LE FORMULE DI VIÈTE-GIRARD E LE FORMULE DI NEWTON-GIRARD

Prof. Fabio Breda

Abstract. *Lo scopo di questo articolo è fornire ai partecipanti al progetto Archimede degli strumenti per la preparazione alle olimpiadi della matematica a squadre e al progetto MIND.*

Il matematico francese François Viète (1540 - 1603) ha determinato alcune della relazioni che intercorrono tra i coefficienti e le radici di un polinomio, formule note però con il nome di Viète-Girard, poiché la formulazione chiara di queste relazioni è opera del matematico Albert Girard (1595 – 1632). Il seguente teorema esprime tali relazioni.

Teorema 1 *(Formule di Viète-Girard) Sia* $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$ *un polinomio a coefficienti reali di grado* n *e siano* $x_1, x_2, ..., x_n$ *le sue radici (in generale complesse) ripetute con la loro molteplicità, allora*

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = \sum_{1 \le i \le n} x_i = -a_{n-1}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + ... + x_{n-1}x_n = \sum_{1 \le i < j \le n} x_i \cdot x_j = a_{n-2}$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + ... + x_{n-2}x_{n-1}x_n = \sum_{1 \le i < j < k \le n} x_i \cdot x_j \cdot x_k = -a_{n-3}$$

$$\vdots$$

$$x_1x_2 \cdots x_n = (-1)^n a_0$$

Dimostrazione.

E' sufficiente eseguire le moltiplicazioni nell'espressione $(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$ e poi confrontare il polinomio risultante col polinomio $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$ applicando, poi, il principio di identità dei polinomi che afferma che due polinomi sono uguali se hanno uguali i coefficienti delle stesse potenze della variabile. ■

Nel caso di $n = 2$ il polinomio diventa $x^2 + a_1x + a_0$ e le formule si riducono a $x_1 + x_2 = -a_1$ e $x_1 \cdot x_2 = a_0$.

Nel caso $n = 3$ il polinomio diventa $x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ e le formule si riducono a $x_1 + x_2 + x_3 = -a_2$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = a_1$ e $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -a_0$.

Propongo ora alcuni esercizi risolvibili con le formule di Viète-Girard:

Esercizio 1.1(MIND, Entry test January 15, 2015) Let a, b, c the roots of $x^3 - 3x^2 - 18x + 40$. We know that $ab = 10$. How much is $c(a + b)$?

Solution: Consider the relation between the linear coefficient and the roots: $-18 = ab + bc + ca$. So $(b + a)c = -18 - ab = -28$.

Esercizio 1.2 Dato il polinomio $p(x) = x^4 + 3x^3 - x^2 - 9x + 6$ calcolare il valore dell'espressione

$$\frac{1}{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3} + \frac{1}{x_1 \cdot x_2 \cdot x_4} + \frac{1}{x_1 \cdot x_3 \cdot x_4} + \frac{1}{x_2 \cdot x_3 \cdot x_4}$$

Soluzione: Facendo il minimo comune multiplo si arriva a ottenere $-\frac{1}{2}$.

Esercizio 1.3 Se m, n e 1 sono le tre radici dell'equazione $x^3 - mx^2 + nx - 1 = 0$, allora quanto vale la loro somma?

Soluzione: Abbiamo che la somma delle radici è $-a_2$, cioè l'opposto del coefficiente di x^2, da cui $n + 1 = 0$; ricordandoci che il termine noto è l'opposto del prodotto delle tre radici si ha $1 = -1 \cdot m \cdot 1$, da cui $m = -1$.

Anche le somme di potenze di radici hanno delle regolarità molto particolari; infatti anche esse possono essere espresse mediante i coefficienti del polinomio. Girard, molti anni prima, aveva mostrato come calcolare la somma dei quadrati delle radici, o la somma dei cubi o delle quarte potenze; ma fu Newton che generalizzò queste ricerche fino a comprendere tutte le potenze. Nel seguente teorema riporto il suo risultato:

Teorema 2 *(Formule di Newton-Girard) Sia $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$ un polinomio a coefficienti reali di grado n e siano $x_1, x_2, ..., x_n$ le sue radici (in generale complesse) ripetute con la loro molteplicità, allora*

$$S_k + a_{n-1}S_{k-1} + a_{n-2}S_{k-2} + ... + a_{n-k}k = 0 \qquad se \qquad 1 \leq k \leq n$$

$$S_k + a_{n-1}S_{k-1} + a_{n-2}S_{k-2} + ... + a_0S_{k-n} = 0 \qquad se \qquad n \leq k$$

ponendo $S_k = x_1^k + x_2^k + ... + x_n^k$

Dimostrazione.

