IL TANGRAM DEI POLIGONI

Metodo generale per decomporre poligoni equivalenti

Gioella Lorenzon e Prof. Fabio Breda

Abstract. *Lo scopo di questo articolo è proporre un metodo generale che permetta, dati due poligoni equivalenti qualsiasi, di equiscomporli. Per fare questo dimostreremo il teorema di Bolyai, cioè che poligoni equivalenti sono equiscomponibili, e potremo quindi concludere che per quanto riguarda i poligoni equivalenza ed equiscomponibilità sono la stessa relazione.*

Introduzione. E' evidente che due poligoni equiscomponibili siano anche equivalenti, ma poligoni equivalenti sono anche equiscomponibili? La risposta è affermativa ed è stata ottenuta quasi contemporaneamente dal matematico ungherese Bolyai (1832) e dal tedesco Gerwien, ufficiale e amatore di matematica (1833).

La dimostrazione che generalmente se ne fa utilizza il fatto che tutti i poligoni equivalenti si possono decomporre in due rettangoli equivalenti e quindi, per la proprietà transitiva della equiscomponibilità, sono equiscomponibili tra di loro. Noi vorremmo, oltre che dimostrare il teorema, trovare una procedura che descriva come devono essere decomposti i poligoni per ottenere una equiscomposizione.

Per fare ciò, dimostreremo che qualsiasi poligono è equiscomponibile con un parallelogramma equivalente e che parallelogrammi equivalenti sono equiscomponibili tra loro.

In ciascuno dei teoremi che proporremo saranno descritte le costruzioni che permetteranno di volta in volta di trovare la decomposizione necessaria per passare da un poligono ad un altro equivalente. Effettuando tali decomposizioni in successione si otterrà infine la decomposizione fra due poligoni equivalenti fissati, successione che costituisce dunque il nostro metodo generale di decomposizione.

Proporremo un esempio nel quale decomporremo un trapezio scaleno e un rettangolo equivalenti.

Le decomposizioni ottenute attraverso il nostro metodo non sono uniche, e ciò sarà verificato con degli esempi; inoltre descriveremo la soluzione proposta da Henry Ernest Dudeney al suo celebre “problema del merciaio” (1907) ovvero la decomposizione di un triangolo equilatero e un quadrato equivalenti e la confronteremo con la nostra procedura.

In questo articolo useremo il simbolo $\boxplus$ per indicare la relazione di equiscomponibilità.

Iniziamo fornendo la seguente definizione:

Definizione 1 *Due poligoni A e B si dicono equiscomponibili se possono essere scritti come unione finita di poligoni non aventi alcun punto interno in comune $A = P_1 \cup \cdot ... \cdot \cup P_n$, $B = Q_1 \cup \cdot ... \cdot \cup Q_n$, tali che $P_i \cong Q_i$ per ogni i, con $1 \leqslant i \leqslant n$.*

L'equiscomponibilità è una relazione di equivalenza, in particolare è transitiva, proprietà essenziale per le dimostrazioni che andremo a proporre in seguito. Dimostriamo questa proprietà, meno scontata delle altre.

Teorema 1 *Se un poligono A è equiscomponibile con un poligono B e B è equiscomponibile con un poligono C allora A e C sono equiscomponibili.*

Dimostrazione. Siano A e B due poligoni equiscomponibili. E' anche possibile suddividere il poligono B in modo diverso, per formare il poligono C che sarà ovviamente equiscomponibile con B.

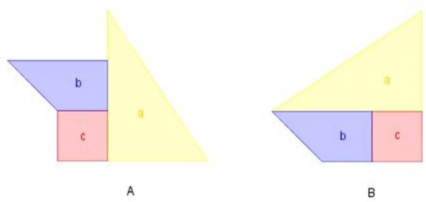

Figura 1

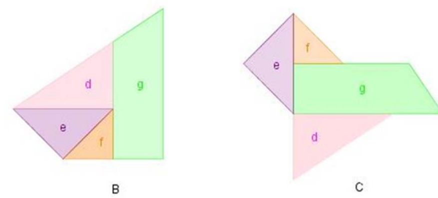

Figura 2

Sovrapponendo le divisioni operate su B per formare A e C si ottiene la decomposizione necessaria per costruire sia il poligono A che il poligono C.

