ELEMENTI DI RELATIVITA' SPECIALE

In questa dispensa verranno trattati alcuni temi inerenti la teoria della relatività speciale, caso particolare della teoria della relatività generale di Einstein, allo scopo di comprendere le ragioni dell'introduzione di tale nuovo paradigma per la fisica ed analizzare alcune fra le più rilevanti conseguenze sia per quanto riguarda la previsione di nuovi fenomeni, sia per le importanti implicazioni storico-filosofiche.

1 La crisi della fisica classica

Molteplici furono le scoperte e gli esperimenti che misero in crisi l'impianto della Fisica tra la fine del secolo XIX e l'inizio del XX, tanto che si opera una fondamentale distinzione fra la fisica cosiddetta *classica* (che si basa sulle leggi della meccanica/dinamica di Newton e Galileo) e quella *moderna*, che si fonda invece sulle due teorie fisiche più recenti, ossia la *relatività* e la *meccanica quantistica*.

Questa nuova formulazione della fisica, che come vedremo, non cancella l'impostazione classica, ma la include nella teoria moderna come approssimazione particolare, sostanzialmente deve la propria origine ad una serie di riflessioni che ruotavano attorno all'insanabile contraddizione fra:

- il principio di relatività di Galileo sui sistemi di riferimento, che, come vedremo, postula che la formulazione delle leggi della fisica debba essere la stessa in tutti i sistemi inerziali. In particolare, tra un sistema inerziale O ed un altro O' (in moto quest'ultimo con velocità v giacente sull'asse x rispetto al primo), sussistono le trasformazioni di Galileo:

$$\begin{cases} x' &= x - vt \\ t' &= t \end{cases}$$

- La teoria dei campi, che mostrava come l'istantaneità delle interazioni (derivata dall'assenza di termini temporali nell'espressione delle due forze fino ad allora conosciute, ossia la forza di gravità e quella elettrostatica) dovesse essere ascrivibile all'azione di un campo, generato dalla sorgente della forza considerata, che faceva da mediatore tra la sorgente stessa e la particella che subiva detta interazione

- la teoria dell'elettromagnetismo, che, indagando sulla forza instaurantesi fra due cariche, giungeva a dimostrare come l'interazione-campo dovesse propagarsi con velocità finita, pari a $c = 300.000 Km/s$

1.1 la teoria dei campi

L'introduzione del concetto di campo appariva una soluzione al problema dell'istantaneità delle interazioni. Le forze allora conosciute, quella di gravità $F = G\frac{M_1 M_2}{r^2}$ e quella di Coulomb $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}$ avevano delle espressioni prive di riferimenti temporali. Dunque due masse o due cariche risentivano dell'interazione reciproca istantaneamente anche anche se fossero poste a grandissima distanza.

Questa conseguenza controintuitiva poteva essere apparentemente superata pensando che la presenza di una massa o di una carica perturbasse istantaneamente lo spazio circostante, generando un campo di interazione (campi detti rispettivamente *campo gravitazionale* per le masse e *campo elettrostatico* per le cariche), che faceva da mediatore tra particella sorgente e particella subente l'interazione. In altre parole, il supporto fisico (lo spazio-tempo della relatività), già presente anche in assenza di sorgenti, viene perturbato dalla presenza di una sorgente. Si pensi ad un lenzuolo su cui viene appoggiata una pallina di massa m: essa forma un infossatura nel lenzuolo, che viene così deformato dalla sua presenza. In tal modo, una seconda pallina può cadere in tale infossatura se si trova ad una conveniente distanza. La deformazione del lenzuolo viene quindi ad essere istantanea, spostando il problema dall'istantaneità dell'interazione all'istantaneità della propagazione del campo. In realtà, come vedremo, anche il campo si propaga con una velocità limite finita, che è, al massimo, quella della luce nel vuoto.

1.2 la propagazione finita delle interazioni

La teoria dell'elettromagnetismo, elaborata alla fine del secolo XIX, esamina le caratteristiche del campo elettromagnetico, facendo vedere come i fenomeni elettrici (interazione fra cariche) ed i fenomeni magnetici (interazione fra magneti) siano manifestazione della stessa interazione (detta per l'appunto elettromagnetica) e soprattutto arrivando alla formulazione di quattro equazioni. Queste ultime, note come equazioni di Maxwell, regolano le proprietà del campo elettrico E e del campo magnetico B, mostrando come la variazione temporale dell'uno sia collegata all'altro ed in che modo la distribuzione spaziale di E e B siano collegate alla proprietà della sorgente dei campi stessi.