Newton lascia la dimostrazione al suo lettore. La prima dimostrazione della regola di Newton è data da Maclaurin. Egli comincia con il considerare il caso di una somma di potenze k-esime, con $k > n$ (il caso più semplice). Poiché x_i è radice del polinomio abbiamo che

$$\left(x_i^n + a_{n-1}x_i^{n-1} + ... + a_1x_i + a_0\right) \cdot x_i^{k-n} = 0$$

Da questo seguono le identità

$$x_1^k + a_{n-1}x_1^{k-1} + ... + a_1x_1^{k-n+1} + a_0x_1^{k-n} = 0$$

$$x_2^k + a_{n-1}x_2^{k-1} + ... + a_1x_2^{k-n+1} + a_0x_2^{k-n} = 0$$

$$x_3^k + a_{n-1}x_3^{k-1} + ... + a_1x_3^{k-n+1} + a_0x_3^{k-n} = 0$$

$$...$$

Sommando tutte le righe abbiamo

$$S_k + a_{n-1}S_{k-1} + ... + a_1S_{k-n+1} + a_0S_{k-n} = 0$$

In seguito Maclaurin considera il caso di $k \leq n$ ma rimando i dettagli a [2].

Un'altra dimostrazione elegante è fornita da Lagrange e anche di questa rimando i dettagli a [2].■

Nel caso di $n = 2$ il polinomio diventa $x^2 + a_1x + a_0$ e possiamo ricavare alcuni esempi di formule: $S_1 = -a_1$, $S_2 = a_1^2 - 2a_0$ ...

Nel caso $n = 3$ il polinomio diventa $x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ e possiamo ricavare alcuni esempi di formule: $S_1 = -a_2$, $S_2 = a_2^2 - 2a_1$, $S_3 = -a_2^3 + 3a_1a_2 - 3a_0$ ...

Propongo ora alcuni esercizi risolvibili con le formule di Newton-Girard:

Esercizio 2.1 Consideriamo l'equazione $x^4 - x^3 - x + 1 = 0$. Calcolare la somma delle potenze di ordine 5 delle sue radici.

Soluzione:

$$S_1 + a_3 \cdot 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad S_1 = 1$$
$$S_2 + a_3 S_1 + a_2 \cdot 2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad S_2 = 1$$
$$S_3 + a_3 S_2 + a_2 S_1 + a_1 \cdot 3 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad S_3 = 4$$
$$S_4 + a_3 S_3 + a_2 S_2 + a_1 S_1 + a_0 \cdot 4 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad S_4 = 1$$
$$S_5 + a_3 S_4 + a_2 S_3 + a_1 S - 2 + a_0 S_1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad S_5 = 1$$

Esercizio 2.2 Determina la somma delle potenze 14-esime delle radici del polinomio $x^7 - x - 1 = 0$

Soluzione: $S_{14} = 7$

Esercizio 2.3 Dato il polinomio $p(x) = 7x^3 + 2x + 1$, calcolare S_1, S_2 e S_3.

Soluzione: Occorre trasformare il polinomio dato in uno monico. Sia dunque $p^*(x) = x^3 + \frac{2}{7}x + \frac{1}{7}$. Utilizzando le formule si ottiene $S_1 = -a_2 = 0$, $S_2 = a_2^2 - 2a_1 = -\frac{4}{7}$, $S_3 = -a_2^3 + 3a_1a_2 - 3a_0 = -\frac{3}{7}$.

Esercizio 2.4 Trova la somma delle quinte potenze delle radici del polinomio $x^6 - 4x^5 + 3x^3 - 4x^2 + x + 1$.

Soluzione: $S_5 = 859$

Esercizio 2.5 Trova la somma delle ottave potenze delle radici del polinomio $x^4 - x^3 - 1$.

Soluzione: $S_8 = 13$

Esercizio 2.6 Trova la somma delle decime potenze delle radici del polinomio $x^3 - 3x + 1$.

Soluzione: $S_{10} = 621$.

Ed ora esercizi misti:

Esercizio 3.1 Trova m e risolvi la seguente equazione sapendo che le sue radici formano una progressione geometrica $x^4 - 15x^3 + 70x^2 - 120x + m = 0$.

Esercizio 3.2 (China MO 2005) Se p e q sono due numeri reali soddisfacenti le relazioni $2p^2 - 3p - 1 = 0$ e $q^2 + 3q - 2 = 0$, con $pq \neq 1$, trovare il valore di $\dfrac{pq + p + 1}{q}$

Esercizio 3.3 Trova S_1, S_2, ..., S_n delle radici del polinomio $x^n + \dfrac{x^{n-1}}{1} + \dfrac{x^{n-2}}{1 \cdot 2} + ... + \dfrac{1}{n!}$.