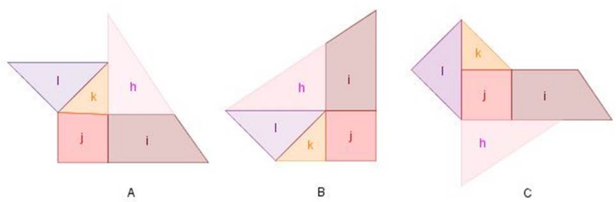

Figura 3

E' quindi possibile affermare che A e C sono equiscomponibili perché entrambi equiscomponibili con B ∎

Iniziamo a descrivere la procedura di decomposizione. Una prima conclusione a cui vogliamo arrivare è che un qualsiasi poligono con n lati è equiscomponibile con un quadrilatero ad esso equivalente. Per fare questo dimostreremo tre precedenti teoremi.

Teorema 2 *Un triangolo è equiscomponibile con un parallelogramma che abbia stessa base e metà altezza.*

Dimostrazione. Sia ABC un triangolo; dimostriamo che esso è equiscomponibile con il parallelogramma $ABKJ$ avente la stessa base del triangolo e altezza congruente alla metà di quella del triangolo.

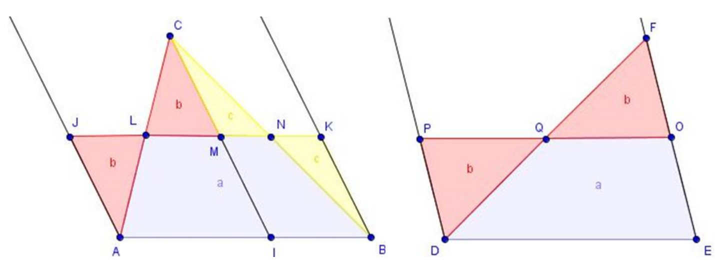

Figura 4

Tracciamo una semiretta BK generica e la semiretta AJ e il segmento CI paralleli ad essa. Sia M il punto medio di CI; tracciamo il segmento JK parallelo ad AB passante per M. Risulta $ALJ \cong LMC$ e

$NKB \cong MNC$, quindi triangolo e parallelogramma sono equiscomponibili. L'altezza del parallelogramma risulta essere metà dell'altezza del triangolo. La scelta della semiretta KB è arbitraria, può coincidere con un lato del triangolo oppure no, come si vede nella figura 4 a destra ■

Teorema 3 *Un triangolo è equiscomponibile con un altro triangolo che abbia stessa altezza e stessa base.*

Dimostrazione. Dopo aver scomposto il triangolo iniziale in un parallelogramma di stessa base e metà altezza avente lato parallelo al lato del secondo triangolo tramite il teorema 2, basta scomporre il parallelogramma nel secondo triangolo col procedimento inverso.

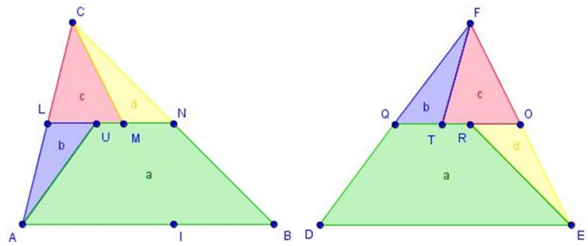

Figura 5

Quindi per costruire il secondo triangolo partendo dal primo dobbiamo tagliare lungo il segmento CM parallelo a FE, lungo il segmento LM parallelo ad AB e passante per il punto medio M di CI, lungo il segmento AU parallelo a DF e poi disporre i tre triangoli come in figura mantenendo il quadrilatero $ABNU$ nella sua posizione ■

Teorema 4 *Un poligono di n lati è equiscomponibile con un poligono di n-1 lati equivalente al primo.*

Dimostrazione. Preso un poligono qualunque, per esempio un pentagono $ABCDE$, unendo i due vertici A e D come in figura sotto si ottiene un triangolo ABE che, per il teorema 3, può essere decomposto nel triangolo ADF con stressa base e stessa altezza, cosicché il poligono iniziale avente 5 lati diventi equiscomponibile con il poligono $ABCDF$ di 4 lati.