In modo particolare, la dipendenza temporale del campo elettromagnetico ha come conseguenza cruciale il fatto che si possa calcolare la velocità con cui detto campo si propaga. Sorprendentemente, le equazioni di Maxwell prevedono che il campo elettromagnetico ha le proprietà di un'onda il cui fronte, nel vuoto, avanza con una velocità che vale circa $c = 299.792.458 m/s$.

Tale velocità coincide perfettamente con la velocità nel vuoto dei segnali luminosi, che fu misurata con precisione già all'inizio del 1800 (esperienze di Roemer e di Fizeau). Ciò dimostra che anche la luce è un campo elettromagnetico, ma soprattutto che esiste una velocità limite alla propagazione delle interazioni. In definitiva, quindi, un campo non si può propagare con velocità maggiore di c e nessuna interazione può essere quindi istantanea!

1.3 Il principio di Relatività di Galileo

E' stato visto che le leggi della dinamica sono invarianti secondo le trasformazioni di Galileo, ossia si può concludere che tutte le leggi del moto hanno la stessa formulazione in tutti i sistemi di riferimento inerziali. Detto in altro termini, non è possibile attraverso il solo studio del moto di un oggetto distinguere un sistema inerziale (in quiete o in moto rettilineo uniforme) dall'altro. Tutti i sistemi di riferimento inerziali sono pertanto equivalenti ai fini dello studio del moto.

Ciò costituisce il principio di relatività galieliano. Inoltre sarebbe possibile allora l'esistenza di un sistema assoluto, al quale tutti gli altri sistemi inerziali sono, sotto tale principio, equivalenti. Sfumata la possibilità di trovare nell'Universo un siffatto sistema, era inizialmente stato introdotto una sorta di supporto assoluto, il cosiddetto *etere cosmico*. La Terra si dovrebbe allora muovere attraverso ques'etere cosmico, cosicchè, essendoci una velocità relativa, la velocità della luce cambi al cambiare della direzione di propagazione. Si dovrebbe allora misurare un diverso valore di c a seconda che la propagazione, ad esempio di un raggio laser, avvenga concordemente o meno rispetto alla direzione di spostamento della Terra rispetto all'etere.

Questo fu l'oggetto dell'esperimento intrapreso da Michelson e Moreley nel 1881, che diede tuttavia risultati negativi ed aprì la strada ad una delle ipotesi più importanti della teoria della relatività. Non solo non può esistere l'etere cosmico e quindi un sistema di riferimento assoluto, ma il campo elettromagnetico si deve propagare in tutte le direzioni con la stessa velocità, pari a c (isotropia della velocità della luce).

Anche l'ipotesi dell'equivalenza dei sistemi inerziali, inoltre, viene a cadere. La costanza della velocità della luce nei sistemi di riferimento, prevista dalle equazioni di Maxwell, depone a favore della teoria dell'elettromagnetismo ed anzi, ne è la prova più schiacciante.

Si può altresì provare che dette equazioni non sono invarianti rispetto alle trasformazioni di Galileo: la teoria elettromagnetica sarebbe allora dipendente dalla scelta del sistema di riferimento!

2 La teoria della relatività ristretta

Bisogna uscire quindi dal paradigma secondo cui la luce viaggia con velocità infinita. In realtà, come vedremo, è proprio l'assunto galieliano secondo cui $t = t'$ ad essere impreciso: osserveremo che non esiste un tempo assoluto, ma la misurazione di questa grandezza fisica è legata alla scelta del sistema di riferimento, non fosse altro che per il fatto che i segnali luminosi su cui si basa la possibilità di sincronizzare gli orologi viaggiano con velocità sebbene grande comunque finita!.

Da qui prese avvio l'opera di A.Einstein, il quale, facendo sue delle ipotesi che già erano state precedentemente formulate, elaborò una nuova spiegazione dei fenomeni di invarianza delle leggi fisiche nei sistemi di riferimento inerziali, interpretando i fenomeni di non invarianza come deformazioni di un supporto fisico detto spazio-tempo.