Esercizio 3.4 Dimostrare che se la somma delle radici di un'equazione di quarto grado è nulla allora $\dfrac{S_5}{5} = \dfrac{S_3}{3} \cdot \dfrac{S_2}{2}$.

Esercizio 3.5 Dimostrare che se per un'equazione di sesto grado $S_1 = S_3 = 0$ allora $\dfrac{S_7}{7} = \dfrac{S_5}{5} \cdot \dfrac{S_2}{2}$.

Esercizio 3.6 Trovare le equazioni di grado n per le quali $S_1 = S_2 = ... = S_{n-1} = 0$.

Esercizio 3.7 (Cesenatico 2002) Determinare per quali valori di n tutte le soluzioni dell'equazione $x^3 - 3x + n = 0$ sono numeri interi.

Esercizio 3.8 (Australian MO 1996) (Gara a Squadre 1996.) Sia $p(x)$ un polinomio cubico. Supposto che

$$\frac{p\left(\frac{1}{2}\right) + p\left(-\frac{1}{2}\right)}{p\left(0\right)} = 1000$$

trovare il valore di

$$\frac{1}{x_1 \cdot x_2} + \frac{1}{x_2 \cdot x_3} + \frac{1}{x_3 \cdot x_1}$$

Esercizio 3.9 Siano a, b, c le lunghezze dei lati di un triangolo ABC con $a > b > c$ e $2b = a + c$, e b intero positivo. Se $a^2 + b^2 + c^2 = 84$, trovare il valore di b.

Esercizio 3.10 (Finale Cesenatico 2012.) $p(x)$ è un polinomio di terzo grado con coefficiente direttivo uguale a 1 e con tutte le radici intere positive e tale che $p(1) < -500$ e il prodotto delle radici sia 2012. Calcolare il coefficiente della x.

Esercizio 3.11 Dato il polinomio $p(x) = \sqrt{3}x^3 + \pi x^2 - \dfrac{2}{3}x - 2$, calcolare il valore dell'espressione $x_1^2(x_1 - 1) + x_2^2(x_2 - 1) + x_3^2(x_3 - 1)$.

Esercizio 3.12 Indicando con x_1, x_2, x_3, x_4 le soluzioni dell'equazione $x^4 - 2x^3 - 7x^2 - 2x + 1 = 0$, quanto vale la somma dei reciproci delle soluzioni?

Esercizio 3.13 (Stage PreIMO Pisa 2006). Siano p e q interi positivi, e sia $p(x) = (x+1)^p(x-3)^q = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n$. Determinare tutte le coppie (p, q) di interi positivi per cui si ha che $a_1 = a_2$.

Esercizio 3.14 Risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 34 \end{cases}$$

Esercizio 3.15 Determina λ in modo tale che una delle radici dell'equazione $x^3 - 7x + \lambda = 0$ sia uguale al doppio di un'altra.

Esercizio 3.16 La somma di due radici dell'equazione $2x^3 - x^2 - 7x + \lambda = 0$ è uguale a 1. Determina λ.

Esercizio 3.17 Determina una relazione tra i coefficienti dell'equazione $x^3 + px + q = 0$ affinché si abbia $x_3 = \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}$.

Esercizio 3.18 Trovare la relazione tra i coefficienti dell'equazione $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, nella quale una radice è uguale alla somma delle altre due.

Esercizio 3.19 Determina a, b e c in modo che siano radici dell'equazione $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$.

Soluzioni degli esercizi misti:

Esercizio 3.1 [Metaliu Klara]
Soluzione: Siano λ, λq, λq^2, λq^3 le 4 soluzioni dell'equazione.
Per le formule di Viète:

$$\begin{cases} \lambda + \lambda q + \lambda q^2 + \lambda q^3 = 15 \\ \lambda^2 q + \lambda^2 q^2 + \lambda^2 q^3 + \lambda^2 q^3 + \lambda^2 q^4 + \lambda^2 q^5 = 70 \\ \lambda^3 q^3 + \lambda^3 q^5 + \lambda^3 q^6 + \lambda^3 q^4 = 120 \\ \lambda^4 q^6 = m \end{cases}$$

quindi

$$\begin{cases} \lambda(1 + q + q^2 + q^3) = 15 \\ \lambda^2 q(1 + q + 2q^2 + q^3 + q^4) = 70 \\ \lambda^3 q^3(1 + q + q^2 + q^3) = 120 \\ \lambda^4 q^6 = m \end{cases}$$

Dalla prima equazione ho che $(1 + q + q^2 + q^3) = \dfrac{15}{\lambda}$ e sostituendo nella terza equazione

$$\lambda^3 q^3 \cdot \frac{15}{\lambda} = 120 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 q^3 = 8 \quad \Rightarrow \quad \lambda^4 q^6 = 64 \quad \Rightarrow \quad m = 64$$