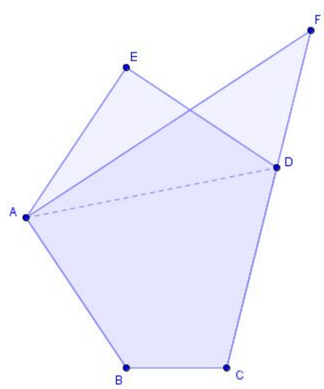

Figura 6

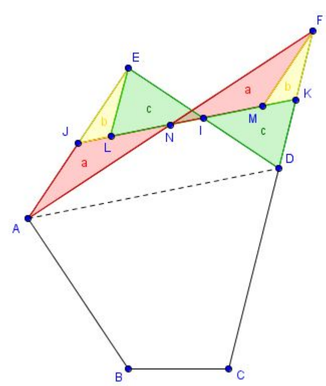

Figura 7

■

Dunque possiamo concludere che dato un poligono qualsiasi di n lati è possibile decomporlo per creare un quadrilatero. A sua volta il quadrilatero può essere decomposto per creare un parallelogramma grazie al successivo teorema.

Teorema 5 *Un quadrilatero è equiscomponibile con un parallelogramma equivalente.*

Dimostrazione. Dato un quadrilatero qualsiasi $ABCD$ e tracciata una delle diagonali, si ottengono due triangoli con la base in comune. Attraverso il teorema 2 è possibile decomporre ciascun triangolo in un parallelogramma equivalente. E' sufficiente fare in modo che i lati dei parallelogrammi in cui i due triangoli vengono decomposti giacciano sulle stesse rette perché dai due triangoli si ottenga un unico parallelogramma equivalente all'intero quadrilatero.

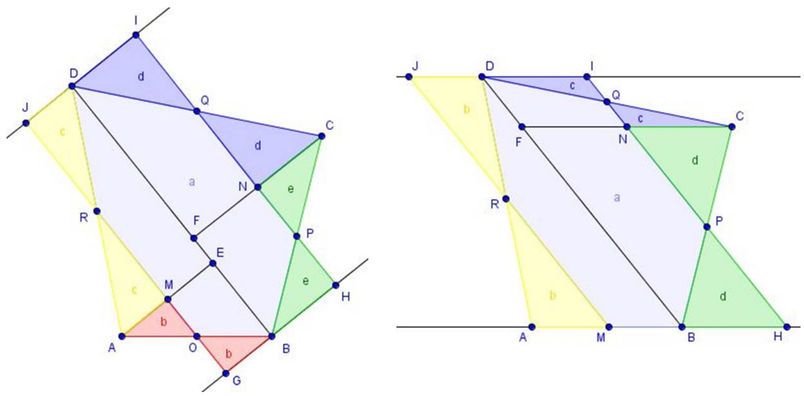

Figura 8

La costruzione sarà quindi la seguente: tracciamo una delle diagonali del quadrilatero $ABCD$, ad esempio BD, e otteniamo così i due triangoli DBA e DBC; tracciamo due rette parallele GH e IJ passanti per i vertici B e D e due segmenti AE e CF paralleli ad esse. Per i punti medi M e N si AE e CF conduciamo i due segmenti GJ e HI paralleli alla base BD, che intersecano i lati del quadrilatero in O, P, Q, R e S. In questo modo risulta: $AMO \cong OBG$, $AMR \cong RDJ$, $CNQ \cong QDI$ e $CNP \cong PBH$, ovvero $ABCD \boxplus GHIL$. La scelta delle rette GH e IJ è arbitraria, una di esse può coincidere con un lato del quadrilatero oppure no ■

Teorema 6 *Un parallelogramma è equiscomponibile con un parallelogramma equivalente di base fissata.*

Dimostrazione. Dato un parallelogramma $ABCD$, preferibilmente di base minore rispetto a quella del parallelogramma equivalente $BEHG$ che vogliamo ottenere[1], prolunghiamo il lato CD e a partire dal vertice B tracciamo un segmento congruente alla base del parallelogramma $BEHG$ che intersechi il prolungamento di CD in E. Costruiamo il parallelogramma $ABEF$ equivalente ad $ABCD$ (perché hanno stessa base AB e stessa altezza) e il parallelogramma $BEHG$, di base BE, anch'esso equivalente ad $ABEF$. Si ha quindi che $ABCD$ e $BEHG$ sono equivalenti per la proprietà transitiva.