Questa teoria generale ha come caso particolare la cosidetta Relativià ristretta, le cui ipotesi sono:

- La luce viaggia con la stessa velocità in tutti i sistemi di riferimento inerziali
- Le leggi fisiche devono essere le stesse per tutti i sistemi inerziali, cioè non deve essere possibile distinguere tra loro un sistema in quiete da uno in moto rettilineo uniforme [principio di relatività]

Il principio di relatività unito alla costanza di c nei sistemi di riferimento prende il nome di principio di relatività di Einstein.

Per semplicità (da cui il nome di relatività ristretta) si assume la seguente situazione:

- si abbia un sistema O fisso
- un secondo sistema di riferimento O' sia in moto traslatorio lungo l'asse x con velocità costante $v < c$ (moto unidimensionale).

E' chiaro allora che le trasformazioni di Galileo non sono più adatte per stabilire una corrispondenza invariante fra O e O'. Quali saranno le nuove leggi di trasformazione?

3 Trasformazioni di Lorentz

E' necessario per preservare la validità della teoria di Maxwell e del principio di relatività sostituire le trasformazioni di Galileo con altre equazioni che rendano invarianti le equazioni di Maxwell. Dette trasformazioni, trovate ben prima di Einstein prendono il nome di trasformazioni di Lorentz.

Le coordinate di $O'(x', t')$ in moto sono legate a quelle del sistema in quiete $O(x, t)$ (trascurando le coordinate y e z che sono invarianti) da:

$$\boxed{\begin{cases} x' &= \dfrac{x - vt}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \\[2em] t' &= \dfrac{t - xv/c^2}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \end{cases}}$$

Per convenzione e semplicità di scrittura si pone $\dfrac{v^2}{c^2} = \beta^2$ e quindi $1/\sqrt{1 - \beta^2} = \gamma$, detto quest'ultimo, *fattore di Lorentz*.

Si osservi che l'ipotesi $v < c$ implica necessariamente che $\beta < 1$ e quindi

$$\boxed{\gamma > 1 \ \forall v < c}$$

Questa conseguenza sta alla base delle importanti conseguenze analizzate nei paragrafi successivi.

Si osservi altresì che quando $v << c$, il termine $v/c = \beta$ è praticamente trascurabile e le trasformazioni di Lorentz divengono praticamente uguali a quelle di Galileo. In tal senso, allora, la teoria della relatività ristretta comprende la fisica classica, che ne diviene un limite per velocità piccole se paragonate a quella della luce, situazione nella quale ci troviamo usualmente considerando i fenomeni di moto quotidiani nel nostro mondo osservabile.

4 La relatività della contemporaneità

In seguito alle traformazioni di Lorentz si assiste ad una relativizzazione di molti concetti cinematici, fra questi quello di *contemporaneità*.

Due eventi A e B si dicono contemporanei se accadono nello stesso istante, ossia $t_A = t_B$. Come vedremo, la contemporaneità di due eventi diviene un concetto per l'appunto relativo, perchè risulta legato alla scelta del sistema di riferimento, cosa che non accadeva per la fisica classica: le trasformaziono di Galileo imponevano che la coordinata temporale fosse uguale in tutti i sistemi di riferimento.

Consideriamo allora due eventi A e B che avvengono nel sistema O' in moto traslatorio. Ovviamente le loro coordinate spaziali sono x'_A e x'_B. Si pensi, per esempio a due lampi di luce contemporanei accadenti all'interno di un vagone ferroviario in moto. Per un osservatore O' solidale, i due fenomeni avvengano allo stesso tempo, ossia a $t'_A = t'_B$.

Cosa percepisce un osservatore in quiete nel sistema O, ad esempio una persona seduta su una panchina della stazione che si vede passare il vagone davanti con velocità v?.

Dalle trasformazioni di Lorentz:

$$t'_A = \frac{t_A - x_A v/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = (t_A - x_A v/c^2)\cdot\gamma \Rightarrow t_A = \frac{t'_A}{\gamma} + x_A v/c^2$$

$$t'_B = \frac{t_B - x_B v/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = (t_B - x_B v/c^2)\cdot\gamma \Rightarrow t_B = \frac{t'_A}{\gamma} + x_B v/c^2$$

Quindi risulta $t_B - t_A \neq 0$, e quindi che $t_A \neq t_B$, visto che:

$$t_B - t_A = \frac{t'_B}{\gamma} + x_B v/c^2 - \left(\frac{t'_A}{\gamma} + x_A v/c^2\right) = \frac{v}{c^2}\cdot(x_B - x_A)$$