Quindi il polinomio è uguale a

$$x^4 - 15x^3 + 70x^2 - 120x + 64 = 0$$

cioè

$$(x-1)(x-2)(x-4)(x-8) = 0$$

cioè le soluzioni sono 1, 2, 4, 8 e la ragione della progressione $q = 2$

Esercizio 3.2 (China MO 2005)
Soluzione: Le soluzioni delle due equazioni quadratiche si trovano facilmente:

$$p_1 = \frac{3 + \sqrt{17}}{4} \qquad p_2 = \frac{3 - \sqrt{17}}{4}$$

$$q_1 = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2} \qquad q_2 = \frac{-3 - \sqrt{17}}{2}$$

e si nota che $p_1 \cdot q_1 = p_2 \cdot q_2 = 1$ mentre $q_1 = -2p_2$ e $q_2 = -2p_1$
Quindi, nelle ipotesi del problema, possiamo supporre che $q = -2p$ quindi

$$\frac{pq + p + 1}{q} = \frac{2p^2 - p - 1}{2p} = \frac{2p^2 - 3p - 1 + 2p}{2p} = \frac{2p}{2p} = 1$$

Esercizio 3.3 [Boscaratto Simone]
Soluzione: Applicando le formule di Newton-Girard per $n = 1$ e $n = 2$, si ottiene:

$$S_1 + a_{n-1} k = 0 \Rightarrow S_1 = -(1 \cdot 1) = -1$$

$$S_2 + a_{n-1}S_1 + a_{n-2}k = 0 \Rightarrow S_2 = -\left(1 \cdot (-1) + \frac{1}{2} \cdot 2\right) = 0$$

Generalizzando rispettivamente i termini $a_{n-1}S_1$ e $a_{n-2}k$ dalla seconda equazione trovata, si ottiene:

$$a_{n-k+1}S_1 = a_{n-(k-1)}S_1 = \frac{1}{(k-1)!} \cdot (-1) = -\frac{1}{1 \cdot 2 \cdots (k-1)}$$

$$a_{n-k}k = \frac{1}{k!} \cdot k = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdots (k-1) \cdot k} \cdot k = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdots (k-1)}$$

Di conseguenza, escluso il caso di $n = 1$ in cui appaiono solo i termini S_1 e $a_{n-1}k$, gli ultimi due termini di ogni equazione ricavata dalle formule di Newton-Girard si annullano, rendendo nulla la somma nel caso di $n = 2$ (come visto nell'esempio). Per la ricorsività della formula e la legge di annullamento del prodotto, si ha che in ogni equazione ottenuta per $n > 2$ gli unici termini diversi da 0 sono esattamente gli ultimi due, i quali annullandosi a vicenda rendono ogni somma finale pari a 0.

Perciò, $S_1 = -1$; $S_n = 0 \ \forall n \in N | n \neq 1$.

Esercizio 3.4 [Metaliu Klara]

Soluzione: Sappiamo che $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ cioè $S_1 = 0$.

Per dimostrare l'uguaglianza tra $\frac{S_5}{5}$ e $\frac{S_3}{3} \cdot \frac{S_2}{2}$ nel caso in cui $a_3 = -S_1 = 0$ utilizzo le formule di Newton, ricavando S_2, S_3, S_4, S_5 e sostituendo mano a mano le relazioni ricavate nelle formule successive.

$$S_2 = -a_3S_1 - a_2k \qquad \Rightarrow \qquad S_2 = -2a_2$$

$$S_3 = -a_3S_2 - a_2S_1 - a_1k \qquad \Rightarrow \qquad S_3 = -3a_1$$

$$S_4 = -a_3S_3 - a_2S_2 - a_1S_1 - a_0k \qquad \Rightarrow \qquad S_4 = 2a_2 - 4a_0$$

$$S_5 = -a_3S_4 - a_2S_3 - a_1S_2 - a_0S_1 \qquad \Rightarrow \qquad S_5 = 5a_1a_2$$

sostituendo S_2, S_3 e S_5 nell'equazione ottengo:

$$\frac{5a_1a_2}{5} = \frac{-3a_1}{3} \cdot \frac{-2a_2}{2} \qquad \Rightarrow \qquad a_1a_2 = a_1a_2$$

Esercizio 3.5 [Toffolin Leonardo]

Soluzione: Sia $x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ un'equazione di sesto grado con $S_1 = S_3 = 0$.