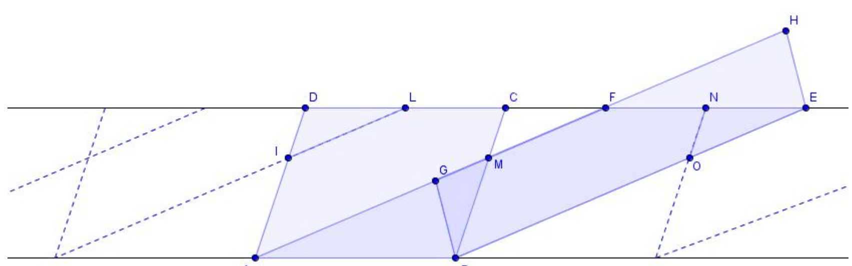

Figura 9

[1]Per semplicità preferiamo la costruzione a partire dal parallelogramma di base minore, ma ciò non è strettamente necessario, infatti la costruzione resta valida anche se il parallelogramma di partenza ha la base maggiore rispetto a quella del secondo, purché quest'ultima sia maggiore dell'altezza del primo parallelogramma.

Prolunghiamo anche AB, base in comune fra $ABCD$ e $ABEF$ e segniamo su di esso una serie di segmenti congruenti alla base AB e dagli estremi tracciamo i segmenti paralleli al lato BC e al lato BE.

In questo modo avremo suddiviso i tre parallelogrammi in poligoni congruenti, ovvero $ABCD \boxplus BEHG$.

Inoltre, nel caso in cui l'angolo EBC sia minore dell'angolo EBC, si rende necessaria la costruzione di un segmento AP parallelo a BG e di EQ parallelo a BM, come in figura sotto.

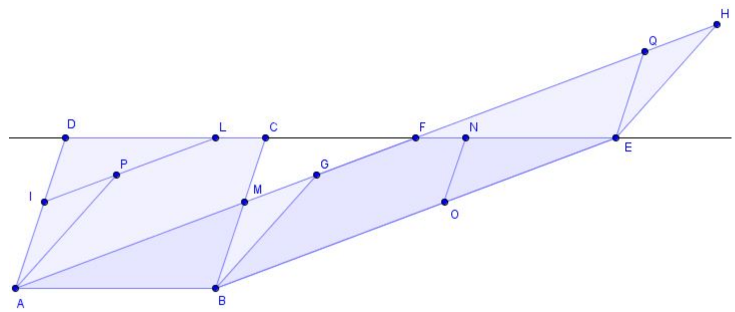

Figura 10

Nel caso in cui i due parallelogrammi equivalenti abbiano la stessa base e, di conseguenza, la stessa altezza, la costruzione del parallelogramma $BEHG$ è inutile: è sufficiente tracciare i due parallelogrammi $ABCD$ e $ABEF$ in modo che le loro basi coincidano, poi prolungare i lati AB e CD e procedere segnando sul prolungamento di AB i segmenti congruenti ad AB stesso e tracciando dagli estremi i segmenti paralleli ai lati dei due parallelogrammi. Avremo così decomposto i due parallelogrammi in poligoni congruenti, ovvero $ABCD \boxplus ABEF$. ∎

Siamo ora in grado di riassumere la procedura cercata.

Il METODO GENERALE PER DECOMPORRE DUE POLIGONI EQUIVALENTI A e B è dato dai seguenti passaggi:

1. Dato il poligono A di n lati, attraverso il teorema 4 lo decomponiamo in un poligono di n-1 lati e ripetiamo lo stesso procedimento $n-4$ volte per ottenere un quadrilatero. Nel caso in cui uno dei poligoni iniziali sia un triangolo, o che entrambi lo siano, li decomponiamo in parallelogrammi attraverso il teorema 2.

