2t^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} / \\ \\ t\left(\frac{t}{2}(a_1 - a_2) + (V_{01} - V_{02})\right) = 0 \end{cases}$$

A questo punto, utilizzando la legge dell'annullamento del prodotto, si può dire che t è 0 (il punto di partenza dei due corpi) oppure:

$$\frac{t}{2}(a_1 - a_2) + (V_{01} - V_{02}) = 0 \Rightarrow t = \frac{-2(V_{01} - V_{02})}{a_1 - a_2}$$

Sapendo che il vertice della parabola del secondo corpo (quello che decelera) ha come coordinate x, quelle che indicano il tempo, $\left(\frac{-V_{02}}{a_2}\right)$ quando questo valore è minore di quello che si trova utilizzando il sistema?
Devo risolvere la disuguaglianza:

$$\frac{-2(V_{01} - V_{02})}{a_1 - a_2} > \frac{-V_{02}}{a_2}$$

$$\frac{-2(V_{01} - V_{02})}{a_1 - a_2} + \frac{V_{02}}{a_2} > 0$$

$$\frac{-2 \cdot a_2 \cdot V_{01} + 2 \cdot a_2 \cdot V_{02} + V_{02} \cdot a_1 - V_{02} \cdot a_2}{a_1 \cdot a_2 - a_2^2} > 0$$

$$\frac{2 \cdot a_2 \cdot V_{01} - V_{02} \cdot a_2 - V_{02} \cdot a_1}{a_2^2 - a_1 \cdot a_2} > 0$$

Una frazione per essere positiva deve avere il numeratore e il denominatore concordi.
$a_2^2 - a_1 \cdot a_2$ è sicuramente positivo perché a_2^2 è un numero alla seconda $\Rightarrow$ è un numero positivo e dato che $a_1 > 0, a_2 < 0 \Rightarrow a_1 \cdot a_2$ è un valore negativo (il prodotto tra un numero positivo e uno negativo è un numero negativo) $\Rightarrow$ la differenza tra un numero positivo e un numero negativo è un numero positivo (sottrarre un numero negativo è come aggiungere il valore assoluto di quel numero).
A questo punto, visto che il denominatore è positivo, allora anche il numeratore deve essere positivo:

$$2 \cdot a_2 \cdot V_{01} - V_{02} \cdot a_2 - V_{02} \cdot a_1 > 0$$

$$a_2(2 \cdot V_{01} - V_{02}) - a_1 \cdot V_{02} > 0$$

$$a_2(2 \cdot V_{01} - V_{02}) > a_1 \cdot V_{02}$$

Il prodotto tra a_2 e V_{02} è negativo (V_{02} è positivo mentre a_2 è negativo) perciò se si divide per esso bisogna cambiare il verso della disequazione.

$$\frac{a_1}{a_2} > \frac{2 \cdot V_{01} - V_{02}}{V_{02}}$$

$$\frac{a_1}{a_2} > \frac{2 \cdot V_{01}}{V_{02}} - 1$$

Perciò se il rapporto tra la prima accelerazione e la seconda è maggiore del rapporto tra il doppio della velocità iniziale del primo corpo e quella del secondo corpo sottratto di 1 $\Rightarrow$ l'incontro tra le due parabole avviene dopo i vertici $\Rightarrow$ i due corpi si incontrano quando il secondo è già fermo $\Rightarrow$ si incontrano alle coordinate y del vertice della parabola del secondo moto e quando arriva il secondo corpo in quel punto.
Questa relazione si può anche applicare al problema precedente dove $V_{01} = 0$, $a_1 = 4m/s^2$, $V_{02} = 18m/s$, $a_2 = -8m/s^2$:

$$\frac{a_1}{a_2} > \frac{2 \cdot V_{01}}{V_{02}} - 1$$

$$\frac{4}{-8} > \frac{2 \cdot 0}{18} - 1$$

$$-\frac{1}{2} > -1$$

la relazione è vera perciò i due corpi si incontreranno quando uno è già fermo (come avevamo già detto prima).

Un caso particolare è quando $V_{01} = 0$.

Le leggi orarie diventano:

- $S_1 = \frac{1}{2}a_1 t^2$
- $S_2 = V_{02}t + \frac{1}{2}a_2 t^2$

Inserendole in un sistema e ponendo $S_1 = S_2$:

$$\begin{cases} S_1 = \frac{1}{2}a_1 t^2 \\ \\ S_2 = V_{02}t + \frac{1}{2}a_2 t^2 \end{cases} \quad \begin{cases} S_1 = S_2 \\ \\ \frac{1}{2}a_1 t^2 = V_{02}t + \frac{1}{2}a_2 t^2 \end{cases} \quad \begin{cases} / \\ \\ \frac{1}{2}a_1 t^2 - V_{02}t - \frac{1}{2}a_2 t^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} / \\ \\ t\left(\frac{t}{2}(a_1 - a_2) - V_{02})\right) = 0 \end{cases}$$

A questo punto, utilizzando la legge dell'annullamento del prodotto, si può dire che t è 0 (il punto di partenza dei due corpi) oppure:

$$\frac{t}{2}(a_1 - a_2) + (-V_{02}) = 0 \Rightarrow t = \frac{2V_{02}}{a_1 - a_2}$$