Per dimostrare l'uguaglianza tra $\frac{S_7}{7}$ e $\frac{S_5}{5} \cdot \frac{S_2}{2}$ utilizzo le formule di Newton-Girard, ricavando S_2, S_4, S_5, S_6 e S_7 e sostituendo mano a mano le relazioni ricavate nelle formule successive in modo da ottenere le seguenti scritture:

- per $n = 6$ e $k = 1$

$$S_1 + a_5k = 0 \qquad \Rightarrow \qquad a_5 = 0$$

- per $n = 6$ e $k = 2$
$$S_2 + a_5 S_1 + a_4 k = 0 \qquad \Rightarrow \qquad S_2 = -2a_4$$
- per $n = 6$ e $k = 3$
$$S_3 + a_5 S_2 + a_4 S_1 + a_3 k = 0 \qquad \Rightarrow \qquad a_3 = 0$$
- per $n = 6$ e $k = 4$
$$S_4 + a_5 S_3 + a_4 S_2 + a_3 S_1 + a_2 k = 0 \qquad \Rightarrow \qquad S_4 = -4a_2 + 2(a_4)^2$$
- per $n = 6$ e $k = 5$
$$S_5 + a_5 S_4 + a_4 S_3 + a_3 S_2 + a_2 S_1 + a_1 k = 0 \qquad \Rightarrow \qquad S_5 = -5a_1$$
- per $n = 6$ e $k = 7$
$$S_7 + a_5 S_6 + a_4 S_5 + a_3 S_4 + a_2 S_3 + a_1 S_2 + a_0 S_1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad S_7 = 7a_1 a_4$$

Ora è possibile sostituire i valori di S_7, S_2 e S_5 trovati precedentemente:

$$\frac{S_7}{7} = \frac{7a_1a_4}{7} = a_1a_4 \qquad \text{e} \qquad \frac{S_5}{5} \cdot \frac{S_2}{2} = \frac{-5a_1}{5} \cdot \frac{-2a_4}{2} = a_1a_4$$

L'identità è dunque verificata.

Esercizio 3.6
Soluzione: Applicando le formule di Newton-Girard per $n = 1$ si ottiene:

$$S_1 + a_{n-1} = 0 \Rightarrow S_1 = -a_{n-1} \Rightarrow a_{n-1} = 0$$

per $n = 2$
$$S_2 + a_{n-1}S_1 + 2a_{n-2} = 0 \Rightarrow S_2 = -a_{n-1}S_1 - 2a_{n-2} = -2a_{n-2} \Rightarrow a_{n-2} = 0$$
Generalizzando si capisce che si annullano tutti i coefficienti del polinomio cercato tranne l'ultimo poiché S_n non deve essere necessariamente nullo. Quindi il polinomio è del tipo $x^n - a$.

Esercizio 3.7 (Cesenatico 2002)
Soluzione: Se a, b, c sono le tre soluzioni (non necessariamente distinte) dell'equazione $x^3-3x+n = 0$, allora per le formule di Viète
$a + b + c = 0$, $ab + bc + ca = -3$ e $abc = -n$
Essendo $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca)$, si ottiene $a^2 + b^2 + c^2 = 6$. Se a, b, c sono interi, questo è possibile solo se due dei quadrati sono uguali ad 1 ed il terzo è uguale a 4. Pertanto possiamo assumere, per simmetria, che $a = \pm 1$, $b = \pm 1$, $c = \pm 2$. Poiché inoltre si deve avere $a + b + c = 0$, le sole possibilità sono $a = b = 1$, $c = -2$ e $a = b = -1$, $c = 2$, da cui si ricava che $n = 2$ oppure $n = -2$.

Esercizio 3.8 (Australian MO 1996)(Gara a Squadre 1996.)
Soluzione: Un polinomio cubico è della forma $x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ quindi

$$p\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4}a_2 + \frac{1}{2}a_1 + a_0 \qquad \text{e} \qquad p\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8} + \frac{1}{4}a_2 - \frac{1}{2}a_1 + a_0$$

quindi

$$\frac{p\left(\frac{1}{2}\right)+p\left(-\frac{1}{2}\right)}{p(0)}=\frac{a_2}{2a_0}+2$$

cioè $a_2 = 1996a_0$ Conoscendo le formule di Viète e esplicitando i calcoli si ha che

$$\frac{1}{x_1\cdot x_2}+\frac{1}{x_2\cdot x_3}+\frac{1}{x_3\cdot x_1}=\frac{x_1+x_2+x_3}{x_1\cdot x_2\cdot x_3}=\frac{a_2}{a_0}=1996$$

Esercizio 3.9 [Breda Fabio]

Soluzione: Essendo $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) = a^2+b^2+c^2+2[b(a+c)+ca]$, si ottiene $5b^2-2ac = 84$. Quindi il sistema

$$\begin{cases} a+c=2b \\ 5b^2-2ac=84 \end{cases}$$

il quale porta all'equazione risolvente $2c^2-4bc+5b^2-84=0$ nella variabile c.