In sostanza, nel sistema di O non sussiste contemporaneità fra i due eventi. Questo concetto diviene pertanto relativo, perchè dipende dalla scelta del sistema di riferimento. Si osservi anche come la differenza $t_B - t_A$ non può prescindere dalle coordinate spaziali x_A e x_B dei due eventi. In tal senso si comprende come spazio e tempo siano grandezze intimamente correlate. Nella relatività si usa allora considerare un ambiente di lavoro non più tridimensionale ma quadridimensionale. In altri termini, la descrizione completa di un evento E avviene, nel caso generale, attraverso quattro coordinate, di cui tre spaziali ed una temporale, del tipo:

$$E(x, y, z, t)$$

Ogni evento è quindi correlato ad un punto in uno spazio a quattro dimensioni, detto *Spazio di Minkowsky*.

5 La diltazione dei tempi

Un effetto direttamente collegato alla relatività della contemporaneità è quello di dilatazione temporale, secondo il quale anche la durata temporale di un fenomeno dipende dalla scelta del sistema di riferimento.

In particolare la durata di un evento che si manifesta nel sistema O in quiete è maggiore se misurata in un sistema in moto O', rispetto al caso in cui lo si misuri nel sistema in quiete.

Consideriamo due eventi A e B che avvegnano NELLO STESSO LUOGO ma A TEMPI DIVERSI in un sistema fisso O. Un osservatore nel sistema O li vede quindi accadere in

$$A(x_A, t_A), \quad B(x_B, t_B), \quad x_A = x_B$$

Per fissare le idee, un osservatore seduto sulla panchina di una stazione accende e spegne una lampadina nello stesso luogo.

La durata dell'intervallo temporale percepito dall'osservatore in O vale:

$$\Delta t = t_B - t_A$$

Cosa accade in un sistema O' in moto (sull'asse x) rispetto ad O con velocità $v < c$, ovvero per esempio, cosa percepisce un osservatore seduto sul seggiolino di un vagone che transita davanti alla lampadina di O?

Per le trasformazioni di Lorentz:

$$t'_A = \frac{t_A - x_A v/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = (t_A - x_A v/c^2) \cdot \gamma$$

$$t'_B = \frac{t_B - x_B v/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = (t_B - x_B v/c^2) \cdot \gamma$$

Quindi:

$$t'_B - t'_A = \Delta t' = \gamma(t_B - x_B v/c^2 - t_A + x_A v/xc^2) = \gamma \Delta t$$

visto che $x_A = x_B$.

Pertanto l'intervallo temporale risulta **più lungo** nel sistema in moto, visto che $\gamma > 1$. Quindi , anche il tempo è relativo, visto che scorre in maniera differente nei sistemi di riferimento.

Come abbiamo visto, la formula che rende conto della dilatazione temporale è:

$$\boxed{\Delta t' = \gamma \cdot \Delta t}$$

La prospettiva si può anche ribaltare, pensando a cosa percepirebbe un osservatore in quiete relativamente a due lampi di luce successivi che si verificano nello stesso luogo di un sistema in moto. Per fissare le idee, immaginiamo di osservare due lampi di luce successivi nello stesso luogo di un vagone ferroviario che si avvicina con velocità v.

Dalla relaazione sopra scritta, si ha allora che:

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\gamma}$$

L'osservatore in quiete misurerebbe quindi una minore durata del fenomeno. Un osservatore in O percepisce quindi una durata MINORE per i fenomeni che avvengono nel sistema in moto O'.

Tale discrepanza naturalmente è del tutto irrilevante per velocità usuali che sono sempre $v << c$, ma diventa apprezzabile per moti che avvengono a velocità prossime a quelle della luce, per esempio quelli delle particelle subatomiche (vedi acceleratori di particelle).

5.1 Dilatazione dei tempi di vita

Viene così introdotto il concetto di *tempo proprio*, che è la durata temporale di un fenomeno misurato in un sistema in quiete. Tipico esempio è il concetto di tempo di vita τ di una particella, che è l'intervallo di tempo intercorrente tra l'istante in cui la particella viene prodotta e l'istante in cui viene assorbita o annichilita da un certo processo fisico. Dai processi di collisione di elettroni ad alta velocità vengono prodotte alcune tipologie di particelle dette muoni μ, il cui tempo di vita (inteso come tempo proprio, misurato cioè in un sistema in quiete) vale $t_\mu = 10^{-6}s$.