Come prima le coordinate x del vertice sono $\left(\frac{-V_{02}}{a_2}\right)$ confrontando con il valore del sistema:

$$\frac{2 \cdot V_{02}}{a_1 - a_2} > \frac{-V_{02}}{a_2}$$

In questo caso non si cambia il verso non vien cambiato perché avevano supposto che V_{02} fosse non negativo.

$$\frac{2}{a_1 - a_2} > \frac{-1}{a_2}$$

$$\frac{a_1 - a_2}{2} < -a_2$$

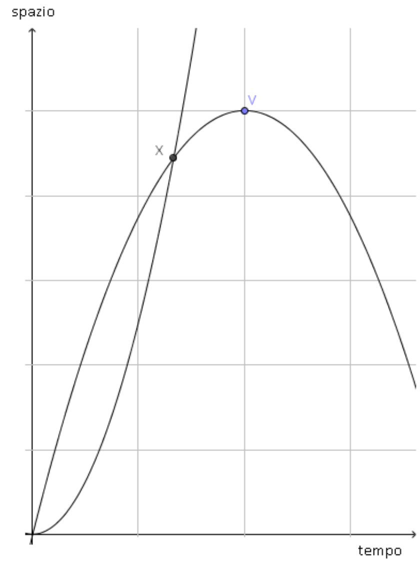
$$a_1 - a_2 < -2 \cdot a_2$$

$$a_1 - a_2 + 2 \cdot a_2 < 0$$

$$a_1 + a_2 < 0$$

Perciò se due corpi partono dallo stesso punto e uno parte da fermo, se la somma delle accelerazioni è negativa allora l'incontro avverrà quando il secondo corpo è già fermo.

Perciò riassumendo:

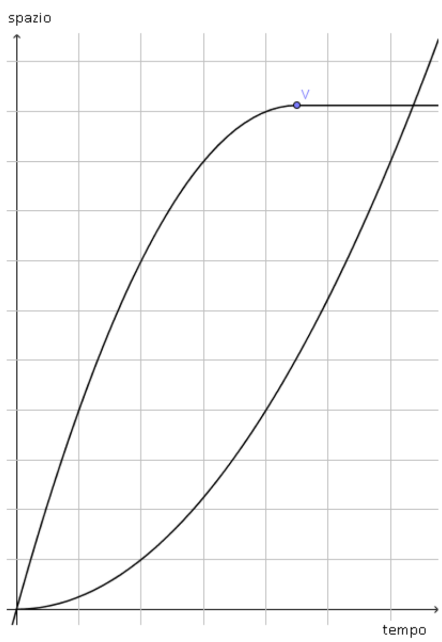


Se il corpo che decelera non si ferma prima che arrivi il secondo, perciò $\frac{a_1}{a_2} > \frac{2 \cdot V_{01}}{V_{02}} - 1$, allora lo spazio e il tempo si troveranno attraverso la risoluzione del sistema:

$$\begin{cases} S_1 = V_{01}t + \frac{1}{2}a_1 t^2 \\ \\ S_2 = V_{02}t + \frac{1}{2}a_2 t^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} S_1 = S_2 \\ \\ t = \frac{-2(V_{01} - V_{02})}{a_1 - a_2} \end{cases}$$

Sostituendo la t della prima equazione con il valore trovato si ottiene:

$$S = \frac{2\left[a_2 \cdot V_{01}^2 - V_{01} \cdot V_{02}(a_1 + a_2) + a_1 \cdot V_{02}^2\right]}{(a_1 - a_2)^2}$$

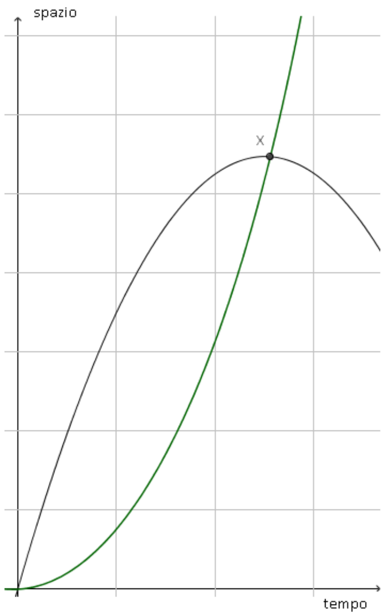


Se il corpo che decelera si ferma prima che arrivi l'altro corpo, $\frac{a_1}{a_2} < \frac{2 \cdot V_{01}}{V_{02}} - 1$, allora lo spazio sarà pari alle coordinate y del vertice della parabola che descrive il moto del primo corpo:

$$S = \frac{-V_{02}^2}{2a_2}$$

Il tempo si può trovare sostituendo nella legge oraria del primo corpo lo spazio appena trovato e prendendo solo il valore positivo:

$$t_{1,2} = \frac{-V_{01}}{a_1} + \sqrt{\frac{a_2 \cdot V_{01}^2 - a_1 \cdot V_{02}^2}{a_2 a_1^2}}$$



Infine, nel caso $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{2 \cdot V_{01}}{V_{02}} - 1$, il vertice della parabola del corpo che decelera potrebbe coincidere con un punto della parabola del corpo che accelera. Quindi t e S sono le coordinate del vertice della parabola S_2:

- $t = \dfrac{-V_{02}}{a_2}$
- $S = \dfrac{-V_{02}^2}{2 \cdot a_2}$