Questa equazione ha soluzioni reali solo se il suo delta è non negativo cioè se $24b^2-672 \leq 0$.

I valori di a, b e c devono essere positivi in quanto lati di un triangolo, quindi, per il teorema di Cartesio, per avere soluzioni dell'equazione risolvente entrambe positive devo avere due variazioni, poiché 2 è positivo e $-4b$ negativo, dunque $5b^2-84>0$.

Se $5b^2-84<0$ si ottiene una soluzione c_1 positiva e una soluzione c_2 negativa, ma la soluzione positiva, l'unica accettabile, sommata a quella negativa darebbe $2b$ poiché per le equazioni di secondo grado vale la relazione $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$. Ma questo porterebbe a dire che per le due soluzioni c_1 e c_2 vale $c_1+c_2=2b$ e quindi che la soluzione c_1 positiva è maggiore di $2b$ e, dato che $a=2b-c$, che a è negativa e questro non è accettabile. Dunque devo richiedere che entrambe le soluzioni delle equazioni siano positive.

Dato che $a^2+b^2+c^2=84$ implica che $b^2<84$.

Queste tre condizioni portano al sistema

$$\begin{cases} b\in\mathbb{N} \\ 24b^2-672\leq 0 \\ 5b^2-84>0 \\ b^2<84 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b\in\mathbb{N} \\ b=1,2,3,4,5 \\ b=5,6,7,... \\ b=1,2,3,4,5,6,7,8,9 \end{cases}$$

quindi $b=5$. E' facile verificare che con tale b e con la condizione $a>b>c$ si ottiene $a=\frac{10+3\sqrt{2}}{2}$ e $c=\frac{10-3\sqrt{2}}{2}$.

Esercizio 3.10 (Finale Cesenatico 2012.)

Soluzione: Per le formule di Viète abbiamo $p(x) = x_3+ax_2+bx-2012 = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$. Fattorizziamo $2012 = 2^2\cdot 503$ ed analizziamo tutte le possibili terne

$$(x_1,x_2,x_3) = (1,1,2012),(1,2,1006),(1,4,503),(2,2,503)$$

Adesso calcoliamo a e b per ognuno dei 4 casi possibili e stabiliamo quale sia la soluzione.

$$a = -x_1 - x_2 - x_3 = -2014, -1009, -508, -507$$

$$b = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 4025, 3020, 2519, 2016$$

$$1 + a + b - 2012 < -500$$

$$a + b < 1511$$

Dunque l'unica terna accettabile è $(2, 2, 503)$, e la risposta 2016.

Esercizio 3.11 [Metaliu Klara]
Soluzione: L'espressione data corrisponde a

$$\begin{aligned} &x_1^2(x_1-1) + x_2^2(x_2-1) + x_3^2(x_3-1) = \\ =&x_1^3 - x_1^2 + x_2^3 - x_2^2 + x_3^3 - x_3^2 = \\ =&x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = \\ =&S_3 - S_2 \end{aligned}$$

Per poter utilizzare le formule di Newton così da calcolare rapidamente il valore dell'espressione, è necessario che il polinomio sia monico, divido quindi tutti i termini del polinomio per $\sqrt{3}$ così da rendere il coefficiente del termine di grado massimo uguale a 1.

$$P(x) = x^3 + \frac{\pi}{\sqrt{3}}x^2 - \frac{2}{3\sqrt{3}}x - \frac{2}{\sqrt{3}}$$

A questo punto per le formule di Newton ho che:

$$\begin{aligned} &S_1 = -a_2 = -\frac{\pi}{\sqrt{3}} \\ &S_2 = -a_2S_1 - a_1k = \left(-\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{4}{3\sqrt{3}} = \frac{\pi^2\sqrt{3}+4}{3\sqrt{3}} \\ &S_3 = -a_2S_2 - a_1S_1 - a_0k = -\frac{\pi}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi^2\sqrt{3}+4}{3\sqrt{3}}\right) + \frac{2}{3\sqrt{3}}\left(-\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right) + \frac{6}{\sqrt{3}} = -\frac{\pi^3\sqrt{3} + 4\pi + 2\pi - 18\sqrt{3}}{9} \end{aligned}$$

$$S_3 - S_2 = -\frac{\pi^3\sqrt{3} + 6\pi - 14\sqrt{3} + 3\pi^2}{9}$$

Esercizio 3.12 [Metaliu Klara - Vitali Marina]
Soluzione: Dato il polinomio

$$x^4 - 2x^3 - 7x^2 - 2x + 1 = 0$$

quindi

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} = \frac{x_2x_3x_4 + x_1x_3x_4 + x_1x_2x_4 + x_1x_2x_3}{x_1x_2x_3x_4} = \frac{-a_1}{a_0} = 2$$

Esercizio 3.13 (Stage PreIMO Pisa 2006).