Se il muone venisse prodotto quindi in un sistema in quiete, non potrebbe essere rilevato tramite processi di durata inferiore al suo tempo di vita proprio.

Tuttavia, le collisioni che producono muoni avvengono fra fasci di elettroni accelerati fino a $v = 0,99c$, pertanto nel sistema di riferimento del muone, che si muove parallelamenmte alla direzione x di un osservatore fermo in O, per la dilatazione temporale, il tempo di vita sarebbe allungato di un fattore γ. Il fattore di Lorentz varrebbe:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(0,99)^2}} = 7,08$$

Quindi il tempo di vita τ' nel riferimento un moto varrebbe $\tau' = \tau \cdot 7,08 = 1,42 \cdot 10^{-5}s$.

In tal modo si possono riscontrare nella materia queste particelle, tramite opportuni rilevatori.

5.2 Viaggi relativistici

Sono viaggi immaginari compiuti da ipotetici mezzi spaziali a velocità confrontabili con quelle della luce.

Immaginiamo di costuire un'astronave la cui propulsione fornisca la velocità di $v = 2/3c$.

Per raggiungere la stella Proxima Centauri, la più vicina al sistema solare, a quella velocità ci vorrebbe il tempo (in anni):

$$\Delta t = \frac{d}{2/3c} = \frac{4,22 \cdot 9,5 \cdot 10^{15}}{1,99 \cdot 10^8} \simeq 6,4$$

ove $d = 4,22LY$, (LY =anni luce) è la distanza della stella, convertita in metri ($1LY = 9,5 \cdot 10^{15}m$) e $v = 0,66 \cdot c = 1,99 \cdot 10^8 m/s$ è la velocità di viaggio.

Nel sistema dell'astronave subentra la dilatazione temporale. Il fattore di Lorentz vale:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-0,66^2}} \simeq 1,34$$

Ciò significa che quando sulla Terra è trascorso un anno, sull'astronave, scorrendo il tempo più lentamente, sono trascorsi $\frac{1}{1,33} = 0,75$ anni.

Quindi il viaggio, nel sistema terrestre durerà, a quella velocità solo (in anni):

$$\delta t = \frac{\Delta t'}{\gamma} = \frac{6,4}{1,34} = 4,2$$

con un risparmio di ben 2 anni, 1 mese e 13 giorni!!

6 La contrazione delle lunghezze

Un secondo effetto cosidedetto relativistico è quello della contrazione delle dimensioni parallele all'asse del moto. Secondo tale fenoneno, la lunghezza di un oggetto misurata in quiete (quando l'oggetto ha $v = 0$ rispetto al sistema O), che sarà detta lunghezza a riposo L_0, risulta maggiore di quella dello stesso oggetto quando si sta muovendo con velocità $v \neq 0$.

Capovolgendo la prospettiva, possiamo alloa affermare che per un osservatore O in quiete le lunghezze di un oggetto in moto sono minori di quelle che misurerebbe quando l'oggetto è in quiete.

Nell'ipotesi che la misurazione sia stata compiuta ,a riposo, istantanemanete, cioè, nel sistema O a $t_A = t_B$, si ha che $L = x_B - x_A = \Delta x$.

Per le trasformazioni di Lorentz, nel sistema in moto O':

$$x'_A = \frac{x_A - vt_A}{\sqrt{1-\beta^2}} = (x_A - vt_A)\cdot\gamma$$

$$x'_B = \frac{x_B - vt_B}{\sqrt{1-\beta^2}} = (x_B - vt_B)\cdot\gamma$$

Quindi:

$$L' = \Delta x' = x'_B - x'_A = \gamma\Delta x = \gamma \cdot L$$

Capovolgendo la prospettiva, se la misurazione di lunghezza avviene rispetto al sistema O' per cui il corpo si trova a riposo, un osservatore posto in O per cui il sistema O' trasla con velocità v, la lunghezza percepita sarà:

$$\boxed{L' = \gamma \Rightarrow L = \frac{L}{\gamma} < L}$$

Ad esempio, un astronauta in moto con velocità $v = 0,75c$ rispetto al sistema della base spaziale sulla Terra, misura la lunghezza della navicella e trova, ad esempio il dato $L' = 3m$.

Che distanza misurerebbe un osservatore sulla Terra?