2. Attraverso il teorema 5 decomponiamo il quadrilatero in un parallelogramma A'.

3. Ripetiamo i passaggi 1. e 2. per decomporre il poligono B nel parallelogramma B'.

4. Attraverso il teorema 6 otteniamo la decomposizione dei parallelogrammi A' e B'.

Da quanto detto sopra possiamo anche concludere che:

Teorema 7 *Due poligoni sono equivalenti se e solo se sono equiscomponibili.*

Il concetto di estensione superficiale è introdotto come intuitivo, e si dice successivamente che due poligoni sono equivalenti se hanno stessa estensione. Possiamo ora dire che due poligoni sono equivalenti se e solo se sono equiscomponibili. E' chiaro però che cosi facendo verremmo a restringere notevolmente la possibilità di analisi in quanto non saremo in grado di ragionare su figure a contorno non poligonale.

Proponiamo nel seguente esempio come decomporre un quadrilatero in un altro equivalente, ad esempio un trapezio scaleno $ABCD$ e un rettangolo $FGHI$.

Esempio. Decomponiamo il trapezio $ABCD$ nel parallelogramma $FGNJ$ mediante il teorema 5. Nel caso del trapezio, in cui due lati sono paralleli, la scomposizione risulta particolarmente semplice, infatti è sufficiente tagliare lungo i due segmenti che uniscono ciascuno dei due punti medi delle basi con uno dei punti medi dei lati (vedi figura sotto).

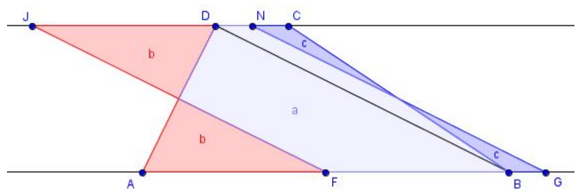

Figura 11

Attraverso il teorema 6 otteniamo la decomposizione tra il parallelogramma $FGNJ$ e il rettangolo $FGHI$ (figura 12).

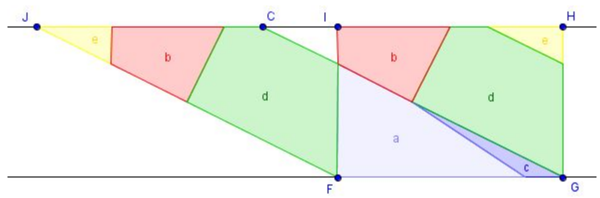

Figura 12

Pertanto la decomposizione tra trapezio e rettangolo è rappresentata in figura 13.

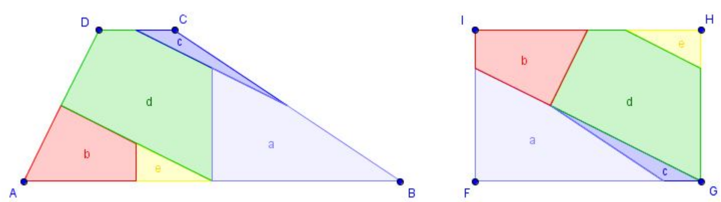

Figura 13

Dobbiamo comunque osservare che la decomposizione che abbiamo descritto sopra non è unica, infatti nei prossimi esempi dimostriamo che si possono trovare delle decomposizioni diverse. Prima proporremo una decomposizione fra trapezio scaleno e rettangolo, alternativa a quella appena illustrata ottenuta attraverso un metodo leggermente diverso da quello descritto in questo articolo; poi troveremo delle decomposizioni in casi particolari.

Esempio. Per decomporre il trapezio scaleno $ABCD$ e il rettangolo $FGHI$ li decomponiamo in triangoli, mediante la decomposizione di un poligono di n lati in un altro equivalente di $n-1$ lati; i due triangoli verranno decomposti in parallelogrammi equivalenti che saranno a loro volta decomposti.
Iniziamo con il decomporre il trapezio scaleno in un triangolo (teorema 4).

Poiché per decomporre due triangoli equivalenti di base e altezze diverse occorre passare attraverso la decomposizione in parallelogrammi, ed essendo il rettangolo un parallelogramma, evitiamo il passag-

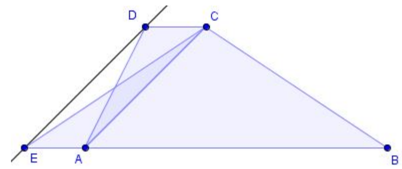

Figura 14

gio superfluo di decomporre anche il rettangolo in triangolo, per decomporlo invece direttamente nel parallelogramma equivalente al triangolo EBC (teorema 6).