Soluzione: Il coefficiente a_1 è l'opposto della somma di tutte le radici (ciascuna presa tante volte quante è la sua molteplicità) mentre a_2 la somma dei loro prodotti a due a due, pertanto, poiché ci sono p radici uguali a -1 e q radici uguali a 3,

$$a_1 = p - 3q;$$

$$a_2 = \binom{p}{2} + 9\binom{q}{2} - 3pq;$$

$$p - 3q = \binom{p}{2} + 9\binom{q}{2} - 3pq.$$

Liberando dai denominatori e svolgendo i calcoli si trova $(p-3q)^2 = 3p + 3q$, da cui scopriamo che $p - 3q = 3h$ è divisibile per 3. Sostituendo otteniamo $3(p+q) = 9h^2$ e pertanto abbiamo il sistema

$$\begin{cases} p + q = 3h^2 \\ p - 3q = 3h \end{cases}$$

da cui otteniamo

$$\begin{cases} q = \dfrac{3h(h-1)}{4} \\ p = \dfrac{3h(3h+1)}{4} \end{cases}$$

E' facile vedere che queste formule restituiscono valori di p e di q interi se e solo se h è della forma $4s$ o $4s+1$ (dove s è un intero).

Esercizio 3.14 [Metaliu Klara, Piccin Erica]

Soluzione: Dato il sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 34 \end{cases}$$

considerando le tre variabili come le tre soluzioni di un'equazione di terzo grado e utilizzando le formule di Newton il sistema di può scrivere nel seguente modo:

$$\begin{cases} S_1 = 4 \\ S_2 = 14 \\ S_3 = 34 \end{cases}$$

Sempre per le formule di Newton si ha che

$$\begin{cases} S_1 = -a_2 \\ S_2 = -a_2 S_1 - a_1 k \\ S_3 = -a_2 S_2 - a_1 S_1 - a_0 k \end{cases}$$

Dato che il valore della somma delle soluzioni, ovvero S_1, è già nota, ottengo che $-a_2 = 4$ e quindi $a_2 = -4$. A questo punto sostituisco tutti i termini di cui conosco il valore nella seconda equazione, così da arrivare ad avere un'equazione di primo grado nella variabile a_1:

$$\begin{aligned}
&S_2 = -a_2 S_1 - a_1 k \\
&14 = 16 - 2a_1 \\
&a_1 = 1
\end{aligned}$$

Allo stesso modo, sostituisco i termini nella terza equazione per ottenere un'equazione di primo grado nella variabile a_0:

$$\begin{aligned}
&S_3 = -a_2 S_2 - a_1 S_1 - a_0 k \\
&34 = 52 - 4 - 3a_0 \\
&a_0 = 6
\end{aligned}$$

Quindi il polinomio di terzo grado di cui devo trovare le radici è: $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ le cui soluzioni sono:

$$\begin{aligned}
P(-1) = 0 &\qquad \longrightarrow \qquad x = -1 \\
P(2) = 0 &\qquad \longrightarrow \qquad y = 2 \\
P(3) = 0 &\qquad \longrightarrow \qquad z = 3
\end{aligned}$$

dunque $S = \{(-1, 2, 3)\}$.

Esercizio 3.15 [Toffolin Leonardo, Milanese Nicolò]
Soluzione: Consideriamo l'equazione di terzo grado $x^3 - 7x + \lambda = 0$.
Applichiamo la seguente formula di Viète-Girard:

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = \sum_{1 \leq i \leq n} x_i = -a_{n-1}$$

in tal caso diventa: $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, ossia $x_1 + x_2 = -x_3$.
Sapendo che una soluzione, ad esempio x_1, è doppio di un'altra x_2, possiamo scrivere che $-3x_2 = x_3$.
Applichiamo ora una seconda formula di Viète-Girard:

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + ... + x_{n-1} x_n = \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i \cdot x_j = a_{n-2}$$

Abbiamo quindi
$2x_2^2 - 6x_2^2 - 3x_2^2 = 7 = -7 \qquad \Rightarrow \qquad -7x_2^2 = -7 \qquad \Rightarrow \qquad x_2^2 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x_2 = \pm 1.$
Applichiamo una terza relazione di Viète-Girard:

$$x_1 x_2 ... x_n = (-1)^n a_0$$

Nel nostro caso: $x_1 x_2 x_3 = -\lambda \qquad \Rightarrow \qquad 6x_2^3 = \lambda$
Distinguiamo ora due casi. Se $x_2 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = 2$ e $x_3 = -3 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = 6$.
Se $x_2 = -1 \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = -2 \quad$ e $\quad x_3 = 3 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = -6$