Il fattore di Lorentz vale:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-0,75^2}} \simeq 1,51$$

quindi, la distanza percepita a terra (sistema O) vale:

$$L = \frac{L'}{\gamma} = \frac{3}{1,51} \simeq 2m$$

Quindi, la lunghezza appare più corta!

6.1 Il viaggio dei muoni

Abbiamo già visto che alcune interazioni fra fasci di particelle produce dei muoni. Ciò accade anche nell'alta atmosfera terrestre: i raggi cosmici prodotti dall'attività solare interagiscono ad un'altezza che vale $h = 15.000\,m$ producendo muoni con velocità pari a $v = 0,99c$.

Il tempo di vita a riposo di questa particella vale $\tau = 2\cdot 10^{-6}\,s.$, per cui nel sistema a riposo, la particella potrebbe percorrere solamente:

$$d = v\cdot\tau = 0,99\cdot 3\cdot 10^8\cdot 2\cdot 10^{-6} \simeq 540\,m$$

Il muone quindi non riesce ad arrivare a terra prima di essere assorbito.

Tenendo invece conto dell'effetto di contrazione delle lunghezze, nel proprio sistema di riferimento (in moto) il muone dovrebbe percorrere un cammino ben più breve: il fattore di Lorentz vale:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-0,99^2}} \simeq 7,08$$

quindi la distanza da percorrere é:

$$d' = \frac{d}{\gamma} = \frac{15.000}{7,08} \simeq 2188,64\,m$$

in ogni caso ben superiore alla distanza che potrebbe percorrere prima di essere assorbito.

Se in più consideriamo anche la dilatazione dei tempi, abbiamo visto che il tempo di vita viene accresciuto di un fattore $\gamma = 7,08$, per cui il nuovo tempo di vita varrebbe, nel sistema del muone, $\tau' = 7,08 \cdot 2 \cdot 10^{-6} = 1,42 \cdot 10^{-5}\, s$.

Di conseguenza, la distanza che percorrerebbe a riposo sarebbe allungata proprio di un fattore γ, quindi, nel tempo τ' la particella arriverebbe a percorrere

$$d' = d \cdot \gamma = 4205\, m$$

abbondantemente bastanti rispetto ai $2188,64\, m$ occorrenti per giungere a terra e quindi essere rilevati!

6.2 Il paradosso dei gemelli

Un altro celebre effetto è costituito dal seguente esperimento ideale.

Due gemelli, Toni e Bepi hanno la stessa età di 20 anni. Mentre Toni resta sulla Terra, Bepi intraprende un viaggio intergalattico, lanciato a bordo di un'astronave che si allontana in linea retta con $v = 0,99c$. Nell'orologio di Bepi, il gemello nell'astronave, il viaggio dura, per fissare le idee, $\Delta t' = 10$ anni. Si tratta di una rilevazione effettuata in un sistema comunque in moto rispetto a quello di Toni, rimasto sulla Terra.

Bepi, essendo in moto, subisce l'effetto di dilatazione temporale. Per una siffatta velocità abbiamo visto che il fattore di Lorentz vale $\gamma = 7,08$, per cui il tempo misurato da Bepi a bordo dell'astronave scorre più lentamente di quello che misura Toni sulla Terra. Si hanno i seguenti effetti

- il viaggio per Bepi è durato 10 anni, per cui Bepi al ritorno sulla Terra ha 30 anni.
- 10 anni di Bepi però non sono 10 anni di Toni: per quest'ultimo ne sono invece trascorsi $\Delta t = \gamma \cdot \Delta t' = 10 \cdot 7,08 = 70,8$: nel sistema di Bepi, Toni risulta avere pertanto 90,8 anni!!

Conseguenza: quando Bepi torna sulla Terra dovrebbe trovare il gemello novantenne!

Rovesciando la prospettiva però, se il viaggio dura 10 anni misurati nel il sistema di riferimento di Toni, sarà Toni a vedere più vecchio Bepi, che a questo punto sarebbe novantenne.

Il paradosso consiste proprio in questa asimmetria! Chi ha ragione? La risposta risiede nel fatto che Bepi, per raggiungere una velocità del genere, dovrebbe subire una certa accelerazione, e quindi il suo riferimento, rispetto a Toni, sarebbe accelerato e non più inerziale, contro le ipotesi della relatività ristretta, per cui l'effetto di dilatazione temporale della fase di andata sarebbe annullato dalla fase di ritorno, facendo sì che il vaggio duri 10 anni in tutti e due i sistemi!