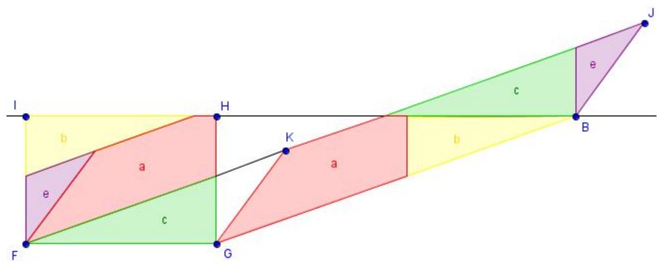

Figura 15

Dal parallelogramma risaliamo poi al triangolo EBC (teorema 2).

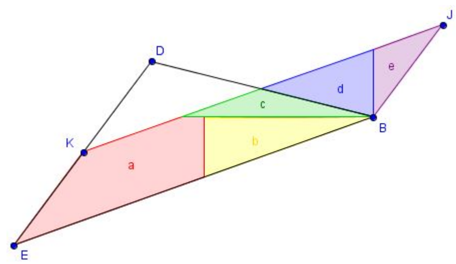

Figura 16

Avremo quindi la seguente scomposizione fra rettangolo e triangolo.

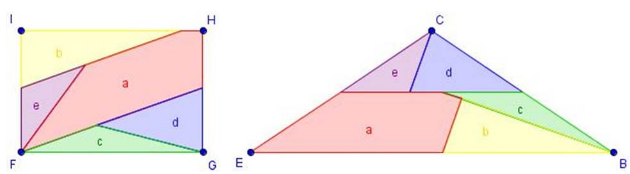

Figura 17

Decomponiamo il triangolo nel trapezio iniziale.

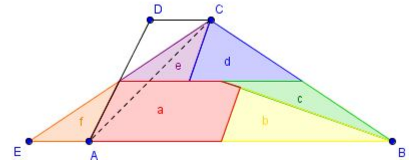

Figura 18

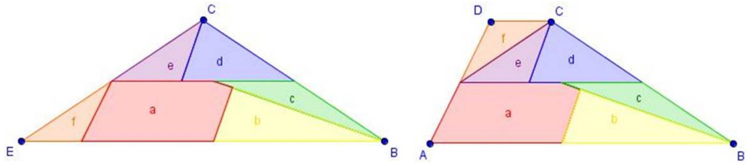

Figura 19

Ottenendo questa decomposizione fra triangolo e trapezio:

Dunque la decomposizione complessiva, fra rettangolo e trapezio, sarà la seguente, diversa da quella proposta nell'esempio precedente anche per numero di pezzi: 5 prima e 6 ora.

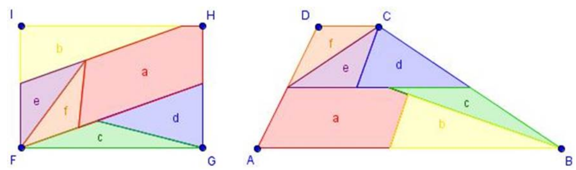

Figura 20

Esempio. In alcuni casi si possono notare delle caratteristiche specifiche dei poligoni analizzati e decomporre in base a queste. Per esempio il trapezio rettangolo $ABCD$ in figura, avente $AB = 9$, $BC = 5$ e $DC = 1$ ed equivalente al quadrato $EFGH$ di lato 5 può essere decomposto in modo particolare. Sia M il punto medio di BC, il segmento MN parallelo alle basi del trapezio risulta lungo 5 e il segmento NO parallelo a BC risulta lungo 2.5. Quindi, sia $RG = 1$, P punto medio di EH e PQ parallelo a EF, allora $AON \cong PRH$, $NMCD \cong PQGR$ e $OBMN \cong EFQP$. Cioè $ABCD \boxplus EFGH$.

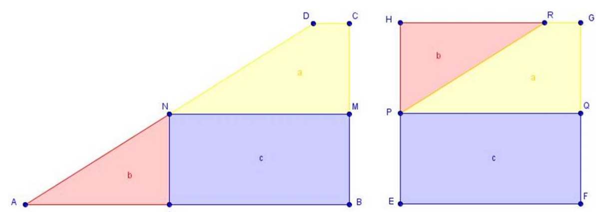

Figura 21

Esempio. Un esempio interessante di decomposizione è "The Haberdasher's Puzzle" o "problema del merciaio", di Henry Ernest Dudeney (10 aprile 1857-23 aprile 1930) noto come uno dei più importanti creatori di enigmi matematici britannici. Dudeney propose questo problema all'interno del libro "The Canterbury Puzzles and Other Curious Problems" nel 1907, nel quale si spiega come decomporre un triangolo equilatero in un quadrato equivalente. La soluzione proposta da Dudeney è rappresentata nella figura 22 e ora spieghiamo come si costruisce.

Dato il triangolo equilatero ABC, si tracci il punto medio D del lato BC e si tracci la semiretta AD sulla quale si individui il punto E esterno al triangolo tale che $DE \cong DC$. Si tracci la circonferenza di diametro AE contenente E e si individui il punto G di intersezione tra la circonferenza e la semiretta BC.

Il segmento DG diventa il lato del quadrato equivalente al triangolo ABC, poiché, per il teorema di Euclide $DG^2 = AD \cdot DE$ ma $DE \cong DC \cong \dfrac{BC}{2}$ quindi $DG^2 = AD \cdot \dfrac{BC}{2}$ cioè triangolo e quadrato risultano equivalenti.

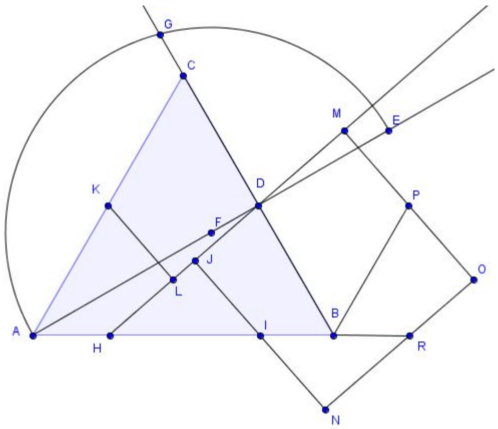

Figura 22

Ora si tracci il punto H su AB tale che $DH \cong DG$ e il punto I su AB tale che $HI \cong DC$. Da I conduci la perpendicolare IJ a HD e lungo la semiretta HD costruisci il segmento JM congruente a HD. Lungo la semiretta JI individua il segmento JN congruente a JM. Si tracci la perpendicolare ON a JN e la perpendicolare OM a MJ per completare il quadrato. Da K, punto medio di AC, conduci il segmento KL perpendicolare a HD e da B conduci il segmento BP parallelo ad AC. Indica con R il punto di intersezione tra la semiretta AB e il segmento NO.

Per quanto detto sopra triangolo e quadrato risultano equivalenti e il triangolo viene diviso in quattro poligoni che vanno a comporre il quadrato. Cominciamo a dimostrare che il triangolo $HIJ \cong INR$.

Prima di tutto dobbiamo dimostrare che IJ è metà di JN così $IJ \cong IN$ e i due triangoli rettangoli sono congruenti. Per far questo dimostriamo che IJ risulta essere metà di $DH \cong JN$. Conduciamo il segmento DS perpendicolare ad AB.

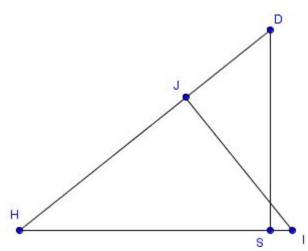

Figura 23

I triangoli HIJ e HSD sono simili quindi vale la proporzione $IJ : HI = DS : HD$.
Quindi $IJ = \dfrac{HI \cdot DS}{HD} = \dfrac{BC}{2} \cdot \dfrac{AD}{2} \cdot \dfrac{1}{HD}$. Sopra abbiamo dimostrato che $DG^2 = AD \cdot \dfrac{BC}{2}$ allora possiamo concludere che $IJ = \dfrac{DG^2}{2HD} = \dfrac{DG}{2}$.

Anche se sembra che H e I siano le proiezioni di K e D su AB si può dimostrare che la proiezione di D su AB sia un punto S a sinistra di I come in figura. Infatti basta verificare che $HS < HI$ e questo deriva dal fatto che

$$AB > AD \Rightarrow AB - AD > 0 \Rightarrow (AB - AD)^2 > 0 \Rightarrow AB^2 - 2AD \cdot AB + AD^2 > 0 \Rightarrow$$

$$2AD \cdot AB - AD^2 < AB^2 \Rightarrow AD \cdot \frac{AB}{2} - \frac{AD^2}{4} < \frac{AB^2}{4} \Rightarrow DH^2 - DS^2 < HI^2 \Rightarrow$$

$$HS^2 < HI^2 \Rightarrow HS < HI$$

Dunque IJ è metà di JN e quindi $IJ \cong IN$, perciò i triangoli HIJ e IRN sono congruenti.

E' molto facile verificare che i triangoli $HIJ \cong DMP$ poiché $HJ \cong MD$. Ma anche $INR \cong KDL$, perché $IR \cong KD$, quindi sono tutti e quattro congruenti. I triangoli equilateri KDC e DPB risultano congruenti dato che $DP \cong KD$ quindi $KCDL \cong DMPB$.

Infine $KA \cong PB$, $KL \cong PO$, $HL \cong OR$ e per la costruzione delle rette gli angoli $A\widehat{K}L \cong B\widehat{P}O$ e $K\widehat{L}H \cong P\widehat{O}R$ quindi per un criterio di congruenza dei quadrilateri risulta che $AKLH \cong BPOR$.

Otteniamo così la decomposizione voluta.

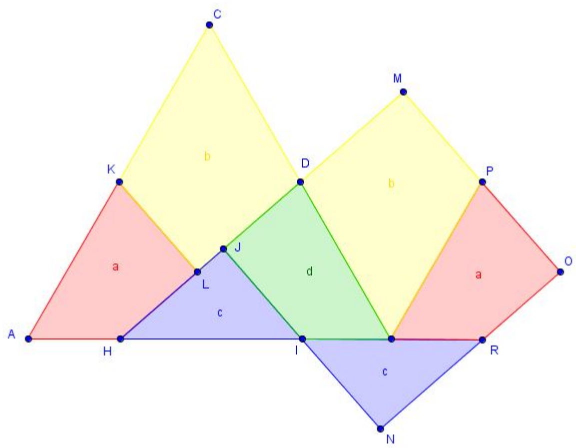

Figura 24

La decomposizione proposta da Dudeney divide triangolo e quadrato in 4 parti, mentre la decomposizione che si ottiene con il metodo descritto in questo articolo porta a dividere i due poligoni in 5 parti.

Il nostro metodo risulta, però, più generale perchè applicabile a qualsiasi poligono.

Vediamo come, seguendo il nostro procedimento, si riesce a decomporre il triangolo equilatero.

Esempio. Dato un triangolo equilatero ABC lo decomponiamo nel parallelogramma $ABDE$ come descritto nel teorema 2.

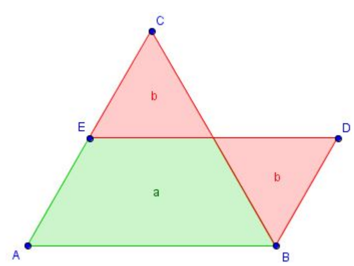

Figura 25

Otteniamo la scomposizione tra il parallelogramma $ABDE$ e il quadrato $PQRS$ attraverso il teorema 6.

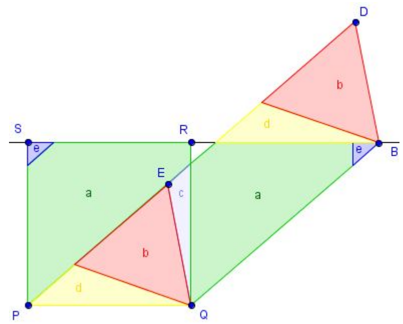

Figura 26

Pertanto, la scomposizione tra triangolo equilatero e quadrato sarà la seguente.

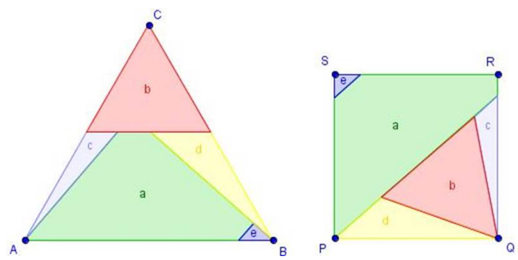

Figura 27