Esercizio 3.16 [Toffolin Leonardo, Milanese Nicolò]

Soluzione: Consideriamo l'equazione di terzo grado $2x^3 - x^2 - 7x + \lambda = 0$. Sapendo che la somma di due soluzioni dà 1, ossia $x_1 + x_2 = 1$, si può determinare λ utilizzando l'apposita formula di Viéte-Girard:

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = \sum_{1 \leq i \leq n} x_i = -a_{n-1}$$

Dopo aver diviso entrambi i membri dell'equazione per 2, otteniamo che: $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{1}{2}$. Risolvendo l'equazione rispetto a x_3, si ottiene: $x_3 = -\frac{1}{2}$. Poiché la soluzione trovata deve soddisfare l'uguaglianza, è possibile ricavare il parametro λ:

$$-2 \cdot \frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{7}{2} = -\lambda \qquad \Rightarrow \qquad \frac{-2+14}{4} = -\lambda \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = -3$$

Esercizio 3.17 [Vitali Marina]

Soluzione: $x^3 + px + q = 0$

$$x_3 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2}$$

Adesso vorrei moltiplicare tutto per $x_1 \cdot x_2$ ma per farlo devo imporre che nessuna delle due soluzioni sia zero. Se lo fossero avrei $0 + q = 0$ perciò q=0.

Altrimenti $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = x_1 + x_2$

Per le formule di Viète-Girard: $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -q \Rightarrow x_1 + x_2 = -q$

Sempre per le formule di Viète-Girard: $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ quindi

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - q = 0 \end{cases} \Rightarrow x_3 = q$$

quindi $x_1 \cdot x_2 \cdot q = -q \Rightarrow x_1 \cdot x_2 = -1$

Per le formule di Viète-Girard:

$$x_1 \cdot x_2 \cdot + x_1 \cdot x_3 \cdot + x_2 \cdot x_3 = p \qquad \Rightarrow \qquad -1 + x_1 \cdot q \cdot + x_2 \cdot q = p \qquad \Rightarrow \qquad -1 + q \cdot (x_1 + x_2) = p$$

$$\Rightarrow \qquad -1 + q \cdot (-q) = p \qquad \Rightarrow \qquad q^2 + q + p = 0$$

dunque $q^2 + q + p = 0 \vee q = 0$

Esercizio 3.18 [Arghittu Nicola, Berti Andrea]

Soluzione: Partendo dai dati del problema possiamo porre $x_1 = x_2 + x_3$ e utilizzando la formula di Viète-Girard $(x_1 + x_2 + x_3 = -a_2)$ possiamo scrivere $x_1 + x_2 + x_3 = -p$ cioè $2x_1 = -p$ cioè $x_1 = -\frac{p}{2}$.

Sostituendo nell'equazione di partenza $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ alla variabile x la radice $x_1 = -\frac{p}{2}$, otteniamo la relazione tra i coefficienti p, r e q: $p^3 + 8r = 4pq$

Esercizio 3.19 [Arghittu Nicola, Berti Andrea]

Soluzione: Partendo dai dati del problema possiamo porre $x_1 = a$, $x_2 = b$ e $x_3 = c$ e utilizzando la formula di Viète-Girard $(x_1 + x_2 + x_3 = -a_2)$ possiamo scrivere $a + b + c = a$ da cui $b = -c$.

Utilizzando la formula di Viète-Girard $(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = (-1)^3 \cdot a_0)$ possiamo scrivere $a \cdot b \cdot c = c$ da cui:

- se $c \neq 0$, allora $a \cdot b = 1$ cioè $\cdot(-c) = 1$ quindi $a = -\frac{1}{c}$
  Utilizzando la formula di Viète-Girard ($x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_3 = a_1$) possiamo scrivere $ab + cb + ac = b$ da cui si ricava $c = 1$, $a = -1$ e $b = -1$.
- se invece $c = 0$, allora
  $b = 0$ e a può assumere qualsiasi valore appartenente ad $\mathbf{R}$.

Bibliografia:

[1] Polinomi ed equazioni Ercole Suppa e Rosanna Tupitti 10 novembre 2011

[2] Materiali per il corso di Storia della Matematica M. Galuzzi 29 maggio 2012

[3] QUADERNO DI MATEMATICA A. S.MATHESIS - SEZIONE BETTAZZI A.A. 2010/2011 DISPENSE DI MATEMATICA OLIMPIONICA A. Astolfi G. Audrito A. Carignano F. Tanturri seconda edizione riveduta e ampliata da G. Audrito G. Distefano R.Maffucci L. Prelli F. Roman

[4] Esercizi di Algebra Superiore - D. Faddeev, I. Sominskij - Editore Riuniti.

[5] Problemi sui polinomi - Gavioli_Algebra%203.